Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 5, 598--676

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122679

v Jižní Australii, kam došla zpráva o objevu Loweově teprve 7. ledna, bylo po ní od 8. ledna marně pátráno. Z mapky, do které zanesl Lowe svá pozorování, odečetl ředitel hvězdárny v Adelaidě G. J. Dodwell tyto posice:

			Greenwich. č. stř.	AR	δ
1912	XII.	30.	$5^h 30^m$	$13^h 18^m$	$-\ 6^{\circ} 30'$
1913	I.	2.	5 30	13 38	$-17\ 40$
		4.	5 30	14 07	$-25\ 40$
		5.	5 30	14 30	$-29\ 50$

Ředitel hvězdárny Melbournské P. Baracchli, jemuž tyto posice byly telegraficky oznámeny, otálel zaslati kabelový telegram do Kielu, až by se našla přesnější posice. Ale posice z mapky Loweovy nebyly tak přesné, aby se dle nich dala stanovit další zdánlivá dráha komety, takže pátrání po kometě v ranním soumraku bylo úplně bezvýsledné. Dle posledního pozorování Loweova 9. ledna byla blízko souhvězdí Štíra.

Kometa prošla pravděpodobně přísluním 3. února ve vzdálenosti 96 millionů *km* od Slunce; Zemi byla nejblíže asi v době svého objevení (40 millionů *km*). *S.*

Úlohy.

Řešení úloh.

a) **Z mathematiky.**

1.

Oběma ručičkám na hodinách nelze dáti libovolnou polohu. (Na př. polohou ručičky hodinové jest poloha ručičky minutové dána.) Kdy možno obě ručičky zaměniti, aby nová poloha dala se interpretovati jako údaj časový? M. F.

Řešení. Zaslal p. *Miloš Eliáš*, stud. VI. tř. gymn. v Praze v Žitné ul.

Udávejme polohu ručiček na hodinách v dílcích hodinových (t. j. dvanáctinách plného úhlu).

Pak lze údaj časový vyznačiti tvarem:

Poloha ručičky hodinové $u + x$, poloha ručičky minutové $12x$ (pak jest u hodin $60x$ minut); při tom jest u celé číslo $0 \leqq u \leqq 11$ a x ryzí zlomek $0 \leqq x < 1$.

Abychom po záměně dostali opět údaj časový, musí býti

$$u + x = 12y \tag{1}$$

$$12x = v + y, \tag{2}$$

kdež v jest číslo celé $0 \leqq v \leqq 11$ a y ryzí zlomek

$$0 \leqq y < 1.$$

Z rovnic (1) a (2) obdržíme eliminací y

$$x = \frac{u + 12v}{143}$$

a eliminací x

$$y = \frac{12u + v}{143}.$$

Za u, v můžeme dosaditi libovolná čísla celá od 0 do 11, vyjímaje kombinaci $u = v = 11$, ježto by pak x a $y = 1$. Má tedy daná úloha 143 řešení.

Ručičky kryjí se pro $u = v$. Těchto poloh jest celkem 11.

2.

Tři čísla tvoří řadu arithmetickou. Součin těch čísel jest a, součet jich trojmocí b. Která jsou to čísla? (Na př. $a = 80$, $b = 645$.) Prof. *Rudolf Hruša.*

Řešení. Zaslal p. *Josef Kodrle,* stud. VIa. tř. r. v Pardubicích.

Budiž d difference řady arithmetické, x její prostřední člen. Pak má býti

$$(x - d) \,.\, x\,(x + d) = a,$$

$$(x - d)^3 + x^3 + (x + d)^3 = b.$$

Upravením těchto rovnic dostaneme

$$x^3 - xd^2 = a,$$

$$3x^3 + 6xd^2 = b.$$

Vyjádříme-li xd^2 z první rovnice a dosadíme do druhé, obdržíme

$$9x^3 = b + 6a,$$

z toho

$$x = \sqrt[3]{\frac{b + 6a}{9}}.$$

Známe-li x, vypočteme z první z obou předchozích rovnic

$$d = \pm \sqrt{\frac{x^3 - a}{x}}.$$

Pro x určené třetí odmocninou dostáváme tři hodnoty a z každé z nich dvě hodnoty pro d, tedy celkem šest řešení. Řady, které obdržíme pro obě hodnoty d, liší se ovšem pouze pořádkem: jedna z nich jest sestupná, druhá vzestupná.

Pro $a = 80$, $b = 645$ dostaneme

$$x = 5, \quad 5\varepsilon, \quad 5\varepsilon^2,$$
$$d = \pm 3, \; \pm 3\varepsilon, \; \pm 3\varepsilon^2,$$

kdež

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

tak že hledané řady jsou

$$\begin{array}{lll|lll} 2, & 5, & 8 & 8, & 5, & 2 \\ 2\varepsilon, & 5\varepsilon, & 8\varepsilon & 8\varepsilon, & 5\varepsilon, & 2\varepsilon \\ 2\varepsilon^2, & 5\varepsilon^2, & 8\varepsilon^2 & 8\varepsilon^2, & 5\varepsilon^2, & 2\varepsilon^2. \end{array}$$

3.

Jest řešiti rovnici

$$\cos 9x \cos^9 x + \sin 9x \sin^9 x = 1.$$

L. Krajný.

Řešení. Zaslal p. *Břetislav Hůla*, stud. VIII. tř. gymn. v Praze v Žitné ul.

$$\cos 9\alpha \cos^9 \alpha + \sin 9\alpha \sin^9 \alpha = 1.$$

Nahradíme-li $\cos 9\alpha$ a $\sin 9\alpha$ $\cos$ a $\sin$ jednoduchého úhlu, obdržíme:

$$\cos 9\alpha = \cos^9\alpha - \binom{9}{2}\cos^7\alpha \sin^2\alpha + \binom{9}{4}\cos^5\alpha \sin^4\alpha$$
$$- \binom{9}{6}\cos^3\alpha \sin^6\alpha + \binom{9}{8}\cos\alpha \sin^8\alpha$$
$$\sin 9\alpha = \binom{9}{1}\sin\alpha \cos^8\alpha - \binom{9}{3}\sin^3\alpha \cos^6\alpha$$
$$+ \binom{9}{5}\sin^5\alpha \cos^4\alpha - \binom{9}{7}\sin^7\alpha \cos^2\alpha + \sin^9\alpha,$$

což dosazeno do hořejší rovnice dává:

$$\sin^{18}\alpha + \cos^{18}\alpha - 36 \sin^2\alpha \cos^2\alpha (\sin^{14}\alpha + \cos^{14}\alpha)$$
$$+ 126 \sin^4\alpha \cos^4\alpha . (\sin^{10}\alpha + \cos^{10}\alpha) - 84 \sin^6\alpha \cos^6\alpha (\sin^6\alpha$$
$$+ \cos^6\alpha) + 9 \sin^8\alpha \cos^2\alpha (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 1. \qquad (1)$$

Položme: $\sin^2\alpha = u^2$, $\cos^2\alpha = v^2$, tu ze vztahu $u^2 + v^2 = 1$ plyne:

$$u^4 + v^4 = 1 - 2u^2v^2$$
$$u^6 + v^6 = 1 - 3u^2v^2$$
$$u^{10} + v^{10} = 1 - 5u^2v^2 + 5u^4v^4$$
$$u^{14} + v^{14} = 1 - 7u^2v^2 + 14u^4v^4 - 7u^6v^6$$
$$u^{18} + v^{18} = 1 - 9u^2v^2 + 27u^4v^4 - 30u^6v^6 + 9u^8v^8.$$

Tyto hodnoty pak dosaďme do rovnice (1); i obdržíme:

$$1152 u^8v^8 - 1248 u^6v^6 + 405 u^4v^4 - 45 u^2v^2 = 0,$$

a tato rovnice rozpadá se ve dvě rovnice:

a) $u^2v^2 = 0$, tudíž $\sin^2\alpha \cos^2\alpha = 0$

b) $384u^6v^6 - 416u^4v^4 + 135u^2v^2 - 15 = 0.$

Rovnice *a*) $\qquad \sin^2\alpha \cos^2\alpha = 0$
poskytuje pro α řešení

$$\alpha = n\frac{\pi}{2}, \quad \text{kdež} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

v rovnici *b*) položme

$$u^2v^2 = \sin^2\alpha \cos^2\alpha = \tfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha = \tfrac{1}{4}x.$$

Tak obdržíme k určení x rovnici třetího stupně

$$24x^3 - 104x^2 + 135x - 60 = 0.$$

Rovnice tato nemá reálných kořenů v mezích od 0 do 1. Neposkytuje tedy reálných řešení pro úhel α.

4.

Dokázati jest relaci

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n}{k}\binom{x}{k}}{\binom{y}{k}}=\frac{\binom{y-x}{n}}{\binom{y}{n}}.$$

Dr. *Vladimír Živanský.*

Řešení 1. dle p. autora.

