Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Augustin Pánek

O některých integrálech omezených

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 4, 197--202

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122703

Velmi elegantního tvaru nabude rovnice podmiňující (7), jsou-li X a Y úkony trigonometrické, na př. $X = \cos x$, $Y = \sin x$. Pak položme

$$a_k = m_k \cos v_k\,, \quad b_k = m_k \sin v_k\,.$$

Rovnice (5) přemění se v následující:

$$m_2 \cos(v_2 + x) y'' + m_1 \cos(v_1 + x) y' + m_0 \cos(v_0 + x) y = 0, \qquad (10)$$

která bude míti částečný integrál $y = e^{\alpha x}$, je-li

$$\frac{\sin^2(v_0 - v_2)}{m_1{}^2} = \frac{\sin(v_1 - v_0)}{m_2} \cdot \frac{\sin(v_2 - v_1)}{m_0}. \qquad (11)$$

Zároveň jest

$$\alpha = \frac{m_1 \sin(v_1 - v_0)}{m_2 \sin(v_0 - v_2)} = \frac{m_0 \sin(v_0 - v_2)}{m_1 \sin(v_2 - v_1)}. \qquad (12)$$

Na objasnění řečeného stůjž zde následující příklad. Součinitelové rovnice

$$(3 - x) y'' - (9 - 4x) y' + (6 - 3x) y = 0,$$

v které jest $X = 1$, $Y = x$, vyhovují skutečně rovnicí (7), a $\alpha = 1$, tedy $y = ue^x$, a

$$(3 - x) u'' - (3 - 2x) u' = 0,$$

$$u' = C' e^{2x} (3 - x)^3, \quad u = C + C' \int e^{2x} (3 - x)^3 dx,$$

z čehož jde konečně

$$y = Ce^x + C' e^{3x} (183 - 150x + 42x^2 - 4x^3).$$

O některých integrálech omezených.

(Podává *Augustin Pánek.*)

Abychom ustanovili hodnotu omezeného integrálu

$$J = \int_0^\infty y^{n-1} l(1 + xe^{-y})\, dy$$

použijme vzorců

$$l(1 + xe^{-y}) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} e^{-ky},$$

$$\int_0^\infty e^{-my} y^{n-1} dy = \frac{1}{m^n} \int_0^\infty e^{-v} v^{n-1} dv = \frac{\Gamma(n)}{m^n},$$

načež obdržíme

$$J = \Gamma(n) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k^{n+1}}.$$

Píšeme-li pak v tomto integrálu $n-1$ místo n, povstane podobně

$$\int_0^\infty y^{n-2}\, l(1+xe^{-y})\, dy = \Gamma(n-1) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k^n};$$

zavedeme-li dále $e^{-y} = z$, konečně

$$(-1)^n \int_0^1 l(1+xz)\, \frac{l^{n-2} z}{z}\, dz = \Gamma(n-1) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k^n}.$$

Dosadíme-li do tohoto integrálu

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,\quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

místo x, obdržíme z něho dva nové vzorce a sice

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{e^{kix}}{k^n} = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-1)} \int_0^1 l(1+z\cos x + iz \sin x)\, \frac{l^{n-2} z}{z}\, dz,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{e^{-kix}}{k^n} = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-1)} \int_0^1 l(1+z\cos x - iz \sin x)\, \frac{l^{n-2} z}{z}\, dz,$$

jichž součet a rozdíl vede ku vzorcům

$$\frac{\cos x}{1^n} - \frac{\cos 2x}{2^n} + \frac{\cos 3x}{3^n} - \frac{\cos 4x}{4^n} + \ldots \tag{1}$$

$$= {}^1/_2 \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-1)} \int_0^1 l(1+2z\cos x + z^2)\, \frac{l^{n-2} z}{z}\, dz,$$

$$\frac{\sin x}{1^n} - \frac{\sin 2x}{2^n} + \frac{\sin 3x}{3^n} - \frac{\sin 4x}{4^n} + \ldots \tag{2}$$

$$= {}^1/_2 \frac{(-1)^n}{i\,\Gamma(n-1)} \int_0^1 l\, \frac{1+z(\cos x + i \sin x)}{1+z(\cos x - i \sin x)}\, \frac{l^{n-2} z}{z}\, dz.$$

