Václav Láska

Příspěvek ke studiu zákonitosti spekter čárových

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 3-4, 407--412

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122923

vrchová energie jedničky plošné

$$76 \frac{erg}{cm^2} + \frac{273 \,.\, 0{\cdot}15}{4{\cdot}2 \,.\, 10^7} \text{ gramm-kalorií} = (76 + 41) \frac{erg}{cm^2},$$

tedy daleko větší než povrchové napětí. Změníme-li u $\frac{dF}{dT}$ znamení tak, aby vzrůstu T odpovídal vzrůst F, můžeme správně tvrditi, že je energický obsah plošné jedničky povrchu kapaliny roven

$$E = F - T \frac{dF}{dT}.$$

Povrchové napětí je tedy rovno *volné energii* jedničky plošné.

Příspěvek ke studiu zákonitosti spekter čárových.

Podává **V. Láska.**

Stavbu spekter lze studovati dvojím způsobem, jednak a priori*) theoreticky a dále a posteriori empiricky. Volíme-li cestu druhou, snadnější, ale i nebezpečnější, pak úkolem jest vyhledávati zákonitosti jednotlivých spekter a studovati vztahy jich charakteristik, t. j. funkcí tyto zákony vyjadřujících.

Nehledě k theoretické důležitosti jest studium zákonitosti spekter vděčným thematem pro applikovanou mathematiku již také proto, poněvadž základy tohoto studia, t. j. čísla délek vln, patří mezi nejpřesněji známé veličiny fysikální. Vzorce, vyhovující empirii až k úrovni přesnosti získané měřením, budou tudíž ideálným příkladem approximace.

Východiskem všech novějších empirických prací jest interpolační vzorec *Balmerův* odvozený r. 1885. Vzorec ten nazývá

---

*) Prvým, který se stanoviska novější theorie problém tento s úspěchem řešil, byl prof. Dr. *Fr. Koláček* ve svém pojednání: Ueber elektrische Oscillacionen in einer leitenden und polarisationsfähigen Kugel. Ein Beitrag zur Theorie der Spektra einfachster Beschaffenheit. Wied. Annal. 58 (1896). Literaturu předmětu (až do r. 1901) podává *Kaiser* ve své příručce: Handbuch der Spektroskopie II. Band. Srovnej též pojednání p. *Nováka* v Čas. r. 35.

se také zákonem. Narýsujeme-li si však geometrickou křivku, jejíž jest algebraickým výrazem, vidíme, že jen jedna její větev přichází k platnosti a ne celá křivka, jak toho pojem zákona vyžaduje. Proto nazýváme vzorec ten interpolačním.

Kaiser a *Runge*, *Rydberg* a nejnověji *Ritz* v pojednání „Zur Theorie der Serienspektren" uveřejněném v *Drudeho* Annalen r. 1903 tvoří as skupinu nejvýznačnějších prací toho druhu. Vzorce odvozené posledním jsou snad nejvíce přiléhající, ale nevyhovují, jak na př. velká difference u helia a jiných prvků dokazuje, ještě ve všech směrech.

Zevšeobecnění vzorce Balmerova děje se obyčejně přidáváním nových stálých, jichž oprávněnost se dokazuje a posteriori. Že postup ten má své slabé stránky, poznali již Kaiser a Runge (Sr. l. c. str. 514a n.).

V následující stati pokusil jsem se o jinou cestu. Východiskem jest geometrická interpretace vzorce Balmerova. Vzorec ten lze považovati za nejjednodušší tvar jisté příbuznosti geometrické, která zevšeobecněna poskytuje slibné vzorce. V této předběžné stati omezuji se na hlavní serii čar a na několik málo numerických údajů, ponechávaje si všestranné propracování látky na dobu pozdější. Veškeré výpočty počítány jako příklady, což pro orientaci stačí.

Buďtež dány dvě soustavy hodnot

$$(U) = u_1, u_2, u_3, \ldots$$
$$(V) = v_1, v_2, v_3, \ldots$$

představující empirickou závislost veličiny v od argumentu u a předpokládejme, že existuje funkce $f \equiv f(u, v) = 0$.

