Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Petr Pecl

Přibližné konstrukce některých pravidelných mnohoúhelníků nad danou stranou

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 3, 300--315

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122977

Stálý pokrok jest heslo každé vědy, a při postupu mathematických věd značí práce Eulerovy stupeň, jehož nebude lze nikdy přehlédnouti.

Přibližné konstrukce některých pravidelných mnohoúhelníků nad danou stranou.

Dr. Petr Pecl v Žižkově.

V rukopise *) citovaném v článku „Rozdělení úsečky atd.“ v ročn. XXXV. t. č. str. 179. jsou uvedeny některé zajímavé přibližné konstrukce pravidelných mnohoúhelníků, o nichž tuto promluviti chceme. Jsou to především konstrukce pravidelného sedmi-, devíti- a jedenáctiúhelníka a posléze přibližné konstrukce pravidelného pěti- a desetiúhelníka. Tyto přibližné methody hledí se co možná přiblížiti k theoretickému výsledku grafickým postupem, založeným na numerickém vyjádření hledaných veličin.

1. *Jest sestrojiti nad danou úsečkou jakožto stranou pravidelný sedmiúhelník.* V rukopise podány jsou dvě konstrukce pravidelného 7-úhelníka, které však nejsou podstatně rozdílné, spočívajíce obě, jakož lze snadno ukázati na faktu, že strana pravidelného 7-úhelníka jest přibližně polovinou strany rovnostranného trojúhelníka do téže kružnice vepsaného. Jestiť rozdíl strany s_7 pravidelného 7-úhelníka a poloviny strany $\frac{s_3}{2}$ rovnostranného trojúhelníka

$$s_7 - \frac{s_3}{2} = 0{\cdot}00173 \ldots r.$$

Jardin podává tyto konstrukce pravidelného sedmiúhelníka: 1.) *Opišme z koncových bodů úsečky $\overline{ab}$ kružnice bn, an poloměrem $\overline{ab}$ a z průsečíku jich n týmž poloměrem kružnici abc; sestrojme symmetrálu $\overline{mn}$ úsečky $\overline{ab}$ a veďme k ní bodem a rovnoběžku Y. Průsečík l kružnic bnl a abl spojme s b; tětiva $\overline{bl}$ protíná Y v g. Pak jest průsečík h symmetrály $\overline{mn}$ strany $\overline{ab}$ a kružnice*

*) Je to rukopis »Abrégé de la Géometrie Pratique« par Israel des Jardins, 1676 z knížecí knihovny Lobkovické v Roudnici.

opsané poloměrem $\overline{bg}$ z b středem kružnice opsané kol pravidelného 7-úhelníka.

2.) *Opišme kružnici bld poloměrem $\overline{ab}$ z a, která protíná přímku $Y \perp \overline{ab}$ v bodě v a prodlouženou stranu $\overline{ab}$ v d, z něhož opišme kružnici poloměrem $\overline{dv}$ a učiňme $\overline{zv} = \overline{dv}$; úsečka $\overline{bz}$ protíná Y v g. Průsečík oblouků opsaných z a a b poloměrem $\overline{bg}$ je středem kružnice opsané o pravidelný 7-úhelník.*

Ukážeme, že obě konstrukce jsou applikací téže věty geometrické, kterou lze vyjádřiti takto:

Je-li jeden z vrcholů rovnostranného trojúhelníka (dfe) pevným a nalézá-li se v jedné ze dvou vzájemně kolmých os (v bodě d), a je-li geometrickým místem druhého vrcholu (f) druhá osa (Y), jest geometrickým místem třetího vrcholu (e) paprsek procházející tímto vrcholem a bodem (b) položeným na prvé ose (X) a symmetricky sdruženým s prvým vrcholem (d) dle druhé osy (Y) skloněný k prvé ose (X) pod úhlem 30^0, resp. 150^0. Považujeme-li obě osy za osy orthogonálního systému souřadnicového, jest vzdálenost průsečíku geometrického místa třetího vrcholu s osou $y = 0$ polovinou strany rovnostranného trojúhelníka vepsaného do kružnice o poloměru rovnajícím se vzdálenosti téhož průsečíku od průsečíku téhož místa s osou $x = 0$.

Abychom to dokázali, supponujme pro jednoduchost, že daná úsečka $\overline{ab} = 1$, t. j. vyjádřeme poloměr kružnice jednotkou rovnou dané úsečce. Supposice tato není nutnou, není však též na ujmu všeobecnosti, ježto tu běží jen o vzájemný vztah strany a poloměru.

