Emanuel Klier

Důkaz a zobecnění pravidla Neperova

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 1, D15--D23

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122903

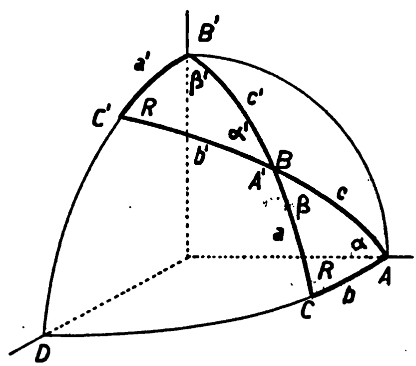
VYUČOVÁNÍ.

Důkaz a zobecnění pravidla Neperova.

Ing. Em. Klier, Plzeň.

V „Časopise pro pěstování matematiky a fysiky" ročník 64, čís. 6 a 8 (1935), uveřejnil p. řed. Vavřinec a p. prof. Friedrich zajímavé poznámky o pravidle Neperově. Snaží se odůvodniti toto pravidlo tak, aby u žáků nevznikl onen nepříjemný dojem, který vyvolává obvyklé sdělení „záhadného" pravidla Neperova.

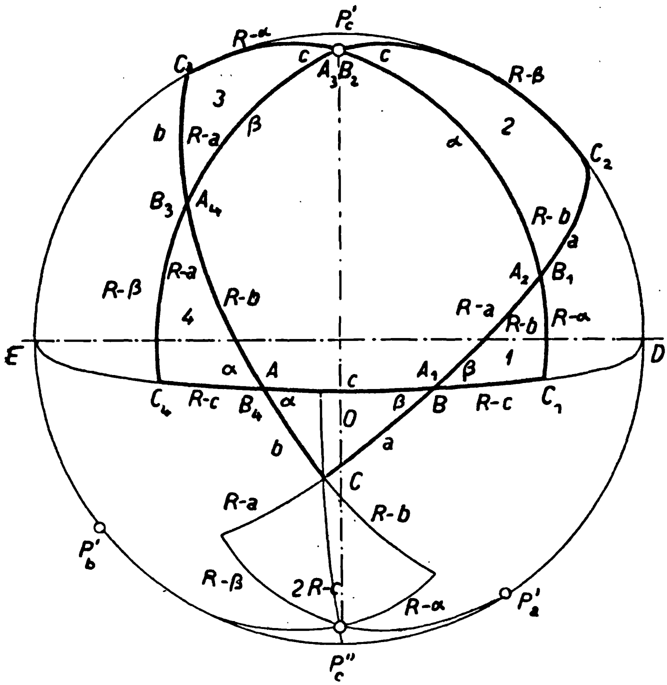
Domnívám se, že jedině správná cesta k odvození a odůvodnění pravidla vede přes Gaussovo pentogramma mirificum. Avšak, pokud je mi známo, nikde není tento obrazec pěti trojúhelníků tak nakreslen a tak domyšlen, aby mohl býti demonstrován na střední škole.



Obr. 1.

Následující řádky mají přesvědčiti, že přehledně nakreslené pentagramma a účelně doplněné je zcela užitečný obrazec, z něhož odůvodnění pravidla Neperova vyplyne téměř pouhým pohledem. Představoval bych si výklad asi takto:

T r o j ú h e l n í k y p ř i ř a z e n é. Kulový oktant je pravostranný trojúhelník sférický s třemi pravými úhly. Z každého jeho vrcholu lze spustiti nekonečně mnoho výšek na protilehlou stranu, neboť každý vrchol je pólem protilehlé strany. Můžeme tedy libovolný sférický pravoúhlý trojúhelník ABC vložiti do oktantu tak, že jeden jeho vrchol splývá s vrcholem oktantu, jedna odvěsna s jednou stranou oktantu a druhá odvěsna s výškou oktantu (obr. 1). Pak tato výška a prodloužená přepona, jakožto jiná výška oktantu, vytvoří nový pravoúhlý trojúhelník $A'B'C'$. Ten se nazývá „při-



Obr. 2.

družený“ k danému trojúhelníku ABC. Pokud se týká označení, užívejme důsledně tohoto: Vrcholy pravých úhlů C, C'. Vrcholu A odpovídá A' shodný s B. Nyní snadno určíme prvky přiřazeného trojúhelníka.