Tuto relaci lze psáti ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!\,x!\,k!\,(y-k)!}{k!\,(n-k)!\,k!\,(x-k)!\,y!}=\frac{(y-x)!\,n!\,(y-n)!}{n!\,(y-x-n)!\,y!}$$

čili

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{y-k}{x-k}=\binom{y-n}{x}. \tag{1}$$

Ježto

$$\binom{y}{x}-\binom{y-1}{x-1}=\binom{y-1}{x},$$

ať x a y je jakékoliv, platí naše relace pro $n=1$. Předpokládejme její platnost pro $n-1$, pak

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\binom{y-k}{x-k}=\binom{y+1-n}{x} \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\binom{y-1-k}{x-1-k}=\binom{y-n}{x-1}.$$

Tuto rovnici lze přepsati na tvar

$$-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}\binom{y-k}{x-k}=\binom{y-n}{x-1}. \tag{3}$$

Rozdíl rovnice (2) a (3) dá

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right]\binom{y-k}{x-k}+\binom{y}{x}$$

$$+(-1)^n\binom{y-n}{x-n}=\binom{y+1-n}{x}-\binom{y-n}{x-1}$$

čili

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{y-k}{x-k}=\binom{y-n}{x}, \quad c.\,b.\,d.$$

Pro $x = n$ vychází

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{y}{k}} = \frac{\binom{y-n}{n}}{\binom{y}{n}}.$$

NB. Oba vztahy odvodil M. Lerch v „Rozpravách čes. akademie“. R. 1893 II. tř. čís. 9. jako důsledky jistých obecných úvah.

Řešení 2. Zaslal p. *Jaroslav Mayer*, stud. VII. tř. gymn. v Praze v Žitné ul.

Snadno shledáme, že jest

$$\frac{\binom{n}{k}\binom{x}{k}}{\binom{y}{k}} = \frac{\binom{x}{k}\binom{y-k}{n-k}}{\binom{y}{n}};$$

vytkneme-li na k nezávislý faktor, tedy bude levá strana

$$\frac{1}{\binom{y}{n}} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{x}{k}\binom{y-k}{n-k}.$$

Uvažujme součet

$$S_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n}(-1)_k \binom{x}{k}\binom{y-k}{n-k}.$$

Dosadíme-li za

$$\binom{y-k}{n-k} = \binom{y-k+1}{n-k} - \binom{y-k}{n-k-1}$$

a místo $\binom{x}{k} + \binom{x}{k+1}$ píšeme $\binom{x+1}{k+1}$, dostaneme výsledek

$$S_n(x, y) = S_n(x+1, y+1).$$

Na základě tohoto vzorce, je-li x celé číslo, jest $S_n(x, y)$ rovno

$$S_n(0, y-x) = \binom{y-x}{n}.$$

Poněvadž $S_n(x, y)$ jest polynom v x, a pro každé celistvé x jest

$$S_n(x, y) = \binom{y-x}{n},$$

platí tento vzorec pro každé x; tím platnost napsaného vzorce dokázána.

5.

Ze všech přímých válců stejného objemu nalézti onen, který má nejmenší povrch. Prof. *Václav Hübner.*

Řešení. Zaslal p. *Vladimír Škarda,* stud. V. tř. gymn. v Praze v Žitné ulici.

Objem přímého válce dán jest vzorcem

$$V = \pi r^2 v$$

a povrch vzorcem

$$P = 2\pi r^2 + 2\pi r v.$$

Z první rovnice dosadíme do druhé za $\pi r v = \frac{V}{r}$.

I dostaneme

$$P = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

P jest funkcí r; nejmenší povrch bude pro to r, pro něž derivace P dle r rovna bude 0 a druhá derivace > 0.
Jest však

$$P' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2};$$

i dostáváme k určení r rovnici

$$4\pi r^3 - 2V = 0,$$

z níž plyne

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{r^2 v}{2}}$$

a tedy

$$v = 2r \text{ a } V = 2\pi r^3.$$

Pro $v = 2r$ nabývá druhá derivace:

$$P'' = 4\pi + \frac{4V}{r^3}$$

hodnoty

$$4\pi + 8\pi = 16\pi > 0,$$

tak že nastává skutečně minimum. Válec rovnostranný má tedy nejmenší povrch ze všech přímých válců stejného objemu.

6.

Nalézti největší pravoúhlý rovnoběžnostěn, který lze vepsati dané kouli a) je-li základna čtverec, b) je-li základna obdélník o straně a. Prof. *Václav Hübner.*

Řešení. Zaslal p. *Jan Částka*, stud. III. roč. vyš. prům. školy, odd. strojn., v Plzni.

a) Strana čtvercové základny budiž x; pak bude výška pravoúhlého rovnoběžnostěnu vepsaného do dané krychle

$$v = \sqrt{4r^2 - 2x^2}.$$

Objem V dán jest výrazem

$$V = x^2 v = x^2 \sqrt{4r^2 - 2x^2}.$$

I vidíme, že jde o určení maxima funkce

$$y = V^2 = 4r^2x^4 - 2x^6.$$

To může nastati při

$$y' = 16r^2x^3 - 12x^5 = 0.$$

Rovnice tato poskytuje pro x kořeny

$$x = \tfrac{2}{3}r\sqrt{3} \quad \text{a} \quad x = 0.$$

Pro $x = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$ nabývá druhá derivace

$$y'' = 48r^2x^2 - 60x^4$$

záporné hodnoty $-\frac{128}{3}r^4$, tak že nastává skutečně maximum.

(Pro $x = 0$ jest $y'' = 0$,

$$y''' = 96\,r^2x - 240\,x^3 = 0.$$
$$y^{\mathrm{IV}} = 96\,r^2 - 720\,x^2 = 96\,r^2 > 0,$$

takže nastává minimum.)

Pro $x = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$ jest v rovněž $= \frac{2}{3}r\sqrt{3}$, takže největší pravoúhlý rovnoběžnostěn, který lze vepsati dané kouli, je-li základna čtverec, jest krychle.

b) Stranu a považujme za výšku hledaného rovnoběžnostěnu. Pak závisí objem jeho na ploše základny, což jest pravoúhlý rovnoběžník vepsaný do kružnice o daném poloměru $\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$. Jeho plocha bude největší, bude-li to čtverec.

Poněvadž jeho úhlopříčka jest $2\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$, jest strana jeho $\sqrt{\frac{4r^2 - a^2}{2}}$. Má tedy hledaný rovnoběžník rozměry

$$a, \sqrt{\frac{4r^2 - a^2}{2}}, \sqrt{\frac{4r^2 - a^2}{2}}.$$

7.

Sestrojíme-li symetrály vnějších úhlů trojúhelníka ABC, obdržíme při stranách jeho tři podobné trojúhelníky. Vepišme jim kruhy o středech M_1, M_2, M_3 a označme dotyčné body na stranách daného trojúhelníku písmeny A_1, B_1, C_1! Jest dokázati, že

a) spojnice AM_1, BM_2, CM_3 se protínají v jednom bodě,

b) „ AA_1, BB_1, CC_1 „ „ rovněž v jednom bodě.

Dr. *Josef Tomáš.*

Řešení. Dle p. *J. Koernera,* stud. VIII. tř. gymn. v Praze v Žitné ul., a dle p. autora.

Označme:

A' průsečík symmetrál vnějších úhlů při vrcholech B a C,
B' „ „ „ „ „ „ C a A,
C' „ „ „ „ „ „ A a B.

Rovnice stran $\triangle ABC$ ve tvaru *normálním* buďtež:

$$BC \ldots N_1 = 0$$
$$CA \ldots N_2 = 0$$
$$AB \ldots N_3 = 0.$$

Počátek souřadnic zvolme uvnitř $\triangle ABC$.

a) Je-li ϱ_1 poloměr kruhu, do $\triangle BA'C$ vepsaného, (ξ_1, η_1) souřadnice jeho středu M_1, plyne z rovnice přímky AM_1, která jest tvaru $N_2 - \lambda_1 N_3 = 0$:

$$\lambda_1 = \frac{N_2(\xi_1, \eta_1)}{N_1(\xi_1, \eta_1)};$$

$$-N_2(\xi_1, \eta_1) = \frac{\varrho_1}{\sin\frac{\alpha+\beta}{4}} \sin[2R - \tfrac{3}{4}(\alpha + \beta)];$$

neboť

$$\sphericalangle A_1CM_1 = \frac{\alpha+\beta}{4},$$

$$\sphericalangle ACM_1 = \gamma + \frac{\alpha+\beta}{4} = 2R - (\alpha+\beta) + \frac{\alpha+\beta}{4}$$
$$= 2R - \tfrac{3}{4}(\alpha+\beta);$$

$$-N_2(\xi_1, \eta_1) = \varrho_1 \cdot \frac{\sin\frac{3}{4}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta)}.$$

Podobně

$$-N_3(\xi_1, \eta_1) = \varrho_1 \frac{\sin\frac{3}{4}(\alpha+\gamma)}{\sin\frac{1}{4}(\alpha+\gamma)},$$

je tedy

$$\lambda_1 = \frac{\sin\frac{3}{4}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{4}(\alpha+\gamma)}{\sin\frac{3}{4}(\alpha+\gamma)\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta)}$$

a rovnice přímky AM_1

$$M_1 \equiv N_2 \sin\tfrac{1}{4}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{3}{4}(\gamma+\alpha)$$
$$- N_3 \sin\tfrac{1}{4}(\gamma+\alpha)\sin\tfrac{3}{4}(\alpha+\beta) = 0,$$

podobně

$$BM_2 \ldots M_2 \equiv N_3 \sin\tfrac{1}{4}(\beta+\gamma)\sin\tfrac{3}{4}(\alpha+\beta)$$
$$- N_1 \sin\tfrac{1}{4}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{3}{4}(\beta+\gamma) = 0,$$

$$CM_3 \ldots M_3 \equiv N_1 \sin\tfrac{1}{4}(\gamma+\alpha)\sin\tfrac{3}{4}(\beta+\gamma)$$
$$- N_2 \sin\tfrac{1}{4}(\beta+\gamma)\sin\tfrac{3}{4}(\gamma+\alpha) = 0.$$