Vztyčme v bodě $a(0, 0)$ kolmici $Y(x = 0)$ na danou úsečku $\overline{ab}(y = 0)$ a opišme kružnici $K(a\,(0, 0),\ r = \overline{ab} = 1)$, která protíná osu $x = 0$ v bodech $b(1, 0)$, $d(-1, 0)$. (Viz obr. 1.) Veďme pak $K(d\,(-1, 0),\ \varrho = \text{libovolné } \overline{df})$; učiňme ještě $\overline{ef} = \overline{fd} = \overline{ed} = \sigma_3$, kde σ_3 značí stranu takto sestrojeného rovnostranného trojúhelníka.

Lze dokázati, že geometrickým místem vrcholu $e(x, y)$ jest spojnice jeho s bodem b. Z obr. 1. patrno, že

$$y = -(-x - (-1))\, tg\,(\varphi + 60^0), \tag{1}$$

kde $\sphericalangle \varphi = \sphericalangle adf$, $\sphericalangle fde = 60^0$.

Bod f má souřadnice $(0, k)$, kde k jest pořadnice proměnná. Jsou to tedy souřadnice vrcholů f celého systému. Uvážíme-li, že

$$tg\,\varphi = \frac{k}{1} = k,$$

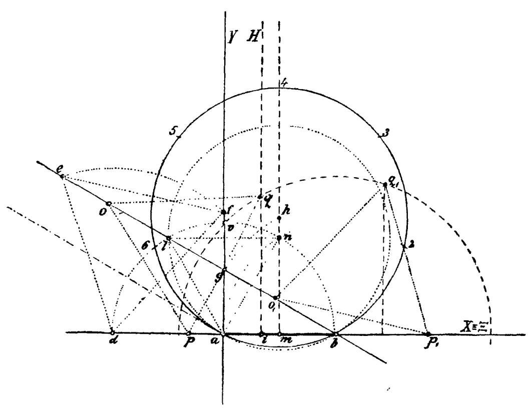
obdržíme z rovnice (1)

$$y = (x - 1)\frac{k + \sqrt{3}}{1 - k\sqrt{3}},$$

čili po krátké redukci

$$(x + y\sqrt{3} - 1)\,k + x\sqrt{3} - y - \sqrt{3} = 0. \tag{2}$$

Ježto nebylo o poloze bodu f nic zvláštního supponováno, platí rovnice (2) pro libovolné k. Lze tudíž dosaditi za k do (2) $k + \Delta k$, kde Δk značí libovolnou differenci pořadnice.



Obr. 1.

Uspořádáme-li novou rovnici se zřetelem k rovnici (2), obdržíme

$$(x + y\sqrt{3} - 1)\,k + x\sqrt{3} - y - \sqrt{3}$$
$$+ (x + y\sqrt{3} - 1)\,\Delta k = 0,$$

čili

$$(x + y\sqrt{3} - 1)\,\Delta k = 0, \tag{3}$$

při čemž mlčky supponováno, že $\Delta k \gtrless 0$.

Lze tudíž differencí Δk rovnice (3) děliti, což vede k rovnici od k, t. j. od posice vrcholu f na ose $x = 0$ neodvislé:

$$x + y\sqrt{3} - 1 = 0. \qquad (4)$$

Rovnice tato repraesentuje geometrické místo třetího vrcholu $c(x, y)$ systému, totiž paprsek $\overline{eb}$.

K témuž výsledku bylo lze dojíti přímo differenciací rovnice (2) dle proměnného parametru k.

Směrnice hledaného místa jest

$$A = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Jest tudíž úhel jím sevřený s positivním směrem osy $y = 0$ roven 150°, nebo s negativním 30°. Průsečík paprsku (4) s osou $x = 0$ jest bod $g\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, tak že $\overline{bg} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, což jest poloměr kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku o straně $s_3 = 2$, t. j. rovné dvojnásobné dané úsečce, jakožto straně hledaného pravidelného 7-úhelníka.

Středem h kružnice opsané o pravidelný 7-úhelník jest tedy průsečík kruhových oblouků opsaných z koncových bodů úsečky $\overline{ab}$ poloměrem $r = \overline{bg}$.

2. Uvedenou konstrukci lze rázem zjednodušiti dle právě vyloženého a to dvojím způsobem:

α) Se zřetelem k poloze geom. místa (4),

β) se zřetelem ke vzájemnému vztahu strany pravidelného 7-úhelníka a strany rovnostranného trojúhelníka do téže kružnice vepsaného.

