Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Krejčí

Úvod do mathematické krystallografie. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 16 (1887), No. 3, 116--121

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122779

Že křivka c_3 jest *obecnou* křivkou třetího řádu (šesté třídy), vyplývá z této úvahy:

Budiž B libovolný bod jakékoli křivky c_3 třetího řádu a šesté třídy a A_1, A_2, A_3, A_4 body dotyčné tečen z něho na c_3 sestrojených. Třetí průsečníky přímek A_1A_2 a A_3A_4 s c_3 buďtež označeny písmeny X a X′ a podobně třetí průsečníky přímek A_2A_3 a A_4A_1, A_1A_3 a A_2A_4 s c_3 písmeny Y a Y′, Z a Z′. Ze známé vlastnosti křivek třetího řádu vyplývá, že první tangenciálné body bodů A_1, A_2 a X musí býti na přímce, tedy v tomto případě na tečně t křivky c_3 v bodě B. Třetí průsečník C této přímky s křivkou c_3 jest tudíž prvním tangenciálným bodem bodu X. Týmž způsobem jako o bodu X dokážeme i o bodech X′, Y, Y′, Z a Z′, že mají bod C za svůj první bod tangenciálný. Že však z bodu C jsou kromě tečny t na křivku c_3 jen ještě tři tečny možny, musí body X, X′, Y, Y′, Z a Z′ po dvou splývati a sice musí bod $X \equiv X'$, $Y \equiv Y'$ a $Z \equiv Z'$, poněvadž by jinak každý z těchto bodů musil splynouti s některým z bodů A_k. Uvážíme-li, že $\triangle XYZ$ jest diagonálným trojúhelníkem čtyřúhelníku $A_1A_2A_3A_4$ a že oba tyto obrazce jsou křivce c_3 vepsány, jest zřejmo, že *křivky v nadpisu vytčené jsou obecnými křivkami třetího řádu.**)

Úvod do mathematické krystallografie.

Pro začátečníky vykládá

prof. dr. **Jan Krejčí.**

(Dokončení.)

VIII. Rovnice dvojčatných krystallů.

Dvojčatné krystally záležejí z dvou stejných jednotníků, které dle nějaké racionálně položené plochy tak jsou spolu srostlé, že jeden jednotník ke druhému jest o 180° pootočen. Společnou plochou dvojčatného součtu rozpoluje se úhel na hraně dvoj-

*) Srovnej str. 164. *Cremonova* „Úvodu do geom. theorie křivek rovinných“, v českém překladě Dr. *Em. Weyra.*

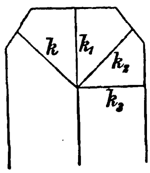
čatné. Sestrojí-li se plocha k dvojčatné ploše kolmá, tak že otupuje dvojčatnou hranu, objeví se pásmo čtyř ploch, z něhož pomocí (10, 15, 18) rovnice dvojčatná dá se vyvinouti. Účel té rovnice jest vyznačiti vztah symbolů plochových celého dvojčete k jednomu a témuž prvotvaru.

Znamená-li $k = mnr$ plochu v původní poloze na jednom jednotníku (obr. 6.),

$k_1 = m_1 n_1 r_1$ plochu společného součtu,

$k_2 = m_2 n_2 r_2$ plochu s mnr obdobnou v obrácené poloze na druhém jednotníku,

$k_3 = m_3 n_3 r_3$ plochu pomocnou na $m_1 n_1 r_1$ kolmou, setká se plocha $k_1 = m_1 n_1 r_1$ s plochou $k_3 = m_3 n_3 r_3$ pod úhlem 90°, a pro H obou ploch jest dle (15)



Obr. 6.

$$\cos \mathrm{H} = \cos 90^\circ = \frac{\mathrm{P}}{\sqrt{\mathrm{QQ'}}},$$

a tedy, an $\cos 90^\circ = 0$,

$$\begin{aligned} & m_3 (m_1 \sin^2 \alpha - r_1 \mathrm{B}_1 - n_1 \mathrm{C}_1) + n_3 (n_1 \sin^2 \beta - m_1 \mathrm{C}_1 - r_1 \mathrm{A}_1) \\ \text{(a)} \quad & + r_3 (r_1 \sin^2 \gamma - n_1 \mathrm{A}_1 - m_1 \mathrm{B}_1) = 0. \end{aligned}$$