Jest tedy

$$M_1 \sin\frac{\beta+\gamma}{4} + M_2 \sin\frac{\gamma+\alpha}{4} + M_3 \sin\frac{\alpha+\beta}{4} \equiv 0,$$

z čehož plyne ihned důkaz tvrzení *a*).

b) Rovnice příčky $AA_1 \ldots$ jest tvaru

$$N_2 - \mu N_3 = 0.$$

Dosaďme souřadnice bodu A_2. Tak dostaneme

$$\mu = \frac{N_2(A_1)}{N_3(A_1)}.$$

Avšak

$$-N_2(A_1) = \varrho_1 \cot g \frac{\alpha+\beta}{4} \sin\gamma,$$

$$-N_3(A_1) = \varrho_1 \cot g \frac{\gamma+\alpha}{4} \sin\beta,$$

a tedy

$$\mu = \frac{cotg\,\frac{\alpha+\beta}{4}\,sin\,\gamma}{cotg\,\frac{\gamma+\alpha}{4}\,sin\,\beta}$$

AA_1 má rovnici

$$P_1 \equiv N_2\,cotg\,\frac{\gamma+\alpha}{4}\,sin\,\beta - N_3\,cotg\,\frac{\alpha+\beta}{4}\,sin\,\gamma = 0,$$

podobně BB_1 má rovnici

$$P_2 \equiv N_3\,cotg\,\frac{\alpha+\beta}{4}\,sin\,\gamma - N_1\,cotg\,\frac{\beta+\gamma}{4}\,sin\,\alpha = 0,$$

CC_1 má rovnici

$$P_3 \equiv N_1\,cotg\,\frac{\beta+\gamma}{4}\,sin\,\alpha - N_2\,cotg\,\frac{\gamma+\alpha}{4}\,sin\,\beta = 0$$

$$P_1 + P_2 + P_3 \equiv 0,$$

a odtud vyplývá důkaz věty *b*).

8.

Dokažte, že spustíme-li z paty výšky trojúhelníku kolmice na druhé dvě výšky a jim příslušné strany, leží paty těchto čtyř kolmic v jedné přímce. Takové přímky dostaneme v trojúhelníku tři.

Kdy procházejí jedním bodem?

Dokažte o přímkách oněch:

a) úsečky jejich mezi dvěma příslušnými stranami trojúhelníku jsou si rovny,

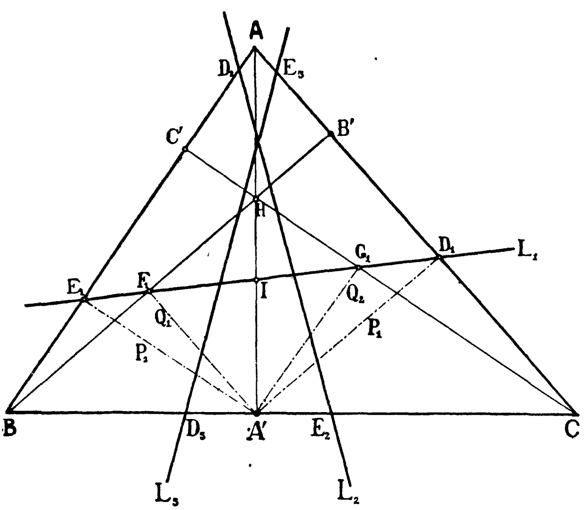
b) trojúhelníky, které z daného trojúhelníku utínají, jsou navzájem a trojúhelníku danému podobny,

c) plochy těch tří trojúhelníků mají se k sobě jako čtverce výšek daného trojúhelníku.

Dr. *Josef Tomáš.*

Řešení. Dle p. autora.

Snadno dokážeme, že body D_1, E_1, F_1, G_1 *leží na přímce* L_1. Čtyrúhelníky $BA'F_1E_1$, $A'G_1HF_1$, $A'CD_1G_1$ jsou tětivové: ($A'BE_1$, $A'BF_1$ jsou trojúh. pravoúhlé o společné podponě, leží tedy body $E_1 F_1$ na kružnici, sestrojené nad průměrem $A'B$ atd.). Odtud plyne $\sphericalangle F_1 F_1 B = \sphericalangle E_1 A'B = R - \beta$, $\sphericalangle HF_1 G_1 = \sphericalangle HA'G_1 = R - \beta$, tudíž $\sphericalangle E_1 F_1 B = \sphericalangle HF_1 G_1$, leží tedy bod G_1 na přímce, procházející body E_1, F_1. Podobně se dokáže, že bod F_1 leží na přímce určené body D_1, G_1. Jsou tedy všecky čtyři body E_1, F_1, G_1, D_1 na jedné přímce L_1.



Analytický důkaz této věty: Užije se nejlépe normálních rovnic stran trojúhelníka ABC jako v úloze 7. Rovnice jeho výšek jsou $H_1 \equiv N_2 \cos \beta - N_3 \cos \gamma = 0$ atd. Rovnice přímky $A'D_1 \perp AC$ jest

$$N_1 - \lambda H_1 \equiv N_1 - \lambda (N_2 \cos \beta - N_3 \cos \gamma) = 0.$$

Dosaďme souřadnici bodu D_1!

$$N_1 (D_1) - \lambda \{N_2 (D_1) \cos \beta - N_3 (D_1) \cos \gamma\} = 0,$$

$$\lambda = \frac{-N_1 (D_1)}{N_3 (D_1) \cos \gamma} = -\frac{-N_1 (D_1)}{-N_3 (D_1) \cos \gamma},$$

$$\lambda = -\frac{p_1 \cos \gamma}{(p_1 \, tg \, \gamma \sin \alpha) \cos \gamma} = -\frac{\cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma},$$

kdež

$$p_1 = A'D_1,$$

$$P_1 \equiv N_1 \sin \alpha \sin \gamma + N_2 \cos \beta \cos \gamma - N_3 \cos^2 \gamma = 0,$$

podobně

$$P_2 \equiv N_1 \sin\alpha \sin\beta - N_2 \cos^2\beta + N_3 \cos\beta \cos\gamma = 0.$$

Rovnice přímky Q_1 ($\perp BB'$) bude tvaru

$$N_1 - \mu\,(N_2 \cos\beta - N_3 \cos\gamma) = 0.$$

Dosaďme souřadnice bodu F_1. I bude

$$N_1(F_1) - \mu\,\{N_2(F_1)\cos\beta - N_3(F_1)\cos\gamma\} = 0$$

$$\frac{N_1(F_1)}{N_3(F_1)} = \mu\left(\frac{N_2(F_1)}{N_3(F_1)}\cos\beta - \cos\gamma\right);$$

$$\frac{-N_1(F_1)}{-N_3(F_1)} = \frac{\overline{BF_1}\,.\cos\gamma}{\overline{BF_1}\,.\cos\alpha} = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}.$$

$$-N_2(F_1) = A'D_1 = p_1, \quad -N_3(F_1) = \overline{BF_1}\,.\cos\alpha$$

$$\frac{N_2(F_1)}{N_3(F_1)} = \frac{p_1}{\overline{BF_1}\,.\cos\alpha}, \quad \triangle BA'F_1 \sim \triangle A'CD_1,$$

pročež

$$\frac{p_1}{BF_1} = \frac{A'C}{BA'}, \quad BA' = h_1 \operatorname{cotg}\beta,$$

$$A'C = h_1 \operatorname{cotg}\gamma, \quad h_1 \equiv A'A;$$

$$\frac{p_1}{BF_1} = \frac{h_1 \operatorname{cotg}\gamma}{h_1 \operatorname{cotg}\beta};$$

$$\frac{N_2(F_1)}{N_3(F_1)} = \frac{\operatorname{cotg}\gamma}{\operatorname{cotg}\beta\cos\alpha} = \frac{\cos\gamma\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma},$$

$$\mu = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta - \cos\alpha\sin\gamma} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha\cos\gamma}.$$

Jest tedy

$$Q_1 \equiv N_1 \sin\alpha\cos\gamma - N_2\cos\beta\sin\gamma + N_3\sin\gamma\cos\gamma = 0,$$

podobně

$$Q_2 \equiv N_1\sin\alpha\cos\beta + N_2\sin\beta\cos\beta - N_3\sin\beta\cos\gamma = 0.$$