Ježto ostrý úhel paprsku (4) s osou úseček je 30°, stačí vztyčiti v koncových bodech dané úsečky $\overline{ab}$ kolmice $Y(x = 0)$, $\overline{bc}(x = 1)$, rozděliti jeden z pravých úhlů baf nebo abc na tři stejné díly a spojiti prvý dílčí bod čítaný od dané úsečky s druhým koncovým bodem. I jest dle předchozího tato spojnice $\overline{bg}$ poloměrem kružnice opsané o hledaný pravidelný sedmiúhelník.

Ježto strana pravidelného sedmiúhelníka jest přibližně polovinou strany rovnostranného trojúhelníka do téže kružnice vepsaného, stačí sestrojiti rovnostranný trojúhelník $aj4$ nad úsečkou $\overline{aj} = 2\overline{ab}$ a opsati kol něho kružnici $K(c, r = \overline{ac} = \overline{bg})$, která jest opsána též pravidelnému sedmiúhelníku.

3. Druhá konstrukce Jardinova pravidelného 7-úhelníka jest zvláštní případ prvé, jakož lze snadno dokázati. Vlastně jsou obě konstrukce jenom zvláštní případy konstrukce obecnější, jakož vysvitne z dalších úvah.

Posune-li se totiž společný vrchol d systému rovnostranných trojúhelníků dfe položených mlčky za základ konstrukcí prvé o úsečku u, a posune-li se současně osa $x = 0$ jakožto geom. místo druhého vrcholu f systému o úsečku $\frac{u}{2}$, zůstává geom. místo třetího vrcholu nezměněno.

Transformační rovnice nového systému souřadnicového jsou

$$\xi = x + \frac{u}{2}, \quad \eta = y.$$

Z obr. 1. plyne pak:

$$\eta = -\left(-\xi - \left(1 + \frac{u}{2}\right)\right)\frac{2k + (2-u)\sqrt{3}}{2 - u - 2k\sqrt{3}}, \tag{5}$$

kde

$$tg\,\varphi = \frac{2k}{2-u}.$$

Po krátké redukci obdržíme z rovnice (5)

$$\left(\xi + \eta\sqrt{3} - 1 + \frac{n}{2}\right)k + (2 - u\sqrt{3})\,\xi - 2u\eta - 2$$
$$+ u + u\sqrt{3} - \frac{u^2}{2}\sqrt{3} = 0,$$

čili stručně

$$F = 0. \tag{6}$$

Substituujeme-li do (6) $k + \varDelta k$ za k a dělíme-li ji differencí $\varDelta k$, obdržíme se zřetelem k poslednímu výsledku rovnici:

$$\xi + \eta\sqrt{3} - 1 + \frac{u}{2} = 0. \tag{7}$$

Substituce hodnot plynoucích z transformačních rovnic:

$$x = \xi - \frac{u}{2}, \quad y = \eta$$

vede k rovnici

$$x + y\sqrt{3} - 1 = 0,$$

která jest identická s rovnicí (4). Jest tudíž geom. místo třetího vrcholu rovnostranných trojúhelníků nového systému identické s geom. místem $\overline{bg}$ systému původního. Na obr. 1.:

$$\overline{dp} = u, \quad \overline{ai} = \frac{u}{2}, \quad \overline{iq} \equiv H, \quad X \equiv \Xi,$$

$$\overline{pq} = \overline{qo} = \overline{op},$$

a vrchol o jest na $\overline{be}$, t. j. na paprsku (4).

V druhé konstrukci Jardinově jest $u = 1 = \overline{da}$ (viz obr. 1.), t. j. rovno dané úsečce $\overline{ab}$, a osa $\xi = 0$, t. j. geom. místo druhého vrcholu trojúhelníků anl, jest tudíž symmetrálou její, neboť

$$\overline{da} = u = 1, \quad \overline{am} = \overline{mb} = \frac{u}{2}, \quad mn \perp \overline{ab}.$$

Vrchol l jest zase na $\overline{bc}$, t. j. na paprsku (4).

Jest tedy kružnice $K(h, r = \overline{ah} = \overline{bh})$ identickou s kružnicí plynoucí z prvé Jardinovy konstrukce.

4. Rovnice

$$x + y\sqrt{3} = 0$$

podává geometrické místo třetího vrcholu systému avz v případě, když se posune společný jeho vrchol o $\overline{da} = u = 1$, kdežto osa $x = 0$, t. j. geom. místo druhého vrcholu zůstává nezměněno. Rovnice tato repraesentuje paprsek $\overline{az}$ s původním $\overline{be}$, rovnoběžný a procházející počátkem systému souřadnicového, t. j. pevným vrcholem a. Jest to známá konstrukce k sestrojování úhlu 30°.