Rovnice pásmová pro plochy mnr, $m_1 n_1 r_1$, $m_3 n_3 r_3$ jest

$$\begin{vmatrix} m & n & r \\ m_1 & n_1 & r_1 \\ m_3 & n_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0,$$

anebo dle rozvedení v (8) naznačeném

$$\text{(b)} \quad m_3 (n r_1 - r n_1) + n_3 (r m_1 - m r_1) + r_3 (m n_1 - n m_1) = 0.$$

Sloučí-li se obě rovnice (a), (b) dle (6), (7), objeví se hodnoty značek pomocné plochy $m_3 n_3 r_3$, totiž

$$\frac{m_3}{(r m_1 - m r_1)(r_1 \sin^2 \gamma - n_1 \mathrm{A}_1 - m_1 \mathrm{B}) - (m n_1 - n m_1)(n_1 \sin^2 \beta - r_1 \mathrm{A}_1 - m_1 \mathrm{C}_1)},$$

$$= \frac{n_3}{(n m_1 - m n_1)(m_1 \sin^2 \alpha - r_1 \mathrm{B}_1 - n_1 \mathrm{C}_1) - (n r_1 - r n_1)(r_1 \sin^2 \gamma - n_1 \mathrm{A}_1 - m_1 \mathrm{B}_1)}$$

$$= \frac{r_3}{(nr_1 - rn_1)(n_1 \sin^2\beta - m_1 C_1 - r_1 A_1) - (rm_1 - mr_1)\, m_1 \sin^2\alpha - }$$

(c) $$\frac{r_3}{- r_1 B_1 - n C_1)}.$$

U dvojčatných krystallů jest úhel $kk_2 = 2kk_1$, úhel $kk_3 = 90^0 + kk_1$, tudíž jest pro hodnotu $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$ k rovnici (18) příslušnou

$$\frac{\cot kk_2 - \cot kk_3}{\cot kk_1 - \cot kk_2} = \frac{\cot 2kk_1 - \cot (90^0 + kk_1)}{\cot kk_1 - \cot (90^0 + kk_1)} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}.$$

Jelikož však $\cot 2kk_1 = \frac{1 - \tan^2 kk_1}{2 \tan kk_1}$,

jest $$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} = \frac{1 + \tan^2 kk_1}{2(1 + \tan^2 kk_1)} = \frac{1}{2}.$$

Poznamenáme-li jednoduchý v VII (d) uvedený poměr

(d) $$\frac{nr_1 - rn_1}{n_1 r_3 - r_1 n_3} = \frac{rm_1 - mr_1}{r_1 m_3 - m_1 r_3} = \frac{mn_1 - nm_1}{m_1 n_3 - n_1 m_3} = \frac{\mathrm{M}_1}{\mathrm{N}_1}$$

a užije-li se tohoto poznamenání v rovnici pro $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$ v (18), jest

$$\frac{\mathrm{M}_1}{\mathrm{N}_1} \frac{m_2 n_3 - n_2 m_3}{mn_2 - nm_2} = \frac{\mathrm{M}_1}{\mathrm{N}_1} \frac{n_2 r_3 - r_2 n_3}{nr_2 - rn_2} = \frac{\mathrm{M}_1}{\mathrm{N}_1} \frac{r_2 m_3 - m_2 r_3}{rm_2 - mr_2} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}.$$

Z toho nalezne se

$$\mathrm{M}_1 \mathrm{N}\, (m_2 n_3 - n_2 m_3) = \mathrm{M} \mathrm{N}_1\, (mn_2 - nm_2)$$

nebo

$$m_2\, (\mathrm{M}_1 \mathrm{N} n_3 - \mathrm{M} \mathrm{N}_1 n) = n_2\, (\mathrm{M}_1 \mathrm{N} m_3 - \mathrm{M} \mathrm{N}_1 m).$$

Taktéž se nalezne

$$\mathrm{M}_1 \mathrm{N} (n_2 r_3 - r_2 n_3) = \mathrm{M} \mathrm{N}_1\, (nr_2 - rn_2)$$

nebo

$$n_2\, (\mathrm{M}_1 \mathrm{N} r_3 - \mathrm{M} \mathrm{N} r) = r_2\, (\mathrm{M}_1 \mathrm{N} n_3 - \mathrm{M} \mathrm{N}_1 n).$$