Ježto přímka L_1 prochází body D_1, E_1, jest možno její rovnici $L_1 = 0$ psáti v obojím tvaru:

$$N_2 - \lambda_1 P_1 \equiv \lambda_2 N_3 - \lambda_3 P_2$$

a tedy

$$N_2 - \lambda_1 \{N_1 \sin\alpha \sin\gamma + N_2 \cos\beta \cos\gamma - N_3 \sin\gamma\} \equiv \lambda_2 N_3$$
$$- \lambda_3 \{N_1 \sin\alpha \sin\beta - N_2 \cos^2\beta + N_3 \cos\beta \cos\gamma\}$$
$$N_1 \{- \lambda_1 \sin\gamma + \lambda_3 \sin\beta\} \sin\alpha + N_2 (1 - \lambda_1 \cos\beta \cos\gamma$$
$$- \lambda_3 \cos^2\beta) + N_3 (\lambda_1 \cos^2\gamma - \lambda_2 + \lambda_3 \cos\beta \cos\gamma) \equiv 0,$$

odtud

$$\lambda_1 \sin\gamma = \lambda_3 \sin\beta,\ \cos\beta\,(\lambda_1 \cos\gamma + \lambda_3 \cos\beta) = 1,$$
$$(\lambda_1 \cos^2\gamma = \lambda_2 - \lambda_3 \cos\beta \cos\gamma)$$
$$\lambda_3 = \lambda_1 \frac{\sin\gamma}{\sin\beta};\ \lambda_1 = \frac{\sin\beta}{\cos\beta \sin(\beta + \gamma)} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha \cos\beta},$$
$$\lambda_3 = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha \cos\beta},\ \left(\lambda_2 = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\right)$$
$$N_2 - \frac{\sin\beta}{\sin\alpha \cos\beta} \{N_1 \sin\alpha \sin\gamma + N_2 \cos\beta \cos\gamma - N_3 \cos^2\gamma\} = 0$$
$$N_2 \sin\alpha \cos\beta - N_1 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma - N_2 \cos\beta \sin\beta \cos\gamma$$
$$+ N_3 \sin\beta \cos^2\gamma = 0$$
$$\sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\beta \cos\gamma = \cos\beta \{\sin(\beta + \gamma) - \sin\beta \cos\gamma\}$$
$$= \cos^2\beta \sin\gamma.$$

Jest tedy

$$L_1 \equiv N_1 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma - N_2 \cos^2\beta \sin\gamma - N_3 \sin\beta \cos^2\gamma = 0.$$

Dosaďme do této rovnice souřadnice bodův F_1 a G_1! I dostaneme

$$L_1 (F_1) \equiv N_1 (F_1) \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma - N_2 (F_1) \cos^2\beta \sin\gamma$$
$$- N_3 (F_1) \sin\beta \cos^2\gamma;$$
$$- N_1 (F_1) = \overline{BF_1} \cos\gamma = \overline{BA'} \sin\gamma \cos\gamma,$$
$$- N_1 (F_1) = h_1 \operatorname{cotg}\beta \sin\gamma \cos\gamma;\ - N_2 (F_1) = p_1 = h_1 \cos\gamma;$$
$$- N_3 (F_1) = \overline{BF_1} \cos\alpha = h_1 \operatorname{cotg}\beta \sin\gamma \cos\alpha$$
$$- L_1 (F_1) \equiv h_1 \left\{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \frac{\cos\beta \sin\gamma \cos\gamma}{\sin\beta_1}\right.$$
$$\left. - \cos^2\beta \sin\gamma \cos\gamma - \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma \cos^2\gamma\right\}$$
$$- L_1 (F_1) \equiv h_1 \cos\beta \sin\gamma \cos\gamma\, [\sin\alpha \sin\gamma - \cos\beta - \cos\alpha \cos\gamma]$$
$$= h_1 \cos\beta \sin\gamma \cos\gamma\, [- \cos\beta - \cos(\alpha + \gamma)]$$
$$= h_1 \cos\beta \sin\gamma \cos\gamma\, [- \cos\beta + \cos\beta] = 0$$
$$L_1 (F_1) = 0,$$

leží tedy bod F_1 na přímce L_1, určené body D_1, E_1. Podobně se dokáže, že $L_1(G_1) = 0$. Leží tedy všecky čtyři body D_1, E_1, F_1, G_1 na jedné přímce L_1, jejíž rovnice jest

$$L_1 \equiv N_1 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma - (N_2 \cos^2\beta \sin\gamma + N_3 \sin\beta \cos^2\gamma) = 0.$$

Rovnice přímek L_2 a L_3 obdržíme cyklickou záměnou:

$$L_2 \equiv N_2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma - (N_3 \cos^2\gamma \sin\alpha + N_1 \sin\gamma \cos^2\alpha) = 0$$

$$L_3 \equiv N_3 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma - (N_1 \cos^2\alpha \sin\beta + N_2 \sin\alpha \cos^2\beta) = 0.$$

Tyto tři přímky protínají se v jednom bodě jen tehdy, když determinant

$$\varDelta \equiv \begin{vmatrix} \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma & -\cos^2\alpha \sin\gamma & -\cos^2\alpha \sin\beta \\ -\cos^2\beta \sin\gamma & \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma & -\sin\alpha \cos^2\beta \\ -\sin\beta \cos^2\gamma & -\sin\alpha \cos^2\gamma & \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \end{vmatrix}$$

bude roven 0. Jednoduchým výpočtem obdržíme

$$\varDelta = \tfrac{1}{4} \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma.$$

$\varDelta$ bude rovno 0 jen pro *trojúhelník pravoúhlý*, a tedy jen v trojúhelníku pravoúhlém protínají se přímky L_1, L_2, L_3 v jednom bodě, jenž se sjednocuje s bodem *Lemoineovým.*

Čtyrúhelník $AE_1A'D_1 \backsim A'G_1HF_1$, a oba jsou tětivové. Střed podobnosti je bod J.

$$\triangle AD_1E_1 \backsim \triangle A'F_1G_1, \quad AD_1 = h_1 \sin\gamma, \quad AE_1 = h_1 \sin\beta$$

$$AE_1 : AD_1 = \sin\beta : \sin\gamma = b : c.$$

Z této úměry plyne, že

$$\triangle AD_1E_1 \backsim \triangle ABC \text{ (II.)},$$

pročež

$$\sphericalangle AD_1E_1 = \beta, \quad \sphericalangle AE_1D_1 = \gamma$$

$$DE_1 : AE_1 = \sin\alpha : \sin\beta,$$

$$D_1E_1 = AE_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = h_1 \sin\alpha, \quad h_1 = A'A.$$

$$\triangle ABC \backsim \triangle AD_1E_1 \backsim \triangle A'F_1G_1.$$

Podobně se dokáže, že

$$\triangle ABC \backsim \triangle E_2BD_2$$
$$\triangle ABC \backsim \triangle D_3E_3C.$$

Jest tedy

$$\triangle AD_1E_1 \backsim \triangle E_2BD_2 \backsim \triangle D_3E_3C \backsim \triangle ABC.$$

Jako jest

$$D_1E_1 = h_1 \sin \alpha,$$

tak jest

$$D_2E_2 = h_2 \sin \beta,\ D_3E_3 = h_3 \sin \gamma;\ h_2 = B'B,\ h_3 = C'C.$$

Poněvadž

$$h_1 : h_2 : h_3 = \frac{1}{\sin \alpha} : \frac{1}{\sin \beta} : \frac{1}{\sin \gamma},$$

čili

$$h_1 \sin \alpha : h_2 \sin \beta : h_3 \sin \gamma = 1 : 1 : 1,$$

jest

$$h_1 \sin \alpha = h_2 \sin \beta = h_3 \sin \gamma,$$
$$D_1E_1 = D_2E_2 = D_3E_3 = \frac{4\Delta^2}{abc} = \frac{\Delta}{r},$$

$r =$ poloměr kruhu $\triangle ABC$ opsaného.

Budiž Δ plocha trojúhel. ABC, Δ_1, Δ_2, Δ_3 plochy trojúhel. AD_1E_1, E_2BD_2, D_3E_3C.

$$\Delta : \Delta_1 = a^2 : \overline{D_1E_1^2} = a^2 : h_1^2 \sin^2 \alpha = a^2 : (b \sin \gamma)^2 \sin^2 \alpha$$
$$\Delta : \Delta_1 = \sin^2 \alpha : \sin^2 \beta \sin^2 \gamma : \sin^2 \alpha = 1 : \sin^2 \beta \sin^2 \gamma$$
$$\Delta_1 = \Delta \sin^2 \beta \sin^2 \gamma,$$

podobně obdržíme

$$\Delta_2 = \Delta \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha,\ \Delta_3 = \Delta \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$$
$$\Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} : \frac{1}{\sin^2 \beta} : \frac{1}{\sin^2 \gamma} = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2}$$
$$= h_1^2 : h_2^2 : h_3^2.$$

Stejnolehlé strany trojúhelníků těchto mají se k sobě jako

$$h_1 : h_2 : h_2.$$

9.

V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ jest úhlopříčka $AC = n$ půlena úhlopříčkou $BD = m$ v bodě E. Jest dokázati tyto vztahy:

1. $$ad = bc$$

2. $$m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2}.$$

Vypočísti úhel úhlopříček, dány-li dva sousední úhly čtyřúhelníku α, β.

Prof. *Rudolf Hruša.*

Řešení. Zaslal p. *J. Hak*, stud. VI. tř. reálky v Brně.