5. Zajímavo jest vyšetřiti ještě dráhu druhého vrcholu jednoho ze systému rovnostranných trojúhelníků, na př. pqo, v případě, kdy tento vyšed z počáteční polohy $d(-1, 0)$, pohybuje se rovnoměrně co do velikosti neproměnně tak, že jeho prvý vrchol p pošinuje se rychlostí dvojnásobnou proti rychlosti druhého vrcholu q po ose x-ové, kdežto třetí vrchol o opisuje paprsek (4).

Z konstrukce patrno, že tento vrchol jest průsečíkem

$$x = \frac{u}{2}$$

a kružnice

$$(x - u + 1)^2 + y^2 = s^2,$$

kde u značí dráhu vrcholu p měřenou od bodu d (viz obr. 1.), a s stranu rovn. trojúhelníka.

Vyloučením proměnného parametru u z obou rovnic obdržíme rovnici

$$(x - 1)^2 + y^2 = s^2$$

jakožto geometrické místo vrcholu q. Patrno tedy, že vrchol q pohybuje se současně po kružnici $K(b(1, 0), s)$ opsané z průsečíku b paprsku (4) s osou x-ovou poloměrem rovným straně s trojúhelníka.

Úloha jest dvojznačnou; daným podmínkám vyhovují totiž vždy dva trojúhelníky v každé posici. Geometrická místa vrcholů q všech trojúhelníků tvoří tedy systém souřadných kružnic qq opsaných z bodu b poloměrem rovným vždy straně korrespondujícího trojúhelníka.

6. Zajímavá vlastnost vytčené soustavy rovnostranných trojúhelníků vyjádřená rovnicí (4) jest základem Jardinových konstrukcí pravidelného sedmiúhelníka, ač, jak bylo již ukázáno, bezpodstatně. Jardin sám vlastností těch aspoň v obecné formě vědom si nebyl, jinak by nebyl mohl uváděti svoje konstrukce jakožto specificky různé beze všeho theoretického výkladu.

7. Konstrukce právě uvedené nemohou býti geometricky přesné, jakož dokázal o podobných konstrukcích Gauss. Oceňme však stupeň přesnosti, kterou tato konstrukce pravidelného 7-úhelníka poskytuje.

Poloměr opsané kružnice o takto sestrojený pravidelný 7-úhelník jest, jakož bylo již dříve stanoveno:

$$r = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,a = 1{\cdot}1547005\ldots a,$$

kde a jest daná strana.

Středový úhel α stanovíme z pravoúhlého trojúhelníka, jehož přeponou jest průměr $2r$, kratší odvěsnou daná strana a protějším úhlem k této obvodový úhel $\frac{\alpha}{2}$. Platí tedy relace:

$$1 = \frac{4}{3}\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}, \quad \text{čili} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

odkudž plyne

$$\alpha = 51^{\circ}19'6''.$$

Jinak středový úhel

$$\alpha' = \frac{2\pi}{7} = 51^{0}25'43'',$$

což jest hodnota přesnější.

Přesnější hodnota poloměru r' plyne z relace

$$1 = 2r' \sin 25^{0}42'51,$$

odkudž stanovíme, že

$$r' = 1{\cdot}152394 \ldots a.$$

Konstrukce Jardinova poskytuje tudíž poloměr opsané kružnice s chybou

$$r - r' = 0{\cdot}0023065 \ldots a,$$

příslušný k ní středový úhel s chybou

$$\alpha - \alpha' = - 6'37'',$$

vnitřní úhel tedy se stejnou chybou, ale positivní.

Jedná-li se o praktické použití, lze se touto přesností spokojiti.

8. *Jest sestrojiti nad danou stranou pravidelný devítiúhelník. (Viz obr. 2.) Sestrojme nad danou stranou $\overline{ab}$ rovnostranný trojúhelník, jehož vrcholem jest bod c. Veďme dále symmetrálu $\overline{cd}$ strany $\overline{ab}$. Opišme pak z vrcholu e kružnici poloměrem $\overline{ac} = \frac{\overline{ab}}{2}$, která protíná symmetrálu v bodě f. Bod f jest středem kružnice opsané kol pravidelného devítiúhelníka.*

Konstrukce pravidelného devítiúhelníka nemůže býti zase než přibližnou.

