Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Machovec

O křivkách třetího řádu procházejících vrcholy úplného čtyřúhelníku a jeho diagonálného trojúhelníku

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 16 (1887), No. 3, 113--116

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122782`

O křivkách třetího řádu procházejících vrcholy úplného čtyřúhelníku a jeho diagonálného trojúhelníku.

Podává

F. Machovec, professor v Karlíně.

O těchto křivkách pojednal P. E. Eckardt ve 13. svazku Schlömilchova časopisu analyticky. Účelem tohoto článku jest vyvoditi vlastnosti Eckardtem vytčené a to i ty, které podává bez důkazu, způsobem geometrickým a mimo to ukázati, že tyto křivky nejsou zvláštními křivkami třetího řádu, jak Eckardt se domnívá, nýbrž křivky zcela obecné.

K tomu bude užito příbuznosti druhého stupně, ve které jsou útvary libovolné roviny ε s útvary s nimi sdruženými vzhledem ke svazku kuželoseček Σ_2 této roviny.*) Základní body svazku Σ_2 označíme písmeny A_1, A_2, A_3, A_4 a diagonálné body čtyřúhelníku jimi tvořeného B_1, B_2 a B_3. Trojúhelník $B_1B_2B_3$ jest společným polárným trojúhelníkem všech kuželoseček svazku Σ_2 a s každým jeho vrcholem jsou sdruženy všecky body protilehlé strany.

Jsou pak hlavní vlastnosti vytčené příbuznosti stupně druhého tyto:

1. S křivkou stupně n-ho c_n, která neprochází žádným vrcholem $\triangle$ $B_1B_2B_3$, jest sdružena křivka c_{2n} stupně $2n$-ho, která prochází každým z bodů B_k n-kráte. Tak na př. přímce, která neprochází žádným z bodů B_k, odpovídá kuželosečka obepsaná $\triangle$ $B_1B_2B_3$. Svazku přímek, jehož středem jest libovolný bod P, odpovídá s ním projektivný svazek kuželoseček procházejících body B_1, B_2, B_3 a bodem P' sdruženým s bodem P.

Tečnám křivky c_n v bodech, v nichž ji na př. přímka B_2B_3 protíná, odpovídají kuželosečky křivku c_{2n} v bodě B_1 oskulující.

2. Prochází-li křivka c_n některým z bodů B_k, na př. bodem B_1, r-kráte, rozdělí se křivka c_{2n} s ní sdružená ve křivku c_{2n-r}

*) Poláry libovolného bodu P vzhledem ke všem křivkám svazku Σ_2 procházejí bodem P' sdruženým s P vzhledem k Σ_2.

řádu $(2n-r)$-ho a v r-kráte počítanou přímku B_2B_3, která odpovídá r-násobnému bodu B_1. Bod B_1 jest n-násobným a body B_2 a B_3 jsou $(n-r)$-násobné body křivky c_{2n-r}.

Dle toho odpovídá přímce, která prochází bodem B_1, přímka procházející týmž bodem. Svazku přímek o středu B_1 přísluší svazek přímek o témž středu. Oba svazky tvoří dohromady involuci stupně druhého, jejíž dvojné paprsky odpovídají samy sobě. Obdržíme tak pro každý vrchol B_k dva, tedy celkem šest samým sobě odpovídajících přímek: jsou to strany úplného čtyřúhelníku $A_1A_2A_3A_4$, jehož každý vrchol odpovídá samu sobě.

3. S přímkami spojujícími na př. bod B_1 s průsečíky přímky B_2B_3 a křivky c_n jsou sdruženy tečny křivky c_{2n} (nebo c_{2n-r}) v bodě B_1.

4. Křivce, která prochází některým ze samodružných bodů A_k, odpovídá křivka dotýkající se dané křivky v tomto bodě.

To předpokládajíce, přikročme k vlastnímu předmětu tohoto článku.

Budiž c_3 křivka třetího řádu procházející body A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2 a B_3. S touto křivkou jest sdružena vzhledem k svazku kuželoseček Σ_2 křivka c'_3 třetího řádu (2), která prochází body B_1, B_2, B_3 a dotýká se c_3 ve všech bodech A_k (4). Z toho jde, že $c'_3 \equiv c_3$, t. j. že křivka c_3 odpovídá sama sobě vzhledem ke svazku Σ_2.

Mysleme si nyní sestrojenu tečnu k c_3 v některém z bodů A_k, na př. v A_1 a budiž B_4 bod, v němž křivku c_3 protíná. Se svazkem přímek o středu B_4 sdružen jest projektivný s ním svazek kuželoseček Σ'_2, který prochází body B_1, B_2, B_3 a bodem C_4 křivky c_3 sdruženým s B_4 (1). Kuželosečka tohoto svazku sdružená s tečnou A_1B_4 dotýká se této přímky a tudíž i křivky c_3 v bodě A_1; rovněž i kuželosečky odpovídající přímkám B_4A_2, B_4A_3 a B_4A_4 dotýkají se těchto přímek v bodech A_2, A_3 a A_4 (4). Křivka třetího řádu c''_3, vytvořená svazkem paprsků B_4 a svazkem Σ'_2, prochází tudíž body B_1, B_2, B_3, B_4, A_1, A_2, A_3 A_4 a C_4 a kromě toho dotýká se křivky c_3 v bodě A_1, z čehož jde, že jest totožná s křivkou c_3.