1. Na úhlopříčce BD zvolme bod G tak, aby $\sphericalangle DAG = \sphericalangle ABC$; pak $\triangle ABC \sim \triangle GAD$, neboť též $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$, ježto jsou to úhly obvodové nad týmž obloukem. Z podobnosti obou trojúhelníků plyne:

$$a : b = \overline{AG} : d.$$

Poněvadž $AG \parallel CD$ a $\overline{AE} = \overline{EC}$, jest

$$\overline{AG} = c.$$

Dosazením do úměry obdržíme pak

$$ad = bc.$$

2. Označme $\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle DCB = \gamma$. Pak z $\triangle DAB$ a $\triangle DCB$ plyne:

$$m^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha$$
$$m^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma;$$

poněvadž

$$\alpha = 2R - \gamma$$

a

$$ad = bc,$$

obdržíme sečtením obou rovnic:

$$2m^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

čili

$$m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2}.$$

3. Kolmice spuštěná ze středu D opsané kružnice na úhlopříčku n má délku

$$p = r \cos \beta,$$

kolmice na úhlopříčku m délku

$$q = r \cos \alpha,$$

poněvadž $\sphericalangle AOC = 2\beta$ a $\sphericalangle DOB = 2\alpha$.

Úhel tvořený oběma kolmicemi při vrcholu O rovná se úhlu φ úhlopříček, a poněvadž bod E půlí tětivu AC, jest $OE \perp AC$, tedy $p = OE$ jest přeponou a q odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku, z něhož vypočteme $\cos \varphi = \frac{q}{p}$, t. j. $\cos \varphi = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$.

10.

Zdroj i cíl světelného paprsku jsou na přeponě trojúhelníku pravoúhlého v odlehlostech a, b od konců jejích, a paprsek se má odraziti na obou odvěsnách a na přímce rovnoběžné s přeponou. Ve které poloze této přímky nabude dráha paprsku extrémní délky? Prof. *Jan Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *Jaroslav Mayer*, stud. VII. tř. gymn. v Praze v Žitné ul.

Budiž p přímka rovnoběžná s odvěsnou AB pravoúhlého trojúhelníku ABC. Paprsek vychází z bodu M na AB ($AM = a$), odrazí se na odvěsně AC, pak na přímce p, pak na odvěsně BC a pak prochází bodem N na AB ($NB = b$). Nejdříve si nalezneme souměrné body M' a N' vzhledem k oběma odvěsnám P a pak sestrojíme bod N'' souměrně sdružený s N' podle přímky p a spojíme jej s bodem M'. Tím nalezneme bod dopadu paprsku na přímku P jakožto průsečík její s přímkou $M'N''$. Délka $M'N''$ nám představuje, jak patrno, délku paprsku.

Délku tu označíme si d, přepona $\overline{AB} = p$ a α jest úhel při A, x vzdálenost přímky p od AB. Jak patrno, jest

$$d^2 = \overline{FE}^2 + (\overline{M'F} + \overline{N'E})^2,$$

značí-li F patu rovnice spuštěné z bodu M' na p, E patu kolmice spuštěné z N'' na p.

$$FE = p - (a - b) \cos 2\alpha$$

$$M'F = x - a \sin 2\alpha, \quad N'E = x - b \sin 2\alpha$$

$$d^2 = [2x - (a + b) \sin 2\alpha]^2 + [p - (a - b) \cos 2\alpha]^2$$

aby nastalo maximum, musí derivace vymizeti.

$$2d\,d' = 4\,[2x - (a + b)\sin 2\alpha] = 0;$$

z toho plyne, že maximum nastane pro

$$x = \frac{a+b}{2}\sin 2a.$$

11.

Tři zrcadlící přímky se dotýkají kruhu pevného. Z nich dvě jsou spolu rovnoběžné a pevné, zdroj i cíl paprsku jsou v odlehlosti a a b od nich na průměru spojujícím jejich body dotykové. Při které poloze třetí přímky bude dráha paprsku nejdelší? Prof. *Jan Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *Josef Kodrle*, stud. VI*a*. tř. reál. v Pardubicích.

Daný pevný kruh měj poloměr r, přímky rovnoběžné buďtež m, n, třetí p. Zdroj Z buď v odlehlosti a od m, cíl C v odlehlosti b od n. Pak sestrojíme délku paprsku takto: Sestrojme bod Z_1 souměrný k Z dle přímky m, k tomuto souměrný Z_2 dle přímky p a k bodu C souměrný C_1 dle n. Pak $\overline{C_1Z_2}$ jest délka paprsku.

Spusťme z bodu C_1 kolmici na $\overline{Z_1Z_2}$. Pata její buď O. Pak v pravoúhlém trojúhelníku C_1OZ_2 jest

$$\overline{C_1Z_2^2} = \overline{C_1O^2} + \overline{OZ_2^2}.$$

Ze středu kružnice S veďme $\overline{SM} = r \perp p$. Pak určíme, je-li x úhel, který přímka p svírá s $\overline{CZ}$, že

$$\overline{C_1O} = (2r + a + b)\,.\cos x,$$

$$\overline{OZ_2} = 2r + (a + r)\,.\sin x - (r + b)\,.\sin x,$$

čili

$$\overline{OZ_2} = 2r + (a - b)\,.\sin x,$$

a dle toho

$$\overline{C_1Z_2^2} = (2r + a + b)^2\,.\cos^2 x + 4r^2 + 4r\,(a - b)\sin x$$
$$+ (a - b)^2 \sin^2 x.$$

Položme $\overline{C_1 Z_2^2} = y$. Pak jde o to, nalézti maximum funkce

$$y = (2r + a + b)^2 \cdot cos^2 x + 4r\,(a - b)\,sin\,x$$
$$+ (a - b)^2\,sin^2 x + 4r^2.$$

Derivace

$$y' = -2\,sin\,x\,cos\,x\,(2r + a + b)^2 + 4r\,cos\,x\,(a + b)$$
$$+ 2\,sin\,x\,cos\,x\,(a - b)^2.$$

Ta pro krajní hodnoty jest rovna nulle. Z toho

$$sin\,x\,[(a - b)^2 - (2r + a + b)^2] + 2r\,(a - b) = 0$$

a tedy

$$sin\,x = -\frac{r\,(a - b)}{2\,(r^2 + ar + br + ab)} = -\frac{r\,(a - b)}{2\,(r + a)\,(r + b)}.$$

Protože (jak snadno lze se přesvědčiti) pro toto x jest $y'' < 0$, nastalo maximum.

12.

Dva úhly α, β mají společný vrchol a dvě jejich ramena svírají úhel pravý. Jest určiti přímku, jež vytíná v obou úhlech stejné plochy. Vyšetřiti též obecně, kdy úhel ramen není pravý. Prof. *Jan Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *Karel Diviš*, stud. VII*a*. tř. r. v Plzni.

K jednoduchému výsledku přijdeme v případě, že zevnější neb vnitřní ramena jsou k sobě kolmá.

Ramena úhlu α buďtež a, a_1, úhlu β b, b_1. Přímka hledaná nechť svírá s jedním z krajních ramen úhel x.

Dle podmínky má býti

$$aa_1\,\frac{sin\,\alpha}{2} = bb_1\,\frac{sin\,\beta}{2},$$

čili

$$\frac{a}{b}\,sin\,\alpha = \frac{b_1}{a_1}\,sin\,\beta. \tag{1}$$

Dle věty sinusové:

$$\frac{a}{b} = \frac{sin\,(R - x)}{sin\,x} = \frac{cos\,x}{sin\,x}$$

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{sin\,(x + \alpha)}{sin\,[R - (x + \beta)]} = \frac{sin\,(x + \alpha)}{cos\,(x - \beta)}.$$

Dosazením do rovnice (1) obdržíme

$$cotg\ x\ sin\ \alpha = \frac{sin\ (x+\alpha)}{cos\ (x-\beta)}\ sin\ \beta.$$

Z toho

$$tg\ x = \sqrt{\frac{tg\ \alpha}{tg\ \beta}}.$$

13.

Určete geometrické místo vrcholu trojúhelníku, jehož těžnice příslušná ku stálé základně jest střední měřickou úměrnou mezi oběma rameny. Dr. *J. Zahradníček.*

Řešení. Zaslal p. *Jan Částka*, studující III. roč. vyš. prům. školy oddělení strojnického v Plzni.

V pravoúhlé soustavě souřadnic mějtež vrcholy tyto souřadnice: $A\left(-\frac{c}{2},\ 0\right)$; $B\left(+\frac{c}{2},\ 0\right)$ a $C\ (x,\ y)$ ($c =$ délka základny).

Těžnice $\overline{CO}$ má délku $= \sqrt{x^2+y^2}$ a ramena: $\overline{AC}\dots \sqrt{\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2}$ a $\overline{BC}\dots\sqrt{\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2}$. Danou podmínku

$$\overline{CO}^2 = \overline{AC}\,.\,\overline{BC}$$

lze vyjádřiti ve tvaru

$$x^2+y^2 = \sqrt{\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2}\,.\sqrt{\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2}.$$

Upravením této rovnice obdržíme rovnici hledaného geometrického místa: $x^2 - y^2 = \frac{c^2}{8}$.

Jest tedy hledaným geom. místem *rovnoosá hyperbola o ohniskové vzdálenosti rovné dvojnásobné základně.*

14.

Do daného obdélníku vepsati ellipsu o dané výstřednosti.

Prof. *Rudolf Hruša.*

Řešení dle p. autora.

Označme u, v strany daného obdélníku.