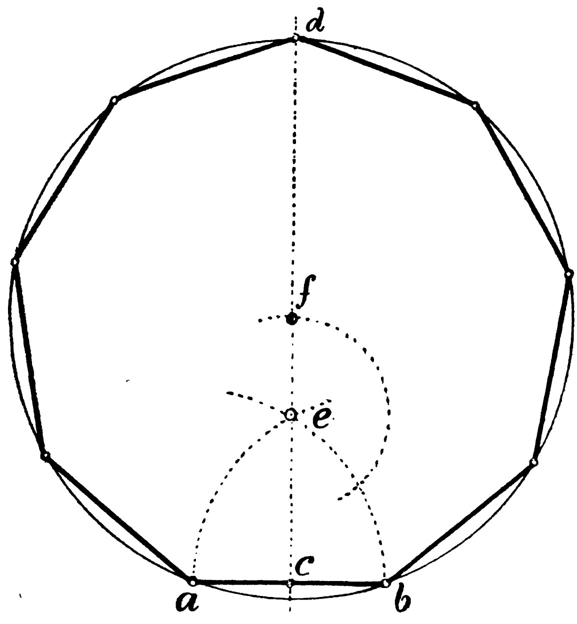
Lze snadno dokázati, že právě uvedená konstrukce jest základem úměrnosti prostých úhlů trojúhelníka s protějšími jeho stranami místo věty sinusové. Neboť $\sphericalangle bae = 60^0$, a ježto vnitřní úhel pravidelného devítiúhelníka měří $\frac{7\pi}{9} = 140^0$, a $\sphericalangle baf$ jest jeho polovinou, musil by v přesné konstrukci $\sphericalangle eaf = 10^0$, a $\sphericalangle afe = 20^0$, ježto $\sphericalangle aef = 150^0$. Strana $\overline{ae} = 2 \,.\, \overline{ef}$ dle konstrukce, pročež tvrzení hořejší jest správné. Ježto úhly 10^0 a 20^0 jsou značné, nelze akceptovati hořejší vztah mezi stranami a úhly.

Abychom určitěji posoudili stupeň přesnosti této konstrukce, uvažme, že $\overline{cf} = \overline{ce} + \overline{ef} = \overline{ce} + \overline{ac} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})\, a,$

a

$$\overline{af} = r = a \sqrt{\frac{1}{4}(1 + 1 + 3 + 2\sqrt{3})}$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{3}} = 1{\cdot}4466 \ldots a,$$



Obr. 2.

čili přesněji

$$r' = \frac{1}{2 \sin 20^0} = 1{\cdot}46112 \ldots a;$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2r} = \frac{1}{2{\cdot}90932},$$

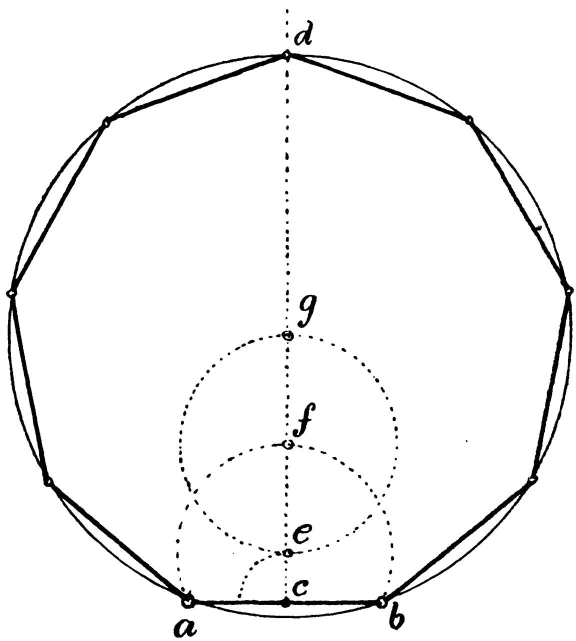
odkudž plyne, že $\alpha = 40^0\, 12'\, 28''$.

Konstrukce Jardinova poskytuje tudíž poloměr kružnice opsané pravidelnému devítiúhelníku s chybou

$$r - r' = -0{\cdot}00646 \ldots a$$

a příslušný k ní středový úhel s chybou

$$\alpha - \alpha' = 12' 28''.$$



Obr. 3.