Tudíž jest

$$\frac{m_2}{\mathrm{M}_1 \mathrm{N} m_3 + \mathrm{M} \mathrm{N}_1 m} = \frac{n_2}{\mathrm{M}_1 \mathrm{N} n_3 + \mathrm{M} \mathrm{N}_1 n} = \frac{r_2}{\mathrm{M}_1 \mathrm{N} r_3 + \mathrm{M} \mathrm{N} r},$$

nebo, dosadí-li se $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} = \frac{1}{2}$,

(e) $$\frac{m_2}{2\mathrm{M}_1 m_3 + \mathrm{N}_1 m} = \frac{n_2}{2\, \mathrm{M} n_3 + \mathrm{N}_1 n} = \frac{r_2}{2\mathrm{M}_1 r_3 + \mathrm{N}_1 r}.$$

Dosadí-li se nyní do rovnice (d) hodnoty $m_3 n_3 r_3$ v (c) nalezené, jest

$$\text{(f)}\quad \frac{M_1}{N_1} = \frac{1}{m_1^2\sin^2\alpha + n_1^2\sin^2\beta + r_1^2\sin\gamma - 2n_1r_1A_1 - 2m_1r_1B_1 - 2m_1n_1C_1}.$$

Vloží-li se konečně hodnota $\frac{M_1}{N_1}$ z (f) a hodnota $m_3n_3r_3$ z (c) do rovnice (e), objeví se

$$\frac{m_2}{(m_1^2\sin^2\alpha - n_1^2\sin^2\beta - r_1^2\sin^2\gamma + 2A_1n_1r_1)\,m + 2m_1(n_1\sin^2\beta - A_1r_1 - C_1m_1)\,n + 2m_1(r_1\sin^2\gamma - A_1n_1 - B_1m_1)\,r}$$

$$= \frac{n_2}{(n_1^2\sin^2\beta - r_1^2\sin^2\gamma - m_1^2\sin^2\alpha + 2B_1r_1m_1)\,n + 2n_1(r_1\sin^2\gamma - B_1m_1 - A_1n_1)\,r + 2n_1(m_1\sin^2\alpha - B_1r_1 - Cn_1)\,m}$$

$$= \frac{r_2}{(r_1^2\sin^2\gamma - m_1^2\sin^2\alpha - n_1^2\sin^2\beta + 2C_1m_1n_1)\,r + 2r_1(m_1\sin^2\alpha - C_1n_1 - B_1r_1) + 2r_1(n_1\sin^2\beta - C_1m_1 - A_1r_1)\,n}, \tag{20}$$

jakožto všeobecné rovnice dvojčat krystallových.

Při tom jest

$$A_1 = \cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma = \cos X\sin\beta\sin\gamma,$$
$$B_1 = \cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma = \cos Y\sin\alpha\sin\gamma,$$
$$C_1 = \cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta = \cos Z\sin\alpha\sin\beta,$$

kdež X, Y, Z jsou úhly plošné, α, β, γ úhly ve plochách prvotvaru, mnr jest poloha plochy v jednom jednotníku dvojčete, $m_2n_2r_2$ jest poloha plochy obdobné, obrácené v druhém jednotníku, $m_1n_1r_1$ jest plocha dvojčatná. Je-li $\alpha = \beta = \gamma$, jest

$$\frac{m_2}{(m_1^2 - n_1^2 - r_1^2 + 2n_1r_1\cos X)\,m + 2m_1[n_1 - (r_1 + m_1)\cos X]\,n + 2m_1[r_1 - (n_1 + m_1)\cos X]\,r}$$

$$= \frac{n_2}{n_1^2 - r_1^2 - m_1^2 + 2r_1m_1\cos X)\,n + 2n_1[r_1 - (m_1 + n_1)\cos X]\,r + 2n_1[m_1 - (r_1 + n_1)\cos X]\,m}$$

$$= \frac{r_2}{(r_1^2 - m_1^2 - n_1^2 + 2m_1n_1\cos X)\,r + 2r_1[m_1 - (n_1 + r_1)\cos X]\,m + 2r_1[n_1 - (m_1 + r_1)\cos X]\,n}. \tag{21}$$