Geometrické místo vrcholů pravých úhlů, jichž ramena se dotýkají ellipsy, jest kruh K, který patrně prochází vrcholy pravého úhlu, t. j. vrcholy obdélníka, a jeho poloměr jest

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{u^2+v^2}.$$

Z rovnic:

$$a^2+b^2=\frac{u^2+v^2}{4}=m^2$$

$$a^2-b^2=e^2$$

vypočteme:

$$a^2=\frac{m^2+e^2}{2},\quad b^2=\frac{m^2-e^2}{2}.$$

Kruh opsaný poloměrem a ze středu obdélníku jest geometrickým místem pat kolmic z ohnisek na tečny ellipsy. Označme průseky toho kruhu se stranou obdélníka P, Q, pak kolmice v bodě P ke straně vedená prochází ohniskem; podobně kolmice v průsecích R, S toho kruhu se stranou sousední jde ohniskem, čímž toto dokonale stanoveno.

Tím úloha úplně řešena.

Celkem máme 4 takové kolmice jdoucí ohnisky, jež stanoví celkem 4 body svými průseky. Dané úloze vyhovují celkem 2 ellipsy.

Omezení úlohy plyne z horních formulí.

15.

Mnohoúhelník jest opsán parabole. Vzdálenosti jeho vrcholů od ohniska buďtež $v_1, v_2, \ldots v_n$, *průvodiči bodů, v nichž se strany paraboly dotýkají,* $r_1, r_2, \ldots r_n$. *Pak jest*

$$v_1\, v_2 \ldots v_n = r_1\, r_2 \ldots r_n.$$

Dr. *Karel Čupr.*

Řešení. Zaslal p. *Ferdinand Soukup,* stud. VIII. tř. gymn. v Praze v Žitné ul.

Zvolme na parabole n bodů $A_1\,(x_1, y_1)$ $A_2\,(x_2, y_2) \ldots A_n\,(x_n, y_n)$, a v nich veďme tečny.

B_k nechť jest průsečík tečen v bodech A_k a A_{k+1} vedených, při čemž B_n je průsečíkem tečen, vedených body A_n a A_1.

Pak průvodič bodu A_k

$$r_k = \sqrt{\left(x_k - \frac{p}{2}\right)^2 + y_k^2} = \sqrt{x_k^2 - px_k + \frac{p^2}{4} + y_k^2}$$

$$= \frac{1}{2p}(y_k^2 + p^2).$$

Rovnice tečen v bodech A_k a A_{k+1} vedených jsou:

$$yy_k = p(x + x_k), \quad yy_{k+1} = p(A + x_{k+1}),$$

a jich průsečík má souřadnice:

$$x = \frac{y_k - y_{k+1}}{2}, \quad y = \tfrac{1}{2}(y_k + y_{k+1}).$$

Pak

$$v_k^2 = \tfrac{1}{4}\left(\frac{y_k y_{k+1}}{p} - p\right)^2 + \tfrac{1}{4}(y_k + y_{k+1})^2$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\frac{y_k^2 y_{k+1}^2}{p^2} + p^2 + y_k^2 + y_{k+1}^2\right)$$

$$= \tfrac{1}{4} p^2 (y_k^2 + p^2)(y_{k+1}^2 + p^2) = r_k r_{k+1},$$

tudíž

$$v_k = \sqrt{r_k r_{k+1}}.$$

Položíme-li za $k = 1, 2, \ldots n$ a znásobíme-li, obdržíme:

$$v_1 v_2 v_3 \ldots v_n = r_1 r_2 r_3 \ldots r_n,$$

jakž bylo dokázati.

16.

Průvodiči bodu E na ellipse protínají tuto ještě v bodech E_1 a E_2. Jest nalézti geometrické místo bodů půlících tětivu E_1E_2. Proveďte diskusi oné křivky. Dr. Karel Čupr.

Řešení. Dle p. *J. Kauckého*, stud. VII. tř. r. na Kladně, a p. *Jaroslava Mayera*, stud. VII. tř. gymn. v Praze v Žitné ul.

Ellipsa budiž dána rovnicí

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \tag{1}$$

Souřadnice bodu E označme (x_0, y_0).

Pak mají průvodiči E_0F_1' a E_0F_2 rovnici

$$y = \frac{y_0}{x_0 - e}(x - e) \tag{2}$$

$$y = \frac{y_0}{x_0 + e}(x + e). \tag{3}$$

Průvodič E_0F_1 protíná ellipsu ještě v bodě E_1' (x_1, y_1)' průvodič E_0F_2 v bodě E_2 (x_2, y_2).

Abychom obdrželi souřadnice bodu E_1, vylučme z rovnic (1) a (2) x. Z kvadratické rovnice, kterou takto dostaneme, bude plynouti

$$x_0 + x_1 = -\frac{2ea^2y_0^2}{b^2(a^2 + e^2 + 2ex_0)},$$

a odtud, uvážíme-li, že

$$b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2,$$

$$x_1 = \frac{2a^2e - (a^2 + e^2)x_0}{a^2 + e^2 - 2ex_0}.$$

Z rovnice (2) pak obdržíme

$$y_1 = -\frac{b^2y_0}{a^2 + e^2 - 2ex_0}.$$

Podobným postupem dostaneme z rovnic (1) a (3)

$$x_2 = \frac{-2a^2e - (a^2 + e^2)x_0}{a^2 + e^2 - 2ex_0},\quad y_2 = -\frac{b^2y_0}{a^2 + e^2 + 2ex_0}.$$

Pro souřadnice bodu $P(\xi, \eta)$ obdržíme pak

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b^2x_0}{(a^2 + e^2)^2 - 4e^2x_0^2}$$

$$\eta = \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{b^2(a^2 + e^2)y_0}{(a^2 + e^2)^2 - 4e^2x_0^2}.$$

Dělením těchto rovnic dostaneme vztah

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{a^2 + e^2}{b^2}\frac{y_0}{x_0}.$$

Z této poslední rovnice a z rovnice

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

obdržíme

$$x_0^2 = \frac{a^2 (a^2 + e^2)^2 \xi^2}{(a^2 + e^2)^2 \xi^2 + a^2 b^2 \eta^2},$$

z čehož plyne

$$\xi = -\frac{b^2}{(a^2 + e^2)^2} \cdot \frac{(a^2 + e^2)^2 \xi^2 + a^2 b^2 \eta^2}{b^2 \xi^2 + a^2 \eta^2} \cdot x_0$$

$$\eta = -\frac{1}{a^2 + e^2} \cdot \frac{(a^2 + e^2)^2 \xi^2 + a^2 b^2 \eta^2}{b^2 \xi^2 + a^2 \eta^2} \cdot y_0.$$

Dosazením za x_0 a y_0 do rovnic ellipsy obdržíme rovnici hledané křivky:

$$\frac{(a^2 + e^2)^2}{a^2 b^4} (b^2 \xi^2 + a^2 \eta^2)^2 = (a^2 + e^2)^2 \xi^2 + a^2 b^2 \eta^2.$$

17.

Z bodu M vedeny tečny k ellipse, jež tvoří s příslušnou polárou trojúhelník, mající těžiště na obvodě ellipsy. Určiti jest geometrické místo bodu M. Dr. *Vladimír Živanský.*

Řešení. Zaslal p. *J. Kaucký*, stud. VII. tř. reálky na Kladně.

Daná ellipsa nechť má rovnici

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \qquad (\alpha)$$

bod M souřadnice $M(x_0 y_0)$.

Body dotyčné tečen vedených z pólu M k ellipse leží na poláře

$$b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = a^2 b^2. \qquad (\beta)$$

Nazveme body dotyčné $T_1 (x_1 y_1)$ a $T_2 (x_2 y_2)$. Pak těžiště trojúhelníku $MT_1 T_2$ má souřadnice

$$\xi = \frac{x_0 + x_1 + x_2}{3} \quad (1) \quad \text{a} \quad \eta = \frac{y_0 + y_1 + y_2}{3}. \qquad (2)$$

Má-li ležeti těžiště na ellipse, musí býti splněna podmínka

$$b^2 \xi^2 + a^2 \eta^2 = a^2 b^2.$$

Řešíme-li soustavu rovnic (α) a (β), dostáváme, že

$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2 b^2 x_0}{b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2}$$

a

$$y_1 + y_2 = \frac{2a^2 b^2 y_0}{b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2}.$$

Dosadíce tyto hodnoty do rovnic (1) a (2) dostáváme

$$\xi = \frac{x_0}{3} \frac{(b^2x_0^2 + a^2y_0^2 + 2a^2b^2)}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2}$$

$$\eta = \frac{y_0}{3} \cdot \frac{(b^2x_0^2 + a^2y_0^2 + 2a^2b^2)}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2}.$$

Ty hodnoty musí vyhovovati rovnici ellipsy, tedy

$$b^2x_0^2 (b^2x_0^2 + a^2y_0^2 + 2a^2b^2)^2 + a^2y_0^2 (b^2x_0^2 + a^2y_0^2 + 2a^2b^2)^2$$
$$= 9 (b^2x_0^2 + a^2y_0^2)^2 \,.\, a^2b^2.$$

Krátíme-li výrazem $b^2x_0^2 + a^2y_0^2$,

dostáváme po snadné úpravě rovnici geometrického místa

$$(b^2x^2 + a^2y^2)^2 - 5 (b^2x^2 + a^2y^2) a^2b^2 + 4a^4b^4 = 0.$$

Levá strana této rovnice jest polynom druhého stupně v $b^2x^2 + a^2y^2$. Možno ji tedy rozložiti na součin dvou činitelů stupně druhého. Ono geometrické místo rozpadá se ve dvě kuželosečky

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$
$$b^2x^2 + a^2y^2 - 4a^2b^2 = 0.$$

Prvý případ jest triviální: jest to daná ellipsa. Druhý případ poskytuje za hledané geometrické místo souosou ellipsu v poloosách dvojnásobných.