9. *Jiná konstrukce.* (*Viz obr. 3.*) *Sestrojme symmetrálu* $\overline{cd}$ *strany* $\overline{ab}$ *a učiňme* $\overline{ce} = \frac{\overline{ab}}{4}$, $\overline{ef} = \overline{fg} = \overline{ea}$. *Jest pak g středem kružnice opsané kol pravidelného devítiúhelníka.*

Z obr. patrno, že

$$\overline{ce} = \frac{a}{4}, \ \overline{ef} = \overline{fg} = \overline{ea} = \frac{\sqrt{5}}{4};$$

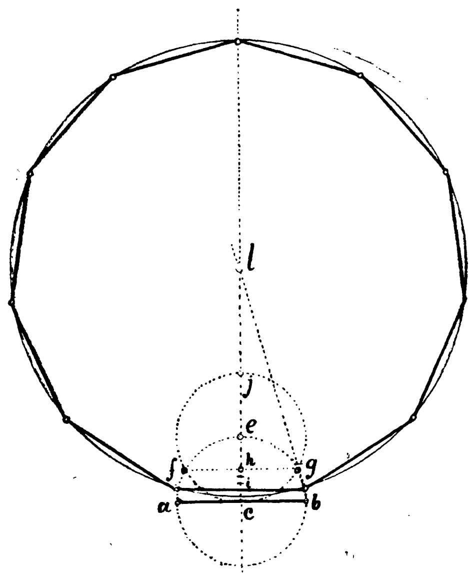
pročež

$$r = \frac{a}{4}\sqrt{25 + 4\sqrt{5}} = 1\cdot4672 \ldots a,$$

$$sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2r} = \frac{1}{2\cdot9344},$$

odkudž

$$\alpha = 39^0 50' 58''.$$



Obr. 4.

Poskytuje tudíž druhá konstrukce Jardinova poloměr kružnice opsané pravidelnému devítiúhelníku s chybou:

$$r - r' = 0\cdot0053 \ldots a,$$

a příslušný středový úhel ku straně s chybou

$$\alpha - \alpha' = - 9' 2''.$$

Patrno, že druhá konstrukce jest přesnější. V praksi zase vedou obě konstrukce k výsledku uspokojivému.

10. *Pravidelný jedenáctiúhelník.* (*Viz obr. 4.*) *Konstrukce: Veďme symmetrálu $\overline{cl}$ dané úsečky $\overline{ab}$. Z bodu c opišme kružnici*

abgef, která protíná symmetrálu $\overline{cl}$ *v bodě e. Z tohoto bodu opišme týmž poloměrem kružnici cgjf, která protíná prvou kružnici v bodech f a g. Spojnice* $\overline{fg}$ *a symmetrála* $\overline{cl}$ *se protínají v bodě h, spojnice* $\overline{bg}$ *a* $\overline{ce}$ *se protínají v l. Rozdělíme-li ještě* $\overline{ch}$ *na 5 stejných dílů, takže* $\overline{ci} = \frac{1}{5}\overline{ch}$, *jest l středem* $\overline{li}$ *poloměrem kružnice opsané kol pravidelného jedenáctiúhelníka, sestrojeného nad danou stranou* $\overline{ab}$.

Abychom ocenili stupeň přesnosti uvedené konstrukce pravidelného jedenáctiúhelníka, volme danou úsečku $\overline{ab}$ v ose x-ové, symmetrálu její pak $\overline{cb}$ považujme za osu y-ovou. Vezměme jako dříve danou úsečku za jednotku. Opišme z počátku $c(0, 0)$ poloměrem rovným $\frac{1}{2}$ kružnici

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4},$$

jejíž průsečíky s osou y-ovou jsou body $\left(0, \pm\frac{1}{2}\right)$ Z bodu $e\left(0, \frac{1}{2}\right)$ jako středu opišme znovu týmž poloměrem kružnici

$$x^2 + y^2 - y = 0.$$

Průsečíky této kružnice s přímkou $y = \frac{1}{4}$ jsou body

$$\left(\pm\frac{1}{4}\sqrt{3}, \frac{1}{4}\right).$$

Rovnice paprsku $\overline{bl}$ zní pak:

$$x(2 + \sqrt{3}) + y = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Průsečík jeho s osou y-ovou jest bod l

$$\left(0, 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

Poloměr kružnice opsané kol pravidelného jedenáctiúhelníka jest tedy, klademe-li zase $\overline{ab} = a$

$$r = \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{20}\right)a = 1\cdot8160254\ldots a,$$

a dále

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2r}=\frac{10}{19+10\sqrt{3}}=\frac{16\cdot79492}{61};$$

