

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Augustin Pánek

O základních vzorcích goniometrických

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 4, 202--203

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122704>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1872

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

$$\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \dots = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dz}{z} \sqrt{\frac{1+2z \sin x + z^2}{1-2z \sin x + z^2}}.$$

Řada tato má hodnotu $\frac{\pi x}{4}$ aneb $\frac{\pi}{4}(\pi-x)$, podle toho, je-li $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ aneb $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ (*), tedy

$$(22) \quad \int_0^1 \frac{dz}{z} \sqrt{\frac{1+2z \sin x + z^2}{1-2z \sin x + z^2}} = \pi x \text{ aneb } \pi(\pi-x).$$

Hodnotu πx tohoto integrálu zjednáme si také ze vzorce (16), píšeme-li v něm $\frac{\pi}{2} - x$, $\frac{\pi}{2} + x$ místo x a odečteme-li oba nové vzorce, čímž se objeví také integrál (22).

Jest-li $x = \frac{\pi}{2}$, jde z (22)

$$(23) \quad \int_0^1 \frac{1+z}{1-z} \frac{dz}{z} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Že vzorce napřed uvedené zahrnují v sobě ještě hojnost jiných, jest patrné.

Vůbec výrazy logarithmické zde uvedené tvoří s jakousi funkcí x zvláštní typus integrálů v mezích 0 a 1, s kterými, jak známo, nejprve *Euler* ve svém díle o integrálním počtu se zanášel. Později uvádí *Legendre* tyto integrály pod jmenem Eulerovských ve svém „*Traité des fonct. ellipt.*“

O základních vzorcích goniometrických.

(Podává *A. Pánek*.)

Spůsobů, jakými lze vyvinouti známé vzorce pro $\frac{\sin}{\cos}(\alpha \pm \beta)$, jest velmi mnoho, takže v rozličných knihách učebných s rozličnými se setkáváme. Nejjednodušší jsou arci takové, které vyžadují nejméně přípravy a nejrychleji vedou k cíli. A k těmto patří, tuším, také i následující:

*) *Mayer*, Vorlesungen u. d. Theorie d. bestimmten Integrale. Leipzig, Teubner, 1871., pag. 265.

Sestrojíme-li v trojúhelníku ABC^*), v němž slují strany a, b, c , úhly α, β, γ , přímkou $CE \perp AB$ a je-li $AE = m, EB = n$, tedy $c = m + n$, platí

$$b : (m + n) = \sin \beta : \sin \gamma,$$

z čehož jde, jelikož tu

$$\begin{aligned} \gamma &= \pi - (\alpha + \beta), \\ b \sin (\alpha + \beta) &= (m + n) \sin \beta \\ &= (a \cos \beta + b \cos \alpha) \sin \beta \end{aligned}$$

neb
jelikož

$$\begin{aligned} \sin (\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ a \sin \beta &= b \sin \alpha. \end{aligned}$$

Je-li β úhel tupý, vede se důkaz podobně.

Použijeme-li pak vzorců

$$\begin{aligned} \cos^2 (\alpha + \beta) &= 1 - \sin^2 (\alpha + \beta) \\ 1 &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha, \end{aligned}$$

obdržíme, sečteme-li na obou stranách a odmocníme-li, používše předešlého vzorce,

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

co druhý vzorec základní. **)

Nové poučky o determinantech.

(Podává dr. F. J. Studnička.)

Jak známo, nemění se hodnota determinantu

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}, \quad (1)$$

odečteme-li prvky některé řady od příslušných prvků řady souběžné.

Odečteme-li tedy od prvků druhého, třetího, . . . , n tého sloupce prvky sloupce prvního, druhého, . . . , $(n-1)$ ho, obdržíme, značí-li všeobecně

*) Výkres necht si laskavý čtenář sám sestrojít.

***) Srovnej Grunerts *Archiv für Math. u. Physik.* XXI. Theil, pag. 237,