Řešení 2. Zaslal p. *Jan Částka*, stud. III. roč. vyš. prům. školy stroj. odděl. v Plzni.

Spojnice bodu M se středem ellipsy nechť protne ellipsu v bodech T a V a poláru bodu M v bodě N. Body N, M, T a V tvoří harm. čtveřinu bodovou a platí tudíž pro ně úměra (přihlížíme-li pouze k absolutním hodnotám úseček)

$$VM \,.\, TM = VN : TN \,.$$
$$VT + 2NT : 2NT = VT - NT : NT$$
$$VT = HNT.$$

Bod M má tudíž dvojnásobnou vzdálenost od středu jako bod T.

Hledaným geometrickým místem jest tedy ellipsa s danou ellipsou souosá o osách dvojnásobných.

18.

Vedeme-li z libovolného bodu pevné přímky rovnoběžné s osou pořadnic normály k parabole $y^2 = 2px$, určují jich paty trojúhelníky, jež mají společné těžiště na ose paraboly.

Dr. *Vladimír Živanský.*

Řešení. Zaslal p. *J. Kaucký*, stud. VII. tř. r. na Kladně.

Má-li pevná přímka rovnici

$$x - x_0 = 0,$$

lze libovolný její bod označiti (x_0, y_0), při čemž x_0 je pevné, y_0 proměnné.

Paty normál splňují systém rovnic

$$y^2 = 2px$$
$$p(y_0 - y) + y(x_0 - x) = 0.$$

Eliminací x obdržíme

$$y^3 + 2p(p - x_0)y - 2p^2 y_0 = 0.$$

Jsou-li kořeny této rovnice y_1, y_2, y_3, bude

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0$$
$$y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 = 2p(p - x_0).$$

Odtud

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = (y_1 + y_2 + y_3)^2 - 2(y_1 \eta_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1)$$
$$= -4p(p - x_0) = 4p(x_0 - p).$$

Souřadnice těžiště trojúhelníka (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) jsou

$$\xi = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{6p} = \tfrac{2}{3}(x_0 - p);$$

$$\eta = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = 0.$$

Jest tedy těžiště pevné a na ose x, mění-li se y_0.

19.

Určiti geometrické místo průsečíků normál k parabole vedených v bodech, kde ji protínají přímky svazku jdoucí ohniskem.

Dr. *Vladimír Živanský.*

Řešení 1. Zaslal p. *Jaroslav Mayer*, stud. VII. tř. gymn. v Praze v Žitné ul.

Přímku procházející ohniskem paraboly $y^2 = 2px$ můžeme psáti ve tvaru $x - \frac{p}{2} = yt$, kde t je proměnný parametr.

Průsečíky její s parabolou mají pořadnice y_1, y_2 dané rovnicí

$$\frac{p}{2} + yt = \frac{y^2}{2p}$$

aneb

$$(1)\quad y^2 - 2pty - p^2 = 0.$$

Normály v bodech (x_1, y_1) a (x_2, y_2) jsou

$$N_1 \equiv y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1),$$

$$N_2 \equiv y - y_2 = \frac{y_2}{p}(x - x_2).$$

Průsečík jich má souřadnice:

$$\xi = p + \frac{1}{2p}(y_1 + y_2)^2 - \frac{y_1 y_2}{2p},$$

$$\eta = -\frac{1}{2p^2} y_1 y_2 (y_1 + y_2).$$

Z rovnice (1) dosadíme

$$y_1 + y_2 = 2pt$$
$$y_1 y_2 = -p^2,$$

načež dostaneme

$$\xi = \tfrac{3}{2}p + 2pt^2, \quad \eta = pt.$$

Vyloučíme t a obdržíme rovnici

$$\eta^2 = \frac{p}{2}(\xi - \tfrac{3}{2}p).$$

Jest to parabola s vrcholem $(\frac{3}{2}p, 0)$ a parametrem $\frac{p}{4}$.

Řešení 2. Zaslal pan *Jan Částka*, stud. III. roč. vyš. prům. šk., odd. stroj., v Plzni.

Označme N průsečík normál vedených v koncových bodech A, B tětivy jdoucí ohniskem k parabole. Tečny v bodech A, B

protínají se v bodě R na přímce řídící. Čtyřúhelník $ANBR$ jest pravoúhlý rovnoběžník. RN jest sdruženým průměrem tětivy AB. Označíme-li C průsečík RN a AB, P průsečík paraboly RN, bude $RC = CN$, $RP = PC$, tedy $RN = 4RP$.

Rovnice dané paraboly budiž $y^2 = 2px$, rovnice přímky RN $y = c$. Ta protne parabolu v bodě P $\left(\frac{c^2}{2p}, c\right)$ a bod hledaného místa N má vzhledem k tomu, že $RN = 4RP$ a že přímka RN jest rovnoběžna s osou paraboly

$$x = 2\frac{c^2}{p} + 3\frac{p}{2}, \ y = c.$$

Vyloučením c dostaneme

$$y^2 = \frac{p}{2}(x - \tfrac{3}{2}p).$$

Geometrické místo průsečíků normál jest tedy parabola, jež má vrchol čtyřikrát tak vzdálený od řídící přímky jako vrchol dané paraboly a jejíž parametr jest čtvrtina parametru paraboly dané.

20.

Najíti na parabole bod takový, aby normála v něm sestrojená omezovala úseč nejmenší plochy.

Dr. *Vladimír Živanský.*

Řešení. Zaslal p. *Hubert Blažek*, stud. VII. tř. reálky v Kroměříži.

Označíme-li souřadnice hledaného bodu (ξ, η), obdržíme pro normálu v tom bodě rovnici:

$$y - \eta = -\frac{\eta}{p}(x - \xi). \qquad (1)$$

Řešením rovnice (1) s rovnicí paraboly $y^2 = 2px$, obdržíme pro pořadnici druhého bodu průsečného hodnotu:

$$y = -\left(\frac{2(p^2 + \eta^2)}{\eta}\right).$$

Dosazením do vzorce pro plochu úseče obdržíme:

$$P = \frac{1}{12p}\left[\frac{2(p^2+\eta^2)}{\eta}\right]^3;$$

neboli

$$\sqrt[3]{\tfrac{3}{2}pP} = \frac{p^2+\eta^2}{\eta};$$

položme

$$\sqrt[3]{\tfrac{3}{2}pP} = Q;$$

rovnici poslední pak můžeme psáti ve tvaru:

$$\eta^2 - Q\eta + p^2 = 0,$$

z níž vypočítáme

$$\eta = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 - 4p^2}}{2}.$$

Reálné řešení žádá $Q^2 \geq 4p^2$, čili minimální $Q = \pm 2p$, z čehož plyne příslušné

$$\eta = \frac{\pm 2p}{2} = \pm p;$$

tedy $\xi = \frac{1}{2}p$.

Hledaný bod na parabole má souřadnice $(\frac{1}{2}p, \pm p)$; čili hledaný bod jest jedním z koncových bodů tětivy (parametru), jdoucí kolmo k ose ohniskem.

21.

Určete součet řady

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n}.$$

Dr. *J. Zahradníček.*

Řešení. Zaslal p. *Karel Pohanka*, stud. VII. tř. gymn. v Praze, v Žitné ul.

1. Užijme vzorce

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1};$$

danou řadu pišme pak ve tvaru

$$S = n\left[1 + \frac{n-1}{1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots + 1\right] =$$

$$= n\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \ldots + \binom{n-1}{n-1}\right].$$

Výraz v závorce jest

$$(1 + 1)^{n-1};$$

součet řady je tedy

$$S = n2^{n-1}.$$

2. Differencujme řadu

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

dle x, položme pak $x = 1$ a potvrdíme rovněž předešlý výsledek.

22.

Nalézti obecný tvar čísel, nekončících nullou, jichž čtverce mají na konci dvě stejné číslice. Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení. Zaslal p. *Vladimír Škarda*, stud. V. tř. gymn. v Praze v Žitné ul.

Čísla musí býti aspoň dvojciferná, tudíž tvaru

$$(10a + b)^2 = 10^2a^2 + 2\,.\,10ab + b^2,$$

kdež poslední dva členy mají dáti v zakončení stejné číslice. b jest jednociferné, a jest i víceciferní. Je-li $b^2 = 1$, 81, pak $b = 1$, 9, což jsou čísla lichá. Výrazy $2ab$, $2ab + 8$ jsou sudé, čímž odpadá opakování jednotky. Podobně jest tomu, když $b^2 = 9$, 49, $b = 3$, 7, aneb když $b^2 = 16$, 36, $b = 4$, 6, $b^2 = 25$, $b = 5$. Zbývá tedy jen případ $b^2 = 4$, 64, $b = 2$, 8. Pak $2ab = 4a$, $16a + 6$. V prvém případě a končí 1 neb 6, v druhém a končí 3 neb 8. Odpovídající čísla jsou v prvém případě: 12, 112, 212, ... nebo 62, 162, 262 ..., tedy tvaru $50c + 12$, kdež $c = 0, 1, 2, \ldots$; v druhém případě 38, 138, 238, ... aneb 88, 188, 288, ..., což jest tvar $50c - 12$, je-li $c = 1, 2, 3, \ldots$

23.

