Úlohy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 72 (1947), No. 4, D14--D16

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122803

ÚLOHY

Úlohy o jedné prostorové křivce.*)

V pravoúhlých souřadnicích kartézských x, y, z je dána křivka v parametrickém vyjádření (t je proměnný reálný parametr):

$$(1) \qquad x = t, \quad y = \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \quad z = \frac{t^3}{3}.$$

Dokažte následující tvrzení:

Oblouk s křivky (1) je

$$s = \int_{t_1}^{t_2} (1 + t^2)\, dt = [x + z]_{t_1}^{t_2}.$$

Směrové kosiny tečny $\mathbf{t}$, resp. hlavní normály $\mathbf{n}$, resp. binormály $\mathbf{b}$ jsou

$$\mathbf{t}\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{\sqrt{2}t}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right)$$

$$\mathbf{n}\left(\frac{-\sqrt{2}t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{\sqrt{2}t}{1+t^2}\right)$$

$$\mathbf{b}\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{-\sqrt{2}t}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right).$$

Napište rovnici oskulační roviny v obecném bodě křivky (1) a vypočítejte první křivost k_1 (flexi) i druhou křivost k_2 (torsi). Protože je $k_1 = k_2$, je křivka šroubovicí na obecném válci a protíná tedy pod konstantním úhlem ω jeho površky, jejichž směrové kosiny označme a, b, c, takže platí

$$(1 + t^2) \cos \omega = a + \sqrt{2}tb + t^2c.$$

Derivujeme-li tuto rovnici dvakrát podle t, vypočítáme snadno

$$\omega = \frac{\pi}{4}, \quad a = c = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = 0,$$

*) Tyto úlohy se hodí jako cvičení z diferenciální geometrie křivek, kde se příklady v učebnicích omezují většinou na šroubovici na rotačním válci a na konickou spirálu na rotačním kuželi.

takže zmíněný válec má toto parametrické vyjádření (v parametrech t, u):

$$(2) \qquad x = t + \frac{1}{\sqrt{2}} u, \quad y = \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \quad z = \frac{t^3}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} u.$$

Základna tohoto válce v rovině kolmé na směr jeho površek (na příklad v rovině $x + z = 0$) je kubická křivka, vyjádřená v parametru t rovnicemi

$$x = \frac{t}{6}(3 - t^2), \quad y = \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \quad z = -\frac{t}{6}(3 - t^2),$$

které lze transformací souřadnic

$$\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - z), \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + z)$$

převésti na tvar

$$\bar{x} = \frac{t}{3\sqrt{2}}(3 - t^2), \quad \bar{y} = \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \quad \bar{z} = 0.$$

Odtud zjistíme, že tato křivka má dvojnásobný bod pro $t = \pm \sqrt{3}$ s tečnami o směrnicích $\pm \sqrt{3}$ (v soustavě $\bar{x}, \bar{y}$).

Určete střed a poloměr oskulační koule v obecném bodě křivky (1) a dokažte, že tato křivka leží na hyperbolickém paraboloidu $3z = \sqrt{2} \,.\, xy$ a na kuželi $3xz = 2y^2$. Do roviny $z = 0$ promítá se křivka (1) jako parabola $x^2 = \sqrt{2} \,.\, y$, do roviny $y = 0$ se promítá jako kubická křivka $x^3 = 3z$ (mající v počátku inflexní bod s tečnou v ose X) a do roviny $x = 0$ se promítá jako Neilova (semikubická) parabola $9z^2 = 2\sqrt{2} \,.\, y^3$ (která má v počátku bod vratu s tečnou v ose Y). Křivka (1) je souměrná podle osy Y.

Dr *M. Sypták*, Brno.

Úlohy o determinantech.

1. Budiž D_m ($m \geqq 1$) determinant m-tého stupně, jehož $(2i + 1)$-ní a $(2i + 2)$-há řádka jsou

$$\begin{matrix} 0, a_1^i, 0, a_2^i, 0, a_3^i, 0, \dots \\ a_1^i, 0, a_2^i, 0, a_3^i, 0, a_4^i, \dots \end{matrix} \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Dokažte, že

$$(1) \qquad D_{2n+1} = 0, \quad D_{2n} = (-1)^n \prod_{1 \leqq \mu < \nu \leqq n} (a_\mu - a_\nu)^2.$$

2. Budiž D'_m ($m \geqq 1$) determinant m-tého stupně, jehož $(2i+1)$-ní a $(2i+2)$-há řádka jsou

$$\begin{matrix} a_1^i, & 0, & a_2^i, & 0, & a_3^i, & 0, & a_4^i, & \ldots \\ 0, & a_1^i, & 0, & a_2^i, & 0, & a_3^i, & 0, & \ldots \end{matrix} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dokažte, že

$$\begin{gathered} D'_{2n} = (-1)^n D_{2n},\ D'_{2n+1} = \\ = (-1)^n \prod_{1 \leqq \lambda \leqq n} (a_\lambda - a_{n+1}) \,.\, \prod_{1 \leqq \mu < \nu \leqq n} (a_\mu - a_\nu)^2. \end{gathered} \tag{2}$$

(T. zv. prázdné součiny značí jedničku, takže v (1), (2) je nutno čísti na př. $D_2 = -1$, $D'_1 = 1$, $D'_3 = a_2 - a_1$.)

3. Budiž Δ_{2n} ($n \geqq 1$) determinant stupně $2n$, jehož první řádka jest

$$\sin k_1 s, \cos k_1 s, \sin k_2 s, \cos k_2 s, \ldots, \sin k_n s, \cos k_n s,$$

a jehož ostatní řádky obdržíme z první postupně první, druhou, ..., $(2n-1)$-ní derivací podle s. Dokažte:

Δ_{2n} nezávisí na s, načež z (1) dostanete

$$\Delta_{2n} = (-1)^n k_1 k_2 \ldots k_n \,.\, \prod_{1 \leqq \mu < \nu \leqq n} (k_\mu^2 - k_\nu^2)^2.$$

Dr *M. Sypták*, Brno.