odtud plyne pak

$$\alpha=31^0 57' 46''.$$

Přesná hodnota středového úhlu jest

$$\alpha'=\frac{2\pi}{11}=32^0 43' 38''.$$

Této hodnotě odpovídá poloměr

$$r=\frac{1}{2\sin 16^0 28' 49''}=1\cdot7747.$$

Poskytuje tudíž konstrukce právě uvedená poloměr opsané kružnice kol pravidelného 11-úhelníka s chybou

$$r-r'=0\cdot0413\ldots a,$$

a středný úhel s chybou

$$\alpha-\alpha'=-45' 52''.$$

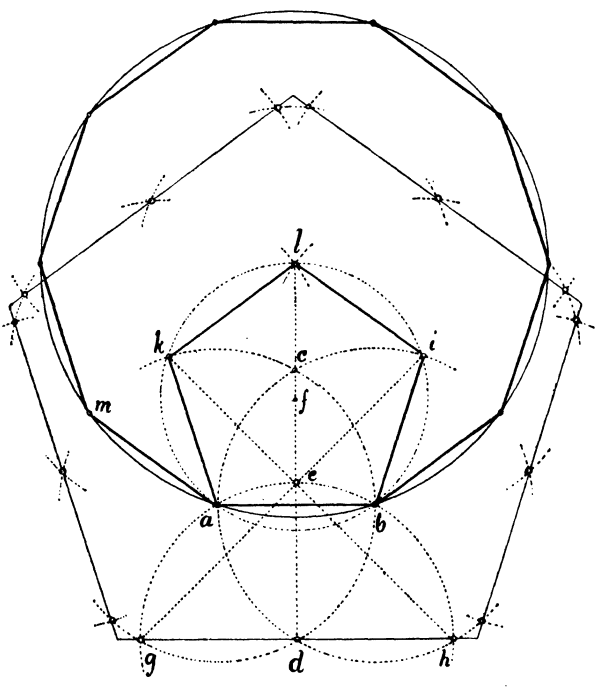
11. V rukopise nalézá se též zajímavá přibližná konstrukce pravidelného pěti-, resp. desetiúhelníka. Pravidelný pěti-, resp. desetiúhelník lze ovšem sestrojiti geometricky přesně. Nicméně obě tyto konstrukce mají pro praksi tu důležitost, že lze vytčené obrazce pohodlně sestrojiti jedním rozevřením kružidla, tak že chyba, jíž se zde dopouštíme vědomě, rovná se více méně chybě, jíž se dopouštíme částečně nevědomě při přesné konstrukci několikerým rozevřením kružidla.

Abychom sestrojili pravidelný pětiúhelník nad danou úsečkou $\overline{ab}$ (viz obr. 5.), opišme z koncových bodů a, resp. b kružnice $K(a$, resp. $b, \overline{ab})$. Průsečíky obou kružnic jsou body c, d. Podobně opišme z průsečíku d kružnici $K(d, \overline{ab})$, která protíná dříve sestrojené kružnice v bodech g, h, paprsek $\overline{cd}$ pak v bodě e. Paprsky $\overline{he}, \overline{ge}$ protínají kružnice dbc, resp. dai v bodech k, resp. i. Konečně kružnice $K(k$, resp. $i, \overline{ab})$ protíná osu $\overline{cd}$ v bodě l. Pak jest mnohoúhelník $abilka$ přibližně pravidelný pětiúhelník.

Z konstrukce plyne, že jsou všecky strany právě sestrojeného pětiúhelníka stejné. Lze však snadno počtem zkonstatovati, že úhly nejsou stejné, čili že onen pětiúhelník blíží se jen pravidelnému.

Za tím účelem položme vrchol b do orthogonálního systému souřadnicového a stranu $\overline{ab}$ do osy x-ové. Pro jednoduchost supponujme jako dříve, že $\overline{ab} = 1$. I jest pak kružnice $K(b, \overline{ab} = 1)$ stanovená středovou rovnicí

$$x^2 + y^2 + 1,$$



Obr. 5.

paprsek $\overline{cd}$ rovnicí

$$2x + 1 = 0,$$

tak že průsečíky jich c, resp. d jsou body

$$\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

Kružnice $K(d, ab = 1)$ jest pak dána rovnicí

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = 1,$$

paprsek $\overline{gd}$

$$2y + \sqrt{3} = 0,$$

průsečíky jich g, resp. h jsou tedy body

$$\left(-\frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \text{ resp. } \left(\frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