Stupňujeme-li veličinami u a v dvě přímky, lze tytéž vždy považovati za příbuzné v širším slova smyslu.*) Tvar funkce f jest určen onou transformací, která převádí soustavu (U) v soustavu (V). Jednoduchý případ jest následující:

Budiž dána v soustavě pravoúhlých souřadnic ellipsa

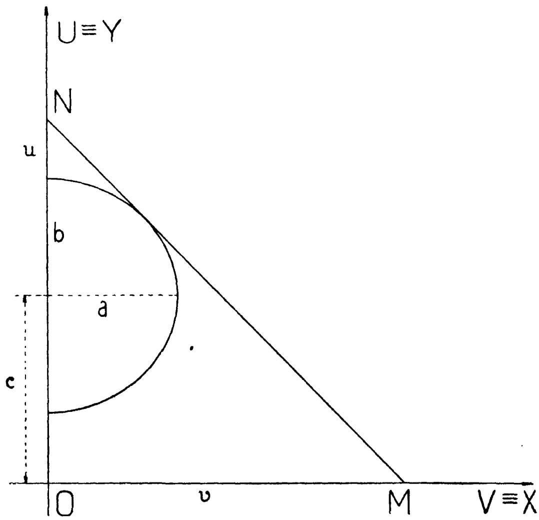
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-c)^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

*) Srov. E. Weyr: Die Elemente der projektiv. Geometrie str. 62.

Osa X budiž osou V a osa Y zároveň osou U. Řadu argumentů volme tak, aby

$$v_k = k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Hodnoty u buďtež určeny průsečíky tečen z bodů M s osou $Y \equiv U$. Bude tudíž (viz obr.) na př. pro $v = OM$, příslušně $u = ON$.



Obr. 1.

Snadno se přesvědčíme, že platí tu vztah

$$v = \frac{au}{\sqrt{u^2 - 2uc + c^2 - b^2}}. \tag{2}$$

Jest to rovnice svrchu uvedené ellipsy v souřadnicích dotykových.

Položme $\qquad b = c$

a obdržíme

$$u = \frac{2bv^2}{v^2 - a^2}. \tag{3}$$

Vzorec (3) vyjadřuje dle Balmera (1885) souvislost čar vodíkových s jich polohou ve vidmu. Tato geometrická příbuznost není nahodilá, ale úzce souvisí s povahou vidma, neboť se nemění při změně místa jednotlivých čar, na př. zvýšeným tlakem. V důsledku toho lze očekávati, že i všeobecnější rovnice (2) se uplatní.

Položme

$$u = \frac{1}{n}, \; v = k, \; k = 1, 2, \ldots,$$

kde n značí tak zvaný kmitočet, bude

$$1 - 2nc + (c^2 - b^2)\, n^2 = \frac{a^2}{k^2}. \tag{4}$$

Rovnici tu zevšeobecníme zavedením souřadnice $\varrho = v_0$ bodu, od kterého k počítáme.

Máme tudíž

$$1 - 2cn_k + (c^2 - b^2)\, n_k^2 = \frac{a^2}{(k + \varrho)^2} \tag{5}$$

a zároveň v limitě pro $k = \infty$

$$1 - 2cn_\infty + (c^2 - b^2)\, n_\infty^2 = 0. \tag{6}$$

Z obou obdržíme methodou neurčitých násobků kladouce $k = 1, 2, 3$

$$\frac{n_3 - n_2}{n_1 - n_\infty} \frac{1}{(1 + \varrho)^2} + \frac{n_1 - n_3}{n_2 - n_\infty} \frac{1}{(2 + \varrho)^2} + \frac{n_2 - n_1}{n_3 - n_\infty} \frac{1}{(3 + \varrho)^2} = 0. \tag{7}$$

Tím jest určeno ϱ.

Dále jest:

$$\frac{n_k - n_2}{n_1 - n_\infty} \frac{1}{(1 + \varrho)^2} + \frac{n_1 - n_k}{n_2 - n_\infty} \frac{1}{(2 + \varrho)^2} + \frac{n_2 - n_1}{n_k - n_\infty} \frac{1}{(k + \varrho)^2} = 0 \tag{8}$$

rovnice určující libovolný kmitočet n_k a představující zevšeobecnění vzorce Balmerova.