Zavedeme-li do vzorce (1) $\pi + x$ místo x a do (2) $\pi - x$ místo x, obdržíme z nich bezprostředně

$$\frac{\cos x}{1^n} + \frac{\cos 2x}{2^n} + \frac{\cos 3x}{3^n} + \frac{\cos 4x}{4^n} + \ldots \tag{3}$$

$$= {}^1/_2 \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-1)} \int_0^1 l(1-2z\cos x + z^2)\, \frac{l^{n-2} z}{z}\, dz,$$

$$\frac{\sin x}{1^n} + \frac{\sin 2x}{2^n} + \frac{\sin 3x}{3^n} + \frac{\sin 4x}{4^n} + \ldots \tag{4}$$

$$= {}^1/_2 \frac{(-1)^n}{i\,\Gamma(n-1)} \int_0^1 l\, \frac{1-z(\cos x - i \sin x)}{1-z(\cos x + i \sin x)}\, \frac{l^{n-2} z}{z}\, dz.$$

Sečteme-li vzorce (1), (3) a (2), (4), zjednáme si dále

$$\frac{\cos x}{1^n} + \frac{\cos 3x}{3^n} + \frac{\cos 5x}{5^n} + \frac{\cos 7x}{7^n} + \ldots \tag{5}$$

$$= {}^1/_4 \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-1)} \int_0^1 l\, \frac{1+2z\cos x + z^2}{1-2z\cos x + z^2}\, \frac{l^{n-2} z}{z}\, dz,$$

$$\frac{\sin x}{1^n}+\frac{\sin 3x}{3^n}+\frac{\sin 5x}{5^n}+\frac{\sin 7x}{7^n}+\ldots \tag{6}$$
$$=\tfrac{1}{4}\frac{(-1)^n}{i\,\Gamma(n-1)}\int_0^1 l\,\frac{(1-z^2)\cos^2 x+2i\sin x}{(1-z^2)\cos^2 x-2i\sin x}\,\frac{l^{n-2}z}{z}\,dz.$$

Zavedeme-li pak do řady (5) a (6) $\frac{\pi}{2}-x$ místo x, bude konečně

$$\frac{\sin x}{1^n}-\frac{\sin 3x}{3^n}+\frac{\sin 5x}{5^n}-\frac{\sin 7x}{7^n}+\ldots \tag{7}$$
$$=\tfrac{1}{4}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-1)}\int_0^1\frac{l^{n-2}z}{z}\,l\,\frac{1+2z\sin x+z^2}{1-2z\sin x+z^2}\,dz,$$

$$\frac{\cos x}{1^n}-\frac{\cos 3x}{3^n}+\frac{\cos 5x}{5^n}-\frac{\cos 7x}{7^n}+\ldots \tag{8}$$
$$=\tfrac{1}{4}\frac{(-1)^n}{i\,\Gamma(n-1)}\int_0^1\frac{l^{n-2}z}{z}\,l\,\frac{(1-z^2)\sin^2 x+2i\sin x}{(1-z^2)\sin^2 x-2i\sin x}\,dz\ ^{*)}.$$

Ze lze tímto spůsobem vzorce tyto i dále kombinovati, jde z předcházejícího dosti zřejmě na jevo.

Ze vzorce (1) a (3) vyplývá

$$\int_0^1 l^{n-2}z\,l(1+2z\cos x+z^2)\frac{dz}{z}=2(-1)^n 1^{n-2|1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\cos kx}{k^n}, \tag{9}$$

$$\int_0^1 l^{n-2}z\,l(1-2z\cos x+z^2)\frac{dz}{z}=2(-1)^n 1^{n-2|1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^n}. \tag{10}$$