Hledíce k známým vlastnostem křivky c''_3 ($\equiv c_3$), která jest výtvorem svazků B_4 a Σ'_2 a k základním větám o příbuznosti druhého stupně dříve vytčeným, můžeme ihned vysloviti věty:

a) Tečny křivky c_3 v bodech A_1, A_2, A_3, A_4 procházejí jediným bodem B_4 této křivky.

a') Kuželosečky obepsané trojúhelníku $B_1 B_2 B_3$ a dotýkající se křivky c_3 v bodech A_1, A_2, A_3 a A_4 procházejí bodem C_4 této křivky.

b) Tečny křivky c_3 v bodech B_1, B_2, B_3 procházejí bodem C_4. Tímto bodem prochází též tečna křivky c_3 v bodě B_4.

b') Přímky spojující vrcholy $\triangle B_1 B_2 B_3$ s třetími průsečníky C_1, C_2, C_3 protilehlých jeho stran a křivky c_3 procházející bodem B_4. Tímto bodem prochází též kuželosečka obepsaná $\triangle B_1 B_2 B_3$ a dotýkající se křivky c_3 v bodě C_4.

Uvážíme-li dále, že $\triangle$ $C_1C_2C_3$ jest diagonálným trojúhelníkem čtyřúhelníku $B_1B_2B_3B_4$ a že křivka c_3 prochází všemi sedmi vrcholy těchto dvou obrazců, můžeme všech výsledků pro sedmibodovou skupinu $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3$ obdržených užiti i na tuto novou skupinu. Budou tedy jmenovitě i tečny křivky c_3 v bodech C_1, C_2, C_3 (a C_4) procházeti jediným bodem D_4 oné křivky. Máme tudíž tyto věty:

c) Tečny křivky c_3 ve třetích průsečnících C_1, C_2, C_3 této křivky se stranami trojúhelníku $B_1 B_2 B_3$ procházejí jediným bodem D_4 oné křivky. Tímto bodem prochází i tečna křivky c_3 v bodě C_4.

c') Kuželosečky obepsané trojúhelníku $B_1 B_2 B_3$, z nichž každá křivku c_3 v jednom z těchto bodů oskuluje, procházejí bodem E_4 této křivky. Tímto bodem prochází i kuželosečka obepsaná trojúhelníku $B_1 B_2 B_3$ a dotýkající se křivky c_3 v bodě B_4.

Zároveň jest patrno, že ze druhé sedmibodové skupiny křivky c_3 vznikla nová skupina sedmibodová týmž způsobem, jako vznikla druhá z první. Z toho jde, že takových sedmibodových skupin jest na c_3 nekonečné množství a že všem náležejí vlastnosti právě dokázané.

Že křivka c_3 jest *obecnou* křivkou třetího řádu (šesté třídy), vyplývá z této úvahy:

Budiž B libovolný bod jakékoli křivky c_3 třetího řádu a šesté třídy a A_1, A_2, A_3, A_4 body dotyčné tečen z něho na c_3 sestrojených. Třetí průsečníky přímek A_1A_2 a A_3A_4 s c_3 buďtež označeny písmeny X a X′ a podobně třetí průsečníky přímek A_2A_3 a A_4A_1, A_1A_3 a A_2A_4 s c_3 písmeny Y a Y′, Z a Z′. Ze známé vlastnosti křivek třetího řádu vyplývá, že první tangenciálné body bodů A_1, A_2 a X musí býti na přímce, tedy v tomto případě na tečně *t* křivky c_3 v bodě B. Třetí průsečník C této přímky s křivkou c_3 jest tudíž prvním tangenciálným bodem bodu X. Týmž způsobem jako o bodu X dokážeme i o bodech X′, Y, Y′, Z a Z′, že mají bod C za svůj první bod tangenciálný. Že však z bodu C jsou kromě tečny *t* na křivku c_3 jen ještě tři tečny možny, musí body X, X′, Y, Y′, Z a Z′ po dvou splývati a sice musí bod $X \equiv X'$, $Y \equiv Y'$ a $Z \equiv Z'$, poněvadž by jinak každý z těchto bodů musil splynouti s některým z bodů A_k. Uvážíme-li, že $\triangle XYZ$ jest diagonálným trojúhelníkem čtyřúhelníku $A_1A_2A_3A_4$ a že oba tyto obrazce jsou křivce c_3 vepsány, jest zřejmo, že *křivky v nadpisu vytčené jsou obecnými křivkami třetího řádu.**)

Úvod do mathematické krystallografie.

Pro začátečníky vykládá

prof. dr. Jan Krejčí.

(Dokončení.)

VIII. Rovnice dvojčatných krystallů.

Dvojčatné krystally záležejí z dvou stejných jednotníků, které dle nějaké racionálně položené plochy tak jsou spolu srostlé, že jeden jednotník ke druhému jest o 180° pootočen. Společnou plochou dvojčatného součtu rozpoluje se úhel na hraně dvoj-

*) Srovnej str. 164. *Cremonova* „Úvodu do geom. theorie křivek rovinných“, v českém překladě Dr. *Em. Weyra.*