Je zřejmo, že

$$c' = R - a,\ b' = R - c,\ \alpha' = \beta.$$

Dále je $DC' = \alpha$ a tedy $a' = C'B' = R - C'D = R - \alpha$ a podobně $\beta' = CD = R - b$. Z původního trojúhelníka dostaneme tedy přiřazený o společném vrcholu, doplníme-li přeponu a odvěsnu, které mají tento společný vrchol, na pravý úhel.

Tak jako jsme nalezli k trojúhelníku ABC přiřazený $A'B'C'$, tak můžeme k trojúhelníku $A'B'C'$ najíti další přiřazený $A''B''C''$ atd. Jak daleko můžeme takto pokračovati?

Gaussovo pentagramma mirificum. Přeponu daného trojúhelníka ABC nakresleme v rovníku koule. Polem je bod P'-(obr. 2*). Prodlužme přeponu vpravo i vlevo a doplňme ji na obě strany na pravý úhel. Doplníme-li také odvěsny, dostaneme přiřazené trojúhelníky, které označme 1 a 4. Jejich prodloužené odvěsny C_1B_1, C_4A_4 procházejí polem P'_c (jsou to poledníky). Prvky obou trojúhelníků snadno určíme podle pravidel předešlého odstavce a vepíšeme do obrazce. Stejným způsobem sestrojíme, určíme a vepíšeme prvky dalších přidružených trojúhelníků 2 a 3. Tím však je proces ukončen. Tyto poslední trojúhelníky mají totiž společný vrchol, pól P'_c a při něm stejný úhel c. Z toho plyne, že $EC_1 = 180°$, neboli, že prodloužená přepona trojúhelníka 2 splývá s odvěsnou trojúhelníka 3. Poněvadž také $C_4D = 180°$, splývá prodloužená přepona trojúhelníka 3 s odvěsnou trojúhelníka 2. Je tedy přidružený trojúhelník ke 2 sousední trojúhelník 3 a také opačně.

Označíme-li původní trojúhelník ABC jako nultý, dostaneme uvedeným postupem čtyři přiřazené trojúhelníky. Celkem tedy pět trojúhelníků, které tvoří Gaussovo pentagramma mirificum. Tento uzavřený cyklus trojúhelníků má řadu zajímavých vlastností, které lze snadno z obrazce vyčísti. (Na př.: Každá úhlopříčka pětiúhelníku $AA_1A_2A_3A_4$ je úhel pravý.) Všechny trojúhelníky v něm jsou rovnocenné, žádný nemá přednost, každý z nich můžeme považovat za původní a kterýkoliv z nich, na př. k-tý je shodný s $k + 5$-tým.

Základní rovnice. Pro kterýkoliv, na př. k-tý trojúhelník platí prvá věta kosinová

$$\cos c_k = \cos a_k \cos b_k. \tag{1}$$

Obvyklý její důkaz podáme žákům předem. Použijme ji na všechny trojúhelníky pentagrammatu. Tím dostaneme prvou serii rovnic sférické trigonometrie.

Z trojúhelníka 0 dostaneme		$\cos c = \cos a \cos b$
1		$\sin a = \sin \alpha \sin c,$
2		$\cos \alpha = \sin \beta \cos a,$
3		$\cos \beta = \sin \alpha \cos b,$
4		$\sin b = \sin \beta \sin c.$

Znásobíme-li rovnice z trojúhelníka 2 a 3, bude

$$\cos \alpha \cos \beta = \sin \alpha \sin \beta \cos a \cos b,$$

*) Připomínám, že obr. 2 není kreslen přesně, neboť museli bychom kresliti některé partie jako neviditelné, na zadní polokouli. Na účet této nepřesnosti získáváme však přehled; přesnější obrazec ve stereografické projekci podávám dále.

a použitím rovnice z nultého trojúhelníka dostaneme po úpravě druhou větu kosinovou pro pravoúhlé trojúhelníky:

$$\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta. \tag{2}$$

Také tato věta musí platiti pro každý trojúhelník pravoúhlý, na př. k-tý

$$\cos c_k = \operatorname{cotg} \alpha_k \operatorname{cotg} \beta_k.$$

Užijeme-li ji na všechny trojúhelníky pentagrammatu, dostaneme druhou serii rovnic.