Derivujeme-li vzorce (9), (10) podle x, obdržíme

$$\int_0^1 l^{n-2}z\frac{dz}{1+2z\cos x+z^2}=\frac{(-1)^n 1^{n-2|1}}{\sin x}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k^n}, \tag{11}$$

$$\int_0^1 l^{n-2}z\frac{dz}{1-2z\cos x+z^2}=\frac{(-1)^n 1^{n-2|1}}{\sin x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^n}. \tag{12}$$

Píšeme-li do vzorce (9) a (10) $x=0$, zjednáme si nové dva vzorce

$$\int_0^1 l^{n-2}z\,l(1+z)\frac{dz}{z}=(-1)^n 1^{n-2|1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^n}, \tag{13}$$

---

*) Řady (5), (6), (7) a (8) uvádí též *Dienger*, „Ueber die Lagrange'sche Summirungsformel," Crelle's J. Bd. 34.

Řadu (5) a (6) uvádí Schlömilch ve svém „Zeitschrift für Math. u. Physik. 1. Jahrg. „Ueber die Bernoulli'schen Funktion und deren Gebrauch bei der Entwickelung halbconvergenter Reihen."

$$\int_0^1 l^{n-2} z \, l(1-z) \frac{dz}{z} = (-1)^n 1^{n-2|1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \; {}^{*}). \qquad (14)$$

Položíme-li do vzorce (3) $n=2$, povstane řada

$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots;$$

nazveme-li ji $\varphi(x)$, obdržíme derivujíce

$$D\varphi(x) = -[\sin x + {}^1/_2 \sin 2x + {}^1/_3 \sin 3x + \ldots] = {}^1/_2 (x-\pi) \; {}^{**}),$$
$$0 < x < 2\pi,$$

a integrujeme-li

$$\varphi(x) = B - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4},$$

značí-li B stálou integrační, kteráž podle methody *Bernoulli-ho* má hodnotu $\frac{\pi^2}{6}$ ***).

Integrál pro hořejší řadu podává vzorec (3)

$$\varphi(x) = -{}^1/_2 \int_0^1 l(1-2z\cos x + z^2) \frac{dz}{z},$$

načež z posledních těchto relací konečně jde, že

$$\int_0^1 l(1-2z\cos x + z^2) \frac{dz}{z} = \pi x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{3}. \qquad (15)$$

Zavedeme-li tu za $x \ldots \pi + x$, zjednáme si

$$\int_0^1 l(1+2z\cos x + z^2) \frac{dz}{z} = {}^1/_6 \, \pi^2 - \tfrac{1}{2} x^2 \; \dagger), \qquad (16)$$

kterýžto vzorec obdržíme také z (1), jest-li $n=2$.

Jest-li $x = \frac{\pi}{3}$, jde z (15) a (16)

$$\int_0^1 l(1-z+z^2) \frac{dz}{z} = -\frac{1}{18} \pi^2, \qquad (17)$$

---

*) Vzorce (13), (14) jsou uvedeny v „Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Deel VIII. Amsterdam, 1862.“

**) Euler, Novi Commentarii Academiae Scient. Petropolitanae. Tom XIX., totéž Schlömilch, Compendium d. höh. Analysis. 2. Aufl. 2. Bd., pag. 129. a jinde.

***) Tuto hodnotu obdržel *Euler* jiným spůsobem „L. Euler's vollständige Anleitung zur Integralrechnung.“ Aus d. Lateinischen übersetzt v. J. Salomon. Wien, 1830. IV. Band, p. 123.

†) Viz též Verhandelingen, VIII.

$$\int_0^1 l(1+z+z^2)\frac{dz}{z} = {}^1\!/_9\,\pi^2\,{}^{*)}. \tag{18}$$

Učiníme-li ve vzorci (16) $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, povstane

$$\int_0^1 l(1+z)\frac{dz}{z} = \frac{\pi^2}{12},$$

$$\int_0^1 l(1+z^2)\frac{dz}{z} = \frac{\pi^2}{12.2},$$

tedy obecně

$$\int_0^1 l(1+z^n)\frac{dz}{z} = \frac{\pi^2}{12.n}. \tag{19}$$

Derivujeme-li vzorec (15) podle x, obdržíme

$$\int_0^1 \frac{\sin x\, dz}{1-2z\cos x+z^2} = \frac{\pi-x}{2} = arc\tan\frac{\sin x}{1-\cos x}. \tag{20}$$

