Eduard Weyr

O soustavách orthogonálných ploch. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 25 (1896), No. 1, 42--46

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122850`

O soustavách orthogonálných ploch.

Napsal

Eduard Weyr.

Některé výsledky, týkající se tří soustav ploch na vzájem kolmých, lze odvoditi za pomocí theorie matic*) způsobem přehledným a stručným; to ukázati jest účelem následující krátké stati.

1. Buďte ϱ, μ, ν dané funkce pravoúhlých souřadnic x, y, z, a uvažujme tři soustavy ploch

$$(1) \qquad \varrho = \text{const.}, \quad \mu = \text{const.}, \quad \nu = \text{const.}$$

Funkce ϱ, μ, ν buďte neodvislé, t. j. takové, že lze x, y, z pojímati za funkci neodvislých proměnných ϱ, μ, ν.

Partialné dirivace $\frac{\partial \varrho}{\partial x}, \frac{\partial \varrho}{\partial y}, \frac{\partial \varrho}{\partial z}$ značíme za příčinou stručnosti ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, a obdobně pro μ a ν.

Položíce

$$(2) \qquad \begin{aligned} P^2 &= \varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2, \\ M^2 &= \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2, \\ N^2 &= \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2, \end{aligned}$$

máme pro cosinusy normaly k ploše $\varrho = \text{const.}$ hodnoty

$$\frac{\varrho_1}{P}, \frac{\varrho_2}{P}, \frac{\varrho_3}{P},$$

a obdobně jsou

$$\frac{\mu_1}{M}, \frac{\mu_2}{M}, \frac{\mu_3}{M}$$

a

$$\frac{\nu_1}{N}, \frac{\nu_2}{N}, \frac{\nu_3}{N}$$

cosinusy normaly k ploše $\mu = \text{const.}$, resp. $\nu = \text{const.}$

Dané tři soustavy ploch (1) jsou tedy orthogonálné, platí-li pro každé x, y, z relace

*) V. můj spis „O theorii forem bilinearných“, 1889, hlavně I. kap.

$$\begin{aligned}
&\varrho_1\mu_1 + \varrho_2\mu_2 + \varrho_3\mu_3 = 0, \\
(3) \qquad &\mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2 + \mu_3\nu_3 = 0, \\
&\nu_1\varrho_1 + \nu_2\varrho_2 + \nu_3\varrho_3 = 0.
\end{aligned}$$

Tuto orthogonálnost lze jiným způsobem vyjádřiti stručněji. Označíme symbolem $\{a_{hk}\}$ matici, t. j. souhrn členů determinantu $|a_{hk}|$, takže rovnost $\{a_{hk}\} = \{b_{hk}\}$ značí všecky rovnosti $a_{hk} = b_{hk}$; obvyklým způsobem symbol $\frac{\partial(\varrho, \mu, \nu)}{\partial(x, y, z)}$ značí funkcionalný determinant, nám však nechť značí příslušnou matici. Pak lze rovnice (2) a (3) nahraditi rovností matic

$$\left\{\begin{matrix} \varrho_1, & \varrho_2, & \varrho_3 \\ \mu_1, & \mu_2, & \mu_3 \\ \nu_1, & \nu_2, & \nu_3 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} \varrho_1, & \mu_1, & \nu_1 \\ \varrho_2, & \mu_2, & \nu_2 \\ \varrho_3, & \mu_3, & \nu_3 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \mathrm{P}^2, & 0, & 0 \\ 0, & \mathrm{M}^2, & 0 \\ 0, & 0, & \mathrm{N}^2 \end{matrix}\right\}.$$

Jsou tedy dané systemy orthogonálnými, je-li součin z matice $\frac{\partial(\varrho, \mu, \nu)}{\partial(x, y, z)}$ a z její konjugované maticí typickou, t. j. takovou, že její členy stojící mimo hlavní diagonalu jsou nully. Orthogonalnost je tudíž stručně vyjádřena rovností

$$(4) \qquad \frac{\partial(\varrho, \mu, \nu)}{\partial(x, y, z)} \left[\frac{\partial(\varrho, \mu, \nu)}{\partial(x, y, z)}\right] = \left\{\begin{matrix} \mathrm{P}^2, & 0, & 0 \\ 0, & \mathrm{M}^2, & 0 \\ 0, & 0, & \mathrm{N}^2 \end{matrix}\right\};$$

zde značí [A] matici konjugovanou k A.

Uvážíme-li, že

$$[\mathrm{AB}] = [\mathrm{B}]\,[\mathrm{A}],$$

obdržíme ze známé rovnosti

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varrho, \mu, \nu)} \frac{\partial(\varrho, \mu, \nu)}{\partial(x, y, z)} = \left\{\begin{matrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{matrix}\right\}$$

ihned

$$\left[\frac{\partial(\varrho, \mu, \nu)}{\partial(x, y, z)}\right] \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varrho, \mu, \nu)}\right] = \left\{\begin{matrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{matrix}\right\},$$

a přidáním dvou faktorů v levo i v pravo

$$\frac{\partial(\varrho,\mu,\nu)}{\partial(x,y,z)}\left[\frac{\partial(\varrho,\mu,\nu)}{\partial(x,y,z)}\right]\left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\mu,\nu)}\right]\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\mu,\nu)}$$
$$=\frac{\partial(\varrho,\mu,\nu)}{\partial(x,y,z)}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\mu,\nu)}=\left\{\begin{matrix}1, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{matrix}\right\},$$

t. j. vzhledem k (4)

$$\left\{\begin{matrix}P^2, & 0, & 0\\ 0, & M^2, & 0\\ 0, & 0, & N^2\end{matrix}\right\}\left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\mu,\nu)}\right]\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\mu,\nu)}=\left\{\begin{matrix}1, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1\end{matrix}\right\},$$