Z trojúhelníka	0	dostaneme	$\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta,$
	1		$\sin a = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} \beta,$
	2		$\cos \alpha = \operatorname{cotg} c \operatorname{tg} b,$
	3		$\cos \beta = \operatorname{cotg} c \operatorname{tg} a,$
	4		$\sin b = \operatorname{tg} a \operatorname{cotg} \alpha.$

Pravidlo Neperovo. Obě základní věty, věty kosinové, můžeme pro k-tý trojúhelník napsati takto:

$$\cos c_k = \cos a_k \cos b_k = \operatorname{cotg} \alpha_k \operatorname{cotg} \beta_k. \tag{3}$$

Podle toho, jak byly trojúhelníky sestrojovány, nebo pohledem na obr. 2 shledáme, že platí:

$$a_k = R - c_{k+1},\ b_k = R - c_{k-1},\ \alpha_k = c_{k+2},\ \beta_k = c_{k-2}. \tag{4}$$

Dosazením těchto vztahů do (3) dostaneme konečný tvar:

$$\cos c_k = \cos c_{k+1} \cos c_{k-1} = \operatorname{cotg} c_{k+2} \operatorname{cotg} c_{k-2}. \tag{5}$$

Délky stran pětiúhelníka, tvořeného přeponami přidružených trojúhelníků, nebo pětiúhelník sám, toť kruhové (pozměněné) schema Neperovo a rovnice (5) vyjadřuje toto pravidlo:

Napišme velikosti přepon, nebo, což je totéž: prvky daného trojúhelníka do pětiúhelníkového schematu, tak jak se v obrazci vyskytují

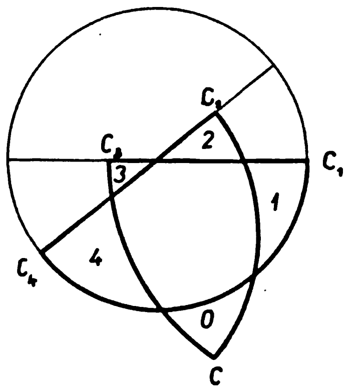
$$\begin{array}{ccc} \beta & & \alpha \\ R-b & & R-a \\ & c & \end{array}$$

Pak kosinus libovolného prvku (jakožto přepony c_k) rovná se [podle (5)] součinu sinů přilehlých prvků (c_{k+1}, c_{k-1}) nebo součinu kotangent protilehlých prvků (c_{k+2}, c_{k-2}).

Tím je pravidlo Neperovo odůvodněno a jeho geometrický podklad objasněn.

Obr. 3 podává Gaussovo pentagramma ve stereografické projekci. (Koule z obr. (2) promítnutá z pólu P''_c do tečné roviny v pólu P'_c.)

Doplnění pentagrammatu. Při odvozování pentagr. vyšli jsme od vrcholů A, B a prodlužovali jsme strany a, b. Bylo to proto, že odvěsny a, b jsou výškami trojúhelníka. Třetí výška příslušná k vrcholu C, rozdělí daný trojúhelník na dva pravoúhlé, v nichž odvěsny a, b jsou přeponami. Podle pravidel prvého odstavce sestrojme k těmto trojúhelníkům přidružené přes vrchol C a k těm další. Tím dospějeme jednak k pólu P''_c strany c a jednak k druhým pólům P'_a, P'_b stran a, b (prvými byly A_4, A_2). Určíme snadno prvky všech nových trojúhelníků a shledáme, že trojúhelník



Obr. 3.

$P'_aP'_bP'_c$ je polární k původnímu. Toto doplnění je nakresleno slabě v obr. 2.