Paprsek $\overline{gi}$ svírá s osou x-ovou $\sphericalangle 45^0$, tak že směrnice jeho jest $tg\,\varphi = tg\,45^0 = 1$, kde $\varphi = \sphericalangle dge$; pročež jeho rovnice jest

$$2x - 2y + 3 - \sqrt{3} = 0.$$

Průsečík i kružnice $K(d, \overline{ab} = 1)$ s paprskem $\overline{gi}$ jest tedy bod

$$\left(\frac{\sqrt{6\sqrt{3} - 4} + \sqrt{3} - 3}{4}, \ \frac{\sqrt{6\sqrt{3} - 4} - (\sqrt{3} - 3)}{4}\right).$$

Jest tudíž směrnice paprsku $\overline{bi}$

$$tg\,\psi = \frac{3 - \sqrt{3} + \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{-(3 - \sqrt{3}) + \sqrt{6\sqrt{3} - 4}},$$

je-li ψ úhel sevřený paprskem $\overline{bi}$ a osou x-ovou.

Logarithmicky stanovíme, že $\psi \doteq 71^0 38' 7''$.

Jest tudíž jeho výplněk $\sphericalangle abi$, vnitřní to úhel sestrojeného pětiúhelníka, roven $180^0 - 71^0 38' 7'' = 108^0 21' 53''$.

Ježto pak vnitřní úhel pravidelného pětiúhelníka měří 108^0, obnáší chyba $21' 53''$, a konstrukce pravidelného pětiúhelníka jest jen přibližná, jakož bylo tvrzeno. Jsouť úhly nestejné.

Na obr. přirýsován ještě druhý přibližně pravidelný pětiúhelník.

12. *Pravidelný desetiúhelník nad danou úsečkou jakožto jeho stranou lze sestrojiti pomocí konstrukce pravidelného pětiúhelníka. Sestrojíme nejprve nad danou úsečkou pravidelný pětiúhelník a opíšeme pak z protějšího vrcholu poloměrem rovným úhlopříčce pětiúhelníka kružnici. Pak jest tato kružnice pravidel-*

nému desetiúhelníku opsána. Neboť opíšeme-li pravidelnému pětiúhelníku kružnici, jest středový úhel nad jeho stranou roven 72°, a tudíž obvodový úhel nad touže stranou roven 36°, což však jest zároveň středový úhel nad stranou pravidelného desetiúhelníka. Jest tedy skutečně vrchol pravidelného pětiúhelníka středem kružnice opsané pravidelnému 10-úhelníku sestrojenému nad danou úsečkou. Ježto však konstrukce pravidelného pětiúhelníka jest jenom přibližná, jest též konstrukce pravidelného desetiúhelníka jenom přibližná. (Viz obr. 5.)

O předpovídání povětrnosti.

Se stanoviska historického zpracoval **Jos. Krkoška**, prof. v Pelhřimově.

Otázka povětrnostní zaměstnávala lidi od dob nejstarších; jsou úkazy v ovzduší se odehrávající svojí povahou i svými mnohonásobnými vlivy tak okázalé, často až ohromující, že velmi záhy zaujaly pozornost a vedly k přemýšlení o své podstatě a příčinách. Tento předčasný zájem nebyl však nauce povětrnostní nikterak ku prospěchu. Jelikož daleko nebylo ještě dosti sil ani prostředků k věcnému vystižení nadmíru složitých záhad povětrnostních, odbočilo se za řešením jich na cesty nepravé, jež pravidelný vývin nauky povětrnostní po dlouhé věky zdržovaly. Zatím co jiné nauky přírodní stály již na pevných základech a utěšeně se vzmáhaly, zahaleny byly úkazy povětrnostní v spletité předivo pověr a bludů, že od lidí soudných i o možnosti nějaké nauky povětrnostní po způsobu jiných věd přírodních se pochybovalo. Ještě koncem 18. století — sto dvě léta po objevení Newtonova zákona gravitačního, jenž umožňoval astronomii do podrobností sledovati pohyby těles nebeských a předvídati jejich dráhy na mnohá tisíciletí — vynikající učenec Ant. Pilgram po důkladném šetření o úkazech povětrnostních*) dospívá k závěru: „... a co možno na konec z toho souditi? — Že zima jest studenější nežli léto. To jest jediné, co dá se s jakous jistotou tvrditi ...“; usuzuje pak, že v dějech povětrnostních není té

---

*) Ant. Pilgram, Untersuchungen über das Wahrscheinliche der Wetterkunde durch vieljährige Beobachtungen. Wien 1788, p. 604.