Zavedeme-li do vzorce (4) $n=2$, jest podobně

$$\psi(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \ldots$$

a derivujeme-li,

$$D\psi(x) = \cos x + {}^1\!/_2 \cos 2x + {}^1\!/_3 \cos 3x + \ldots,$$

kterážto řada má hodnotu $-l(2\sin {}^1\!/_2\, x)$ **), kdež $0<x<\pi$, načež integrováním vyplývá

$$\psi(x) = -x\,l2 - \int l\sin {}^1\!/_2\, x.dx$$

a tedy

$$\int l\sin {}^1\!/_2\, x.dx = -x\,l2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^n};$$

zavedeme-li meze 0, π, pak 0, $\frac{\pi}{2}$, poznáme, že

$$\int_0^{\pi} l\sin {}^1\!/_2\, x\,.dx = 2\int_0^{\pi/_2} l\sin {}^1\!/_2\, x\,.dx = -\pi l2\,{}^{***)}, \tag{21}$$

Ze vzorce (7) plyne, jest-li $n=2$,

---

*) Grunert, Archiv d. Math. u. Phys., r. 1862, pojednání Oettinger-a „Ueber bestimmte Integrale" pag. 175., má integrál (17) hodnotu $\frac{\pi}{\sqrt{3}}-2$ a pag. 171., integrál (18) pak $\frac{3l3}{2}+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-2$.

**) Euler, Novi Commentarii Acad. Scient. Petrop. T. XIX., totéž Schlömilch, Compendium, II. Bd., p. 130. a jinde.

***) Bezprostředně ustanovena tato relace v „Zákl. v. math." od *Studničky* díl II., pag. 110.

$$\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \ldots = \tfrac{1}{4}\int_0^1 \frac{dz}{z}\, l\, \frac{1+2z\sin x+z^2}{1-2z\sin x+z^2}.$$

Řada tato má hodnotu $\frac{\pi x}{4}$ aneb $\frac{\pi}{4}(\pi - x)$, podle toho, je-li $0 \lesseqgtr x \lesseqgtr \frac{\pi}{2}$ aneb $\frac{\pi}{2} \lesseqgtr x \lesseqgtr \pi$ *), tedy

$$\int_0^1 \frac{dz}{z}\, l\, \frac{1+2z\sin x+z^2}{1-2z\sin x+z^2} = \pi x \text{ aneb } \pi(\pi - x). \tag{22}$$

Hodnotu πx tohoto integrálu zjednáme si také ze vzorce (16), píšeme-li v něm $\frac{\pi}{2} - x$, $\frac{\pi}{2} + x$ místo x a odečteme-li oba nové vzorce, čímž se objeví také integrál (22).

Jest-li $x = \frac{\pi}{2}$, jde z (22)

$$\int_0^1 l\, \frac{1+z}{1-z}\, \frac{dz}{z} = \frac{\pi^2}{4}. \tag{23}$$

Že vzorce napřed uvedené zahrnují v sobě ještě hojnost jiných, jest patrno.

Vůbec výrazy logarithmické zde uvedené tvoří s jakousi funkcí x zvláštní typus integrálů v mezích 0 a 1, s kterými, jak známo, nejprvé *Euler* ve svém díle o integrálném počtu se zanášel. Později uvádí *Legendre* tyto integrály pod jmenem Eulerovských ve svém „Traité des fonct. ellipt."

O základních vzorcích goniometrických.

(Podává *A. Pánek.*)

Spůsobů, jakými lze vyvinouti známé vzorce pro $\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}(\alpha \pm \beta)$, jest velmi mnoho, takže v rozličných knihách učebných s rozličnými se potkáváme. Nejjednodušší jsou arci takové, které vyžadují nejméně přípravy a nejrychleji vedou k cíli. A k těmto patří, tuším, také i následující:

*) *Mayer,* Vorlesungen ü. d. Theorie d. bestimmten Integrale. Leipzig, Teubner, 1871., pag. 265.