Zobecnění pentagrammatu pro kosoúhlé trojúhelníky. Uvedené doplnění G. p. naznačuje cestu, jak je možno sestrojiti obdobný obrazec pro trojúhelníky kosoúhlé. Rozdělíme totiž daný trojúhelník ABC výškami na 3 páry pravoúhlých trojúhelníků, v nichž jsou strany daného trojúhelníka přeponami a ke každému z vrcholů ABC nakreslíme společnou část G. p. pro příslušný pár. Schematicky je výsledek naznačen v obr. 4, v němž jsou zapsány prvky, které jsou vyjádřeny prvky daného trojúhelníka v nejjednodušší formě. Z obrazce lze vyčísti řadu zajímavých vztahů. Stačí odvoditi obvyklým způsobem prvou větu kosinovou

$$\cos c_k = \cos a_k \cos b_k + \sin a_k \sin b_k \cos \gamma_k \qquad (7)$$

a použíti ji na jednotlivé trojúhelníky v obrazci.

Čtyrúhelníky při vrcholech ABC se skládají ze dvou pravoúhlých trojúhelníků o společné přeponě. Vyjádřeme ji odvěsnami obou trojúhelníků a dostaneme

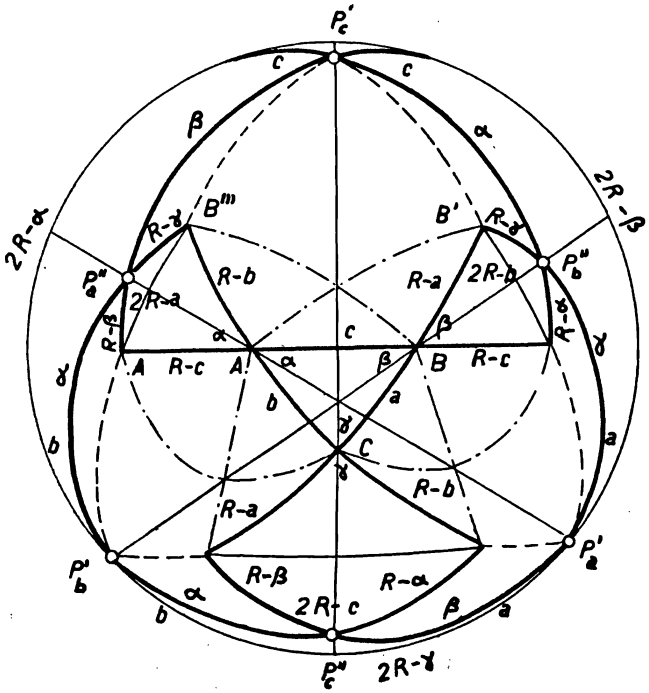
$$\sin b \sin \gamma = \sin c \sin \beta, \quad \sin c \sin \alpha = \sin a \sin \gamma,$$
$$\sin a \sin \beta = \sin b \sin \alpha, \tag{8}$$

což je věta sinová.

Kosinová věta (7) užita na trojúhelníky $P''_b P'_c P'_a$, $P''_a P'_c P'_b$, $P''_c P'_b P'_a$ dá tři druhé kosinové věty a to

$$-\cos \beta = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \cos b \text{ atd.} \tag{9}$$

Stejný výsledek dostaneme z polárního trojúhelníka $P'_a P'_b P'_c$.



Obr. 4.

Druhá věta kosinová vede v použití opět k prvé větě kosinové. Tak získali jsme serii (devíti) rovnic, z nichž každá obsahuje čtyři prvky.

Z naší konfigurace dostaneme serii rovnic o 5 prvcích. Vyjádřeme $B'P'_c$ jednak z trojúhelníka $B'P'_aP'_c$ a jednak z trojúhelníka $B'P''_bP'_c$. Dostaneme:

$$\sin \beta \cos a = \sin \gamma \cos \alpha + \cos \gamma \sin \alpha \cos b. \tag{10}$$

Obdobně vyjádřením (v obrazci čárkovaných) úseček $B'''P'_c$ atd. získáme celkem 6 rovnic po pěti prvcích.

Jiné rovnice o pěti prvcích dá vyjádření úseček (v obrazci čerchovaných) AB' atd. z trojúhelníků ABB', $AB'''B'$ atd.