Z rovnic (5) a (6) obdržíme dále

$$n_k = n_\infty - \frac{a^2 n_\infty}{(k + \varrho)^2 \{1 + n_k (b - c)\}}, \tag{9}$$

tudíž approximativně vzorec Ritzův.

Přibližnou hodnotu veličiny ϱ obdržíme buď ze vzorce Rydbergova

$$(n_k \quad n_\infty)(k+\varrho)^2 = 109675 \tag{10}$$

aneb také ze vzorce (7). Jest totiž identicky

$$(n_3 - n_2) + (n_1 - n_3) + (n_2 - n_1) = 0$$

a zároveň approximativně dle vzorce Rydbergova

$$(n_1 - n_\infty)(1+\varrho)^2 = (n_2 - n_\infty)(2+\varrho)^2$$
$$= (n_3 - n_\infty)(3+\varrho)^2.$$

V důsledku toho dává vzorec (7)

$$\frac{1}{1+\varrho} = \sqrt{\frac{n_3 - n_\infty}{n_1 - n_\infty}} - \sqrt{\frac{n_2 - n_\infty}{n_1 - n_\infty}}. \tag{11}$$

Příkladem budiž spektrum helia.

Zde jest

$n_1 = 4857{\cdot}3$, $n_2 = 19931{\cdot}8$, $n_3 = 25214{\cdot}5$, $n_\infty = 32031{\cdot}5$.

Z rovnice (7) obdržíme dále

$$\varrho = 1{\cdot}0191$$

a tím i

$$\frac{n_k - 19931{\cdot}8}{27174{\cdot}2}\,\frac{1}{(1+\varrho)^2} + \frac{4857{\cdot}3 - n_k}{12099{\cdot}7}\,\frac{1}{(2+\varrho)^2}$$
$$+ \frac{15074{\cdot}5}{n_k - 32031{\cdot}5}\,\frac{1}{(k+\varrho)^2} = 0.$$

Abychom obdrželi vzorec podávající n_k přímo, použijeme rovnice (9), v které

$$a^2 n_\infty = -f_2 \frac{1 - \dfrac{n_2}{n_1}}{1 - \dfrac{n_2 f_2}{n_1 f_1}}$$

$$b - c = -\frac{1}{n_1} \frac{1 - \dfrac{f_2}{f_1}}{1 - \dfrac{f_2 n_2}{f_1 n_1}}$$

a zároveň

$$f_k = (n_k - n_\infty)(k+\varrho)^2.$$

Vzorec pro helium můžeme pak psáti:

$$n_k = 32031{\cdot}5 - \frac{[5{\cdot}0451004]}{(k+\varrho)^2 \{1 + [3{\cdot}4740035 - 10]\, n_k\}},$$

kde čísla v závorkách [ ] jsou logarithmy.

Následující tabulka podává početní výsledky:

k	Pozorování	Počet	Rozdíl
1	4857·3	4857·3	0·0
2	19931·8	19931·8	0·0
3	25214·5	25214·5	0·0
4	27664·1	27663·4	— 0·7
5	28996·4	28995·5	— 0·9
6	29800·8	29799·5	— 0·3
7	30323·0	30321·7	— 1·3
8	30681·8	30680·0	— 1·8
9	30938·3	30936·2	— 2·1
10	31128·1	31126·2	— 1·9
11	31272·3	31271·1	— 1·2
12	......	......	......
13	(31471·3)	31472·2	(+ 0·9)

Veličina n_∞ vzata, jak udává Ritz. Rydberg má hodnotu něco větší a sice $n_\infty = 32032{\cdot}6$ a jak z rozdílů tabulky jest patrno, přesnější.

Zavedením této konstanty obdrželi bychom n přesně na jednotku. Ještě větší přesnost dalo by ovšem vyrovnání methodou nejmenších čtverců, po kterém rozdílová řada přímo volá. To jest ale věcí vedlejší. Jde hlavně o studium vztahů veličin

$$a\; b\; c\; \varrho \text{ a } n_\infty$$

pro soubor všech známých prvků na základě užité geometrické transformace a o rozdružení čar dosud ve vzorce nepojatých.