Augustin Žáček

Odvození Einsteinova addičního theoremu pro skládání rychlostí v případě rychlostí parallelních

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 3-4, 538--541

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122919

Bylo již řečeno a dá se dokázati velmi jednoduše ze vzorce (13), že elektromotorická síla Hallova effektu při tomto uspořádání klesá, vzdalujeme-li se od středu desky. Měříme-li tedy *Koláčkovou* methodou, nutno obě elektrody voliti co možná těsně u sebe, jak již *Novák* [8]) nalezl. Kdybychom je přeložili do primárních elektrod, obdržíme patrně poloviční hodnotu, což měřením potvrdil *Raus* [9]).

Ústav pro theoretickou fysiku c. k. české university, 1911.

Odvození Einsteinova addičního theoremu pro skládání rychlostí v případě rychlostí parallelních.

Dr. **Augustin Žáček.**

Libovolné lineární transformace, jež vyjadřují veličiny x', y', z', t' jako lineární funkce proměnných x, y, z, t a nechávají kovariantní kvadratickou formu

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2,$$

slují transformace Lorentzovy.

Souhrn všech Lorentzových transformací tvoří gruppu; zůstane-li totiž forma

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

kovariantní při lineárním přechodu z proměnných x, y, z, t na x', y', z', t', a rovněž při lineárním přechodu z x', y', z', t' na proměnné x'', y'', z'', t'', zůstane kovariantní také při přímém lineárním přechodu z proměnných x, y, z, t na x'', y'', z'', t''.

A z té okolnosti, že Lorentzovy transformace tvoří gruppu, vyplývá přímo známý Einsteinův vzorec pro skládání rychlostí v případě, že tyto jsou stejného směru.

Zjev odehrávající se v čase t v bodě A o souřadnicích x, y, z trojdimensionálného, pravoúhlého systému souřadnicového můžeme si znázorniti v prostoru čtyřdimensionálním „světovým bodem“ o souřadnicích x, x, z, t. — Jiný souřadnicový systém (x', y', z', t'), jehož osa x'-ová splývá ne-

---

8) *V. Novák*, Časopis pro pěstování mathem. a fysiky, 38, 47. 1908.

9) *F. Raus*, loc. cit. pag. 13.

ustále s osou x-ovou, osa y'-ová jest rovnoběžná s y-ovou, a z'-ová rovnoběžná s osou z-ovou prvého systému, nechť se pohybuje vzhledem k systému (x, y, z, t) rychlostí v směrem osy x-ové. Děj, který v prvém systému byl znázorněn „světovým bodem“ o souřadnicích

$$x, y, z, t,$$

má v pohybujícím se systému souřadnice

$$x', y', z', t'.$$

Ze systému jednoho do druhého přejdeme dle principu relativity speciální Lorentzovou transformací:

$$\begin{aligned} x' &= \beta(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \end{aligned} \tag{1}$$

kde značí

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Tyto transformace tvoří gruppu, t. j. dvě po sobě provedené speciální transformace Lorentzovy lze nahraditi speciální Lorentzovou transformací jedinou.

Systém (x'', y'', z'', t''), jehož osa x''-ová splývá opět s osou x'-ovou, a osy y''-ová resp. z''-ová jsou rovnoběžny s osami y' resp. z', nechť pohybuje se směrem osy x'-ové rychlostí u vztaženou k systému x', y', z', t'. Uvažovaný děj má v tomto systému souřadnice

$$x'', y'', z'', t'',$$

jež dostaneme ze souřadnic

$$x', y', z', t'$$

příslušnou Lorentzovou transformací:

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma(x' - ut') \\ y'' &= y' \\ z'' &= z' \\ t'' &= \gamma\left(t' - \frac{u}{c^2}x'\right), \end{aligned} \tag{2}$$

kde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c_2}}}.$$

Dosadíme-li v těchto vzorcích hodnoty za x', y', z', t' z transformačních vzorců (1), dostaneme vztah mezi x'', y'', z'', t'' a x, y, z, t:

$$\begin{aligned} x'' &= \beta\gamma\left(x - vt - ut + \frac{uv}{c^2}x\right) \\ y'' &= y \\ z'' &= z \\ t'' &= \beta\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x - \frac{u}{c^2}x + \frac{uv}{c^2}t\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Poněvadž tato transformace vznikla složením dvou transformací Lorentzových, jest to opět transformace Lorentzova, t. j. dá se psáti ve tvaru:

$$\begin{aligned} x'' &= \delta(x - wt) \\ y'' &= y \\ z'' &= z \\ t'' &= \delta\left(t - \frac{w}{c^2}x\right), \end{aligned}$$

kde

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}},$$

a kde značí w rychlost systému (x'', y'', z'', t'') vztaženou k systému (x, y, z, t).

A skutečně lze transformace (3) psáti takto:

$$\begin{aligned} x'' &= \beta\gamma\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)\left[x - \frac{v+u}{1 + \frac{uv}{c^2}}t\right] \\ y'' &= y \\ z'' &= z \\ t'' &= \beta\gamma\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)\left[t - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{v+u}{1 + \frac{uv}{c^2}}x\right]. \end{aligned}$$

Konečně máme

$$\beta\gamma\left(1+\frac{uv}{c^2}\right)=\frac{1+\frac{uv}{c^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$=\frac{1+\frac{uv}{c^2}}{\sqrt{\left(1+\frac{uv}{c^2}\right)^2-\left(\frac{u+v}{c}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}\right)^2}},$$

takže transformace (3) dostanou definitivně tvar:

$$x''=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}\right)^2}}\left[x-\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}\,t\right]$$

$$y''=y$$

$$z''=z$$

$$t''=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}\right)^2}}\left[t-\frac{1}{c^2}\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}\cdot x\right],$$

t. j. tvar speciálních transformací Lorentzových, při čemž

$$w=\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}},$$

což jest *Einsteinův vzorec pro skládání parallelních rychlostí.* Při tom ovšem nutno pamatovati, že v vztahuje se k systému (x, y, z, t), u k systému (x', y', z', t'), tedy k systémům různým, vzájemně se pohybujícím. Kdyby obě rychlosti vztahovány byly k témuž systému, platilo by ovšem obyčejné skládání rychlostí $w=u+v$.