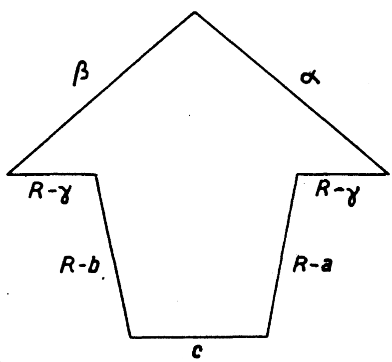
$$\cos c \sin a - \sin c \cos a \cos \beta = \sin b \cos \gamma. \tag{11}$$

Dělíme-li rovnici (10) $\sin \alpha$ a užijeme věty sinové, dostaneme relaci mezi pěti prvky:

$$\sin b \operatorname{cotg} a = \sin \gamma \operatorname{cotg} \alpha + \cos \gamma \cos b. \tag{12}$$

Obdobně z rovnic (11). Podobnou úpravou vět kosinových získáme věty s kotangentami o čtyřech prvcích.

Najdeme konečně vztahy vázající všech 6 prvků trojúhelníka. K tomu vyjádříme úhlopříčny spojující vrcholy pravých úhlů



Obr. 5.

čtyrúhelníků při vrcholech ABC; na př. z trojúhelníků $A'AB'''$ a $A'P''_aB'''$:

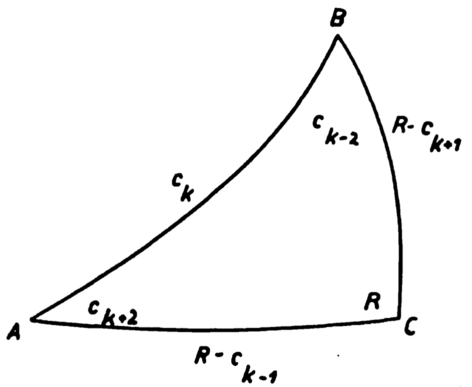
$$\sin c \sin b + \cos c \cos b \cos \alpha = \sin \gamma \sin \beta - \cos \gamma \cos \beta \cos a. \tag{13}$$

Celkem 3 rovnice se šesti prvky.

Zobecnění Neperova pravidla a jeho specialisace. Sestavme schema prvků tak, jak se ve zobecněném pentagrammatu vyskytují nad stranou c (obr. 5). Z něho lze přehlédnouti stavbu rovnic (7) až (12) a rozděliti je na dvě serie:

$$\mathrm{I}\left\{\begin{aligned}
\cos c &= \sin (R - b) \sin (R - a) + \\
&\quad + \cos (R - b) \cos (R - a) \sin (R - \gamma), \\
\cos (R - a) \cos (R - \gamma) &= \sin c \sin \alpha, \\
\cos \alpha \cos (R - \gamma) &= - \sin \alpha \sin (R - \gamma) \sin (R - b) + \\
&\quad + \sin \beta \sin (R - a), \\
\cos \beta \cos (R - \gamma) &= - \sin \beta \sin (R - \gamma) \sin (R - a) + \\
&\quad + \sin \alpha \sin (R - b), \\
\cos (R - b) \cos (R - \gamma) &= \sin c \sin \beta.
\end{aligned}\right.$$

$$
\mathrm{II}\left\{\begin{aligned}
\cos c \sin \alpha \sin \beta &= \cos \alpha \cos \beta + \sin (R - \gamma),\\
\cos (R - a) \operatorname{tg} (R - b) &= \cos (R - \gamma) \operatorname{cotg} \beta +\\
&\quad + \sin (R - \gamma) \sin (R - a),\\
\cos \alpha \sin (R - b) \sin c &= \cos (R - b) \cos c -\\
&\quad - \cos (R - a) \sin (R - \gamma),\\
\cos \beta \sin (R - a) \sin c &= \cos (R - a) \cos c -\\
&\quad - \cos (R - b) \sin (R - \gamma),\\
\cos (R - b) \operatorname{tg} (R - a) &= \cos (R - \gamma) \operatorname{cotg} \alpha +\\
&\quad + \sin (R - \gamma) \sin (R - b).
\end{aligned}\right.
$$



Obr. 6.

Popsat slovy, jak se tyto poučky vyčtou ze schematu nebylo by účelné. Ani schéma samo neposkytuje mnohem lepší přehled než trojúhelník sám. Rovnice I a II jsou zobecněním Neperova pravidla. Měli bychom vlastně vzhledem ke každé straně daného trojúhelníka napsati schema tak jak je dáno zobecněným pentagrammatem. Místo toho však užíváme cyklických záměn prvků.