čili

$$(5)\qquad \left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\mu,\nu)}\right]\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\mu,\nu)}=\left\{\begin{matrix}P^{-2}, & 0, & 0\\ 0, & M^{-2}, & 0\\ 0, & 0, & N^{-2}\end{matrix}\right\}.$$

Máme tedy šest rovnic

$$(5')\qquad \begin{matrix} x_1^2+y_1^2+z_1^2=P^{-2}, & x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0,\\ x_2^2+y_2^2+z_2^2=M^{-2}, & x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3=0,\\ x_3^2+y_3^2+z_3^2=N^{-2}, & x_3x_1+y_3y_1+z_3z_1=0,\end{matrix}$$

jevících se jakožto následek rovnic (2) a (3)*); zde značí x_1, x_2, x_3 atd. opět partialné derivace $\frac{\partial x}{\partial \varrho}$, $\frac{\partial x}{\partial \mu}$, $\frac{\partial x}{\partial \nu}$, atd.

2. Buďte ϱ, μ, ν dané funkce hodnot x, y, z, a tyto opět dané funkce hodnot ξ, η, ζ; dále předpokládejme, že rovnice

$$\varrho=\text{const.},\quad \mu=\text{const.},\quad \nu=\text{const.}$$

náležejí třem orthogonálným soustavám ploch, pokládáme-li x, y, z za pravoúhlé souřadnice, a že obdobně rovnice

$$x=\text{const.},\quad y=\text{const.},\quad z=\text{const.}$$

stanoví tři orthogonálné soustavy, pokládáme-li ξ, η, ζ za pravoúhlé souřadnice.

Vložíme-li za x, y, z jich hodnoty do ϱ, μ, ν, jeví se tyto jakožto funkce hodnot ξ, η, ζ a naskytá se přirozeným způsobem otázka, za jakých okolností pak rovnice

*) Sr. *Serret.* Calcul diffir., 2e éd., p. 494 a 500.

$$\varrho = \text{const.}, \quad \mu = \text{const.}, \quad \nu = \text{const.}$$

stanoví též tři orthogonálné soustavy.

K tomu je třeba a stačí, aby součin

$$\frac{\partial(\varrho, \mu, \nu)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \left[\frac{\partial(\varrho, \mu, \nu)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}\right]$$

čili součin

$$\frac{\partial(\varrho, \mu, \nu)}{\partial(x, y, z)} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \left[\frac{\partial(\varrho, \mu, \nu)}{\partial(x, y, z)} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}\right]$$

t. j.

$$\frac{\partial(\varrho, \mu, \nu)}{\partial(x, y, z)} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}\right] \left[\frac{\partial(\varrho, \mu, \nu)}{\partial(x, y, z)}\right]$$

byl typickou maticí. Avšak součin prostředních dvou matic jest dle supposice typickou maticí, řekněme

$$\left\{\begin{matrix} A^2 & 0, & 0 \\ 0, & B^2, & 0 \\ 0, & 0, & C^2 \end{matrix}\right\},$$

a musí tedy součin

$$\left\{\begin{matrix} \varrho_1, & \varrho_2, & \varrho_3 \\ \mu_1, & \mu_2, & \mu_3 \\ \nu_1, & \nu_2, & \nu_3 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} A^2, & 0, & 0 \\ 0, & B^2, & 0 \\ 0, & 0, & C^2 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} \varrho_1, & \mu_1, & \nu_1 \\ \varrho_2, & \mu_2, & \nu_2 \\ \varrho_3, & \mu_3, & \nu_3 \end{matrix}\right\}$$

býti typickým.

Přihlédněme jen k specialnému řešení tohoto problemu, kdy totiž

$$A^2 = B^2 = C^2,$$

v kterém případu poslední součin jest skutečně typickým a s.

$$\left\{\begin{matrix} A^2P^2, & 0, & 0 \\ 0, & B^2M^2, & 0 \\ 0, & 0, & C^2N^2 \end{matrix}\right\}.$$

Toto specialné řešení vymáhá především stanovení hodnot x, y, z hovících rovnicím

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta}+\frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \zeta}=0,$$
$$\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \eta}+\frac{\partial y}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \zeta}=0,$$
$$\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\partial x}{\partial \zeta}=0,$$
$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right)^2=\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right)^2$$
$$=\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)^2;$$

společná hodnota posledních tří součtů jest pak A^2. Z těchto rovnic ale, vzhledem k předchozímu článku, snadno plyne, že čtverec linearného elementu $d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2$ čili

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}dx+\frac{\partial \xi}{\partial y}dy+\frac{\partial \xi}{\partial z}dz\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}dx+\frac{\partial \eta}{\partial y}dy+\frac{\partial \eta}{\partial z}dz\right)^2$$
$$+\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}dx+\frac{\partial \zeta}{\partial y}dy+\frac{\partial \zeta}{\partial z}dz\right)^2$$

má hodnotu

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{A^2}.$$

Z rovnice

$$\frac{\sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}=\frac{1}{A}$$

ale soudíme, že vztah bodů (x, y, z), (ξ, η, ζ) jest isogonalný a že tedy, jakož *Liouville* ukázal*), lze jej uskutečniti pomocí podobnosti a t. zv. transformace reciprokými průvodiči. Nevede tedy specialné řešení námi uvedené k jiným orthogonalným soustavám než k těm, které plynou ze soustavy ϱ, μ, ν applikací podobnosti neb transformace reciprokými průvodiči.

(Dokončení.)

---

*) Viz dodatky *Liouvilleovy* k *Mongeově* Application de l'Analyse à la Géométrie, aneb důkaz, jejž podal *Haton de la Goupillière* v Journal de l'Ecole Polytechnique, 42e cahier, p. 188.