Je-li $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$, bude

$$\frac{m_2}{(m_1^2 - n_1^2 - r_1^2)\, m + 2m_1 n_1 n + 2m_1 r_1 r}$$
$$= \frac{n_2}{(n_1^2 - r_1^2 - m_1^2)\, n + 2n_1 r_1 r + 2n_1 m_1 m}$$
$$(22) \qquad = \frac{r_2}{(r_1^2 - m_1^2 - n_1^2)\, r + 2r_1 m_1 m + 2r_1 n_1 n}.$$

Pro dvojčata krychlové soustavy dle dvojčatné plochy $m_1 n_1 r_1 = 110$ srostlá jest

$$\frac{m_2}{2(n+r) - m} = \frac{n_2}{2(r+m) - n} = \frac{r_2}{2(m+r) - r}.$$

IX. Triëdrické věty.

Při krystallografických výpočtech objevuje se užívání pouze následujících pěti vět triëdických, kteréž se vztahují k triëdru s úhly plošnými A, B, C a s protilehlými úhly hranovými α, β, γ a jejichž odvození se nachází v každé učební knize geometrie. Věty tyto jsou následující:

Z daných úhlů α, β, γ ustanoví se úhly A, B, C dle vzorce:

$$(23) \qquad \cos A = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

Z daných úhlů A, B, C ustanoví se úhly α, β, γ dle vzorce:

$$(24) \qquad \cos \alpha = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}.$$

Z daných dvou úhlů hranových a úhlu plošného mezi nimi ležícího, ustanoví se oba druhé úhly plošné dle vzorce:

$$(25) \qquad \cot A = \frac{\cot \alpha \sin \beta - \cos \beta \cos C}{\sin C}.$$

Z daných dvou úhlů plošných a úhlu hranového mezi nimi ležícího, ustanoví se oba druhé úhly hranové dle vzorce:

$$(26) \qquad \cot \alpha = \frac{\cot A \sin B + \cos B \cos \gamma}{\sin \gamma}.$$

Souvislost mezi sinusy úhlů hranových a plošných vyznačuje úměra:

$$(27) \qquad \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = \sin A : \sin B : \sin C.$$

Větami a vzorci v těchto IX odstavcích vyloženými, ovšem s připojením obyčejných vzorců goniometrických a trigonometrických, vystačí se úplně při výpočtu jakýchkoliv ploch krystallových se vztahem k danému prvotvaru, jak příklady, jež v pozdějších pojednáních se vyloží, jasně dosvědčí.

Součet k-tých mocnin čísel řady přirozené.

Pro žáky středních škol napsal

Jan Slavík,

professor akad. gymnasia v Praze.

Dle poučky binomické pro celistvé a kladné hodnoty mocnitele k jest

$$(a+b)^k = a^k + \binom{k}{1} a^{k-1} b + \binom{k}{2} a^{k-2} b^2 + \ldots + b^k,$$

při čemž, jak známo, počet členů $= k+1$.

Dle toho jest

$$\begin{aligned}
1^k &= 1^k, \\
(1+1)^k &= 1^k + \binom{k}{1} 1^{k-1} + \binom{k}{2} 1^{k-2} + \ldots + 1, \\
(2+1)^k &= 2^k + \binom{k}{1} 2^{k-1} + \binom{k}{2} 2^{k-2} + \ldots + 1, \\
(3+1)^k &= 3^k + \binom{k}{1} 3^{k-1} + \binom{k}{2} 3^{k-2} + \ldots + 1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n+1)^k &= n^k + \binom{k}{1} n^{k-1} + \binom{k}{2} n^{k-2} + \ldots + 1.
\end{aligned}$$

Součtem ve sloupcích obdržíme

$$(n+1)^k = 1^k + \binom{k}{1} \Sigma n^{k-1} + \binom{k}{2} \Sigma n^{k-2} + \ldots + n$$

aneb

$$(n+1)^k - (n+1) = \binom{k}{1} \Sigma n^{k-1} + \binom{k}{2} \Sigma n^{k-2} + \ldots + \binom{k}{1} \Sigma n$$

čili