Speciální případ nastává, je-li některý úhel pravý. Na př. pro $\gamma = R$ redukuje se pentagramma na (doplněné) Gaussovo, ve schematu odpadne $R - \gamma$ a serie rovnic I a II přejdou v dříve uvedené dvě serie rovnic pro pravoúhlý trojúhelník.

Jiná specialisace, jako trojúhelníky rovnoramenné, dvakrát pravoúhlé, pravostranné, neposkytují nic důležitého.

Poznámky. 1. Studujeme-li místo konfigurace sférických trojúhelníků konfigurace trojhranů, dojdeme k myšlenkám dříve zmíněného článku p. prof. Friedricha, nebo k relacím mezi jednotkovými vektory. Opačně zase z relací mezi vektory plynou základní věty sférické trigonometrie.

2. Podle výtvarného zákonu pentagrammatu můžeme pova-

žovati původní trojúhelník na př. k-tý za sestrojený pomocí přepon všech dalších, jak naznačuje obr. 6.

3. Jsou-li rozměry trojúhelníka daného malé, můžeme nahraditi funkce prvými členy známých řad a vzorce sférické geometrie přejdou ve vzorce rovinné trigonometrie. Je zajímavo zjistiti, co vyjadřují vzorce obou serií v tomto případě, což přenechávám čtenáři.

Příspěvek k metodice primánských počtů.

Dr. **Josef Mašek**, Olomouc.

1. V primě dělá na začátku roku dosti potíží vzájemná přeměna různých jednotek soustavy desítkové, zvláště když jest příslušná veličina vyjádřena více stupni. Jak známo, musíme při tom vždy zdůrazňovati význam měnitele dotyčných jednotek, jenž se různí podle druhu veličin. Zejména pracné jest převádění jednotek vyšších na nižší. Děje se to buď přímou přeměnou jednotlivých stupňů na dané nejnižší jednotky, což jest však příliš zdlouhavé, nebo postupnou přeměnou stupňů vyšších na nižší. Tento způsob vyžaduje velké opatrnosti; víme jistě všichni, co chyb nadělá většina žáků při této přeměně zejména ve školní práci, kdy nejsou hned upozorněni na chybu.

Uvádím pět typických příkladů této postupné přeměny, již níže podrobně vysvětluji.

a) Délka, měnitel 10 (1 stupni odpovídá 1 místo)

$$7\ \text{km}\ \underset{2}{5}\ \text{dkm}\ \underset{1}{4}\ \text{m}\ \underset{2}{8}\ \text{cm} = 7\underbrace{05}\,4\underbrace{08}\ \text{cm}.$$

b) Obsah plochy, měnitel 100 (1 stupni odpovídají 2 místa)

$$4\ \text{km}^2\ \underset{2}{15}\ \text{a}\ \underset{1}{48}\ \text{m}^2\ \underset{2}{7}\ \text{cm}^2 = 4\underbrace{0\,015}\,\underbrace{48}0\,\underbrace{007}\ \text{cm}^2.$$

c) Objem tělesa, měnitel 1000 (1 stupni odpovídají 3 místa)

$$5\ \text{dkm}^3\ \underset{1}{16}\ \text{m}^3\ \underset{2}{7}\ \text{cm}^3\ \underset{1}{25}\ \text{mm}^3 = 5\ \underbrace{016}\ \underbrace{000\ 007}\ \underbrace{025}\ \text{mm}^3.$$

d) Míry duté, měnitel 10 (1 stupni odpovídá 1 místo)

$$15\ \text{hl}\ \underset{2}{4}\ \text{l}\ \underset{1}{8}\ \text{dl}\ \underset{2}{9}\ \text{ml} = 1\ 5\underbrace{04}\ 8\underbrace{09}\ \text{ml}.$$

e) Váha, měnitel 10 (1 stupni odpovídá 1 místo)

$$7\ \text{t}\ \underset{3}{6}\ \text{kg}\ \underset{2}{7}\ \text{dkg}\ \underset{1}{9}\ \text{g} = 7\ \underbrace{006}\ \underbrace{07}9\ \text{g}.$$

Vyzkoušel jsem již na několika generacích tento způsob postupné přeměny, podle něhož žák po předchozím vyznačení jednotlivých stupňů píše přímo výsledek. Malými číslicemi mezi