Sestrojiti rovnoramenný trojúhelník, je-li dána jeho výška a součet základny a ramene. Inž. *J. Langr.*

Řešení 1. Dle p. autora.

Budiž ABC žádaný rovnoramenný trojúhelník o základně AB a vrcholu C. Prodlužme základnu učinivše $\overline{BD} = BC$. Vrcholem C veďme rovnoběžku s AD a nanesme na ni $\overline{CE} = \overline{BD}$. Tím vzniká rovnoramenný lichoběžník $ADEC$, jehož kratší základna $\overline{CE}$ jest rovna ramenům a delší základna AD součtu základny a ramene rovnoramenného trojúhelníka. Rozpůlme základnu AD bodem F, základnu CE bodem G. Jest vidno, že

$$\overline{CG} : \overline{CA} = 1 : 2.$$

Z této úvahy vyplývá následující sestrojení trojúhelníka hledaného. Budiž AD daný součet základny a ramene trojúhelníka. Rozpůlme AD bodem F, vztyčme v F kolmici ku AD, nanesme na tuto FG rovnu dané výšce trojúhelníka a bodem G veďme rovnoběžku s AD. Na této rovnoběžce musí se nalézati vrchol C trojúhelníka. Tento vrchol vyhovuje podmínce

$$\overline{CG} : \overline{CA} = 1 : 2.$$

Geom. místem všech bodů, jichž vzdálenosti od bodů G a A jsou v poměru $1 : 2$, jest kružnice, jejíž střed leží na spojnici AG a jejíž poloměr známým způsobem se snadno najde. Tato kružnice protíná rovnoběžku vedenou bodem G v hledaném vrcholu C. Učinivše pak $AC = BC$ (B na AD), dostáváme hledaný $\triangle ABC$, který, jak se snadno můžeme přesvědčiti, vyhovuje daným podmínkám.

Řešení 2. Zaslal p. *Jaroslav Mayer*, stud. VII. tř. gymn. v Praze v Žitné ulici.

Sestrojme na základně bod D tak, aby $BD = BC$. Vrchol C bude ležeti na rovnoběžce se základnou vedené ve vzdálenosti v. Máme najíti na přímce p takový bod C, aby přímka $\overline{AC}$ svírala s P úhel dvakrát tak veliký, jako s ní svírá přímka DC.

Nalezneme bod D_1, symmetrický k D vzhledem k p kolem D, poloměrem rovným výšce, opíšeme kružnici a vedeme z A tečnu k ní. Průsek této tečny s přímkou p jest hledaný vrchol C.

Řešení, jež odpovídá druhé tečně vedené z A, nevyhovuje; řeší tutéž úlohu při daném rozdílu základny a ramene.

24.

Sestrojiti čtyřúhelník, je-li dána jedna jeho strana, oba protilehlé vnitřní úhly a obě úhlopříčny. Jedna z úhlopříčen se rovná dané straně. Inž. *J. Langr.*

Řešení. Zaslal p. *Vojtěch Bláha*, stud. VII. tř. r. v Nov. Městě na Moravě.

Buď $ABCD$ hledaný čtyřúhelník. Dáno jest $\overline{AB} = a$, $\overline{BD} = a$, $\overline{AC} = u$, $\sphericalangle BCD = \gamma$, $\sphericalangle CDA = \delta$. — Opišme z vrcholu B kružnici K_1 poloměrem a. Kružnice tato obsahuje vrcholy A, D a stranu CD protíná v bodě E. Je zřejmé, že lze kružnici K_1 považovati za geom. místo vrcholu všech úhlů δ, jichž ramena procházejí body A a E. Nad body B a E lze pak sestrojiti kružnici K_2, která jest geom. místem vrcholů všech úhlů γ (nebo $\pi - \gamma$), jichž ramena procházejí stálými body B *a* E. Z této úvahy vyplývá násl. řešení:

Buď AB daná strana a. Z B opišme poloměrem a kruž. K_1; sestrojme pomocný úhel δ, jehož jedno rameno jde bodem A a jehož vrchol leží na kružnici K_1. Druhé rameno tohoto úhlu seče kružnici v bodě E. Je zřejmo, že všechny úhly, jichž vrcholy leží na K_1 a jichž ramena jdou body A a E, rovnají se úhlu δ. Sestrojme dále nad úsečkou BE kružnici K_2, jež jest geom. místem vrcholu úhlu δ (resp. $\pi - \delta$), jehož ramena procházejí body B a E. Na této kružnici musí se nacházeti vrchol C. Poněvadž $AC = u$ je dáno, stačí z A opsati kružnici K_3 poloměrem u, která protíná K_2 v bodě C. Spojnice CE seče pak kružnici K_1 v bodě D. Čtyřúhelník $ABCD$ vyhovuje žádaným podmínkám.

Důkaz vychází z počáteční úvahy.

25.

Sestrojiti pravoúhlý lichoběžník, jehož úhlopříčky stojí na sobě kolmo a úseky úhlopříček při šikmé straně jsou m, $2m$.

Inž. *B. Pivnička.*

Řešení. Zaslal p. *Miloš Eliáš*, stud. 6. tř. gymn. v Praze v Žitné ul.

Úhly při vrcholech A a D buďtež pravé, průsečík úhlopříček označme E. Nechť jest pak

$$EB = 2m, \quad EC = m.$$

Označme

$$AE = p, \quad ED = q.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku ACD plyne

$$q^2 = pm$$

a z pravoúhlého trojúhelníku DAB

$$p^2 = q \,.\, 2m$$

Z těchto dvou rovnic plyne

$$p^3 = 4m^3$$

a tedy

$$p = m\sqrt[3]{4}.$$

Z toho jest viděti, že hledanou konstrukci není možno provésti přesně pravítkem a kružítkem.

Avšak

$$\sqrt[3]{4} = 1{\cdot}5874$$

$$\sqrt{5^2 - 2^2} - 3 = 1{\cdot}5826,$$

takže jest

$$\sqrt[3]{4} \doteq \sqrt{5^2 - 2^2} - 3 \quad \text{s chybou } 0{\cdot}3\,\%.$$

Tento poslední výraz lze pak snadno pravítkem a kružítkem sestrojiti.

26.

Může býti trojúhelník tvořený průsečíkem výšek, těžnic a os souměrnosti úhlů pravoúhlý, rovnoramenný, rovnostranný? Jakým vztahem jsou vázány strany toho trojúhelníku?

Inž. *B. Pivnička.*

Řešení dle pana autora.

Označme V průsečík výšek, T průsečík těžnic a S průsečík úhlových symmetrál daného trojúhelníku.

Spojnice VT udává Eulerovu přímku, na které leží za V střed kružnice opsané O $\left(OT = \frac{VT}{2}\right)$. V polovině VO je střed kružnice devíti bodů O' (poloměr její jest roven polovině poloměru kružnice opsané, který označíme r).

Ježto kružnice vepsaná a devíti bodů se dotýkají vnitřně v jednom bodu, jest jejich centrála

$$p_1 = SO' = \frac{r}{2} - \varrho = \frac{r - 2\varrho}{2},$$

kde ϱ je poloměr kružnice vepsané. Centrála kružnice opsané a vepsané SO jest $p_2 = \sqrt{r^2 - 2\varrho r}$.

Řešením rovnic

$$\frac{r - 2\varrho}{2} = p_1,$$

$$\sqrt{r^2 - 2\varrho r} = p_2$$

dostaneme hodnoty pro

$$r = \frac{p_2^2}{2p_1},$$

$$\varrho = \frac{p_2^2 - 4p_1^2}{4p_1} = \frac{(p_2 - 2p_1)(p_2 + 2p_1)}{4p_1}.$$

Ježto musí býti $\varrho > 0$, musí býti též $p_2 > 2p_1$. Vyjádřeme p_1 a p_2 délkami stran $\triangle\ VTS$: $VT = \overline{a}$, $VS = \overline{b}$, $TS = \overline{c}$.

$$p_1^2 = \frac{\overline{a^2}}{16} + \overline{c^2} - \frac{\overline{ac}}{2} \cos \overline{\beta},$$

$$p_2^2 = \frac{\overline{a^2}}{4} + \overline{c^2} + \overline{ac} \cos \overline{\beta}.$$

Ze vztahu

$$p_2^2 > 4p_1^2$$

$$\overline{c^2} + \overline{ac} \cos \beta > 4\overline{c^2} - 2\overline{ac} \cos \beta$$

$$\overline{a} \cos \beta > \overline{c}$$

plyne pak

$$\cos \bar{\beta} > \frac{\bar{c}}{\bar{a}}.$$

$\cos \bar{\beta}$ vyjádřeme větou cosinusovou

$$\bar{b}^2 = \bar{a}^2 + \bar{c}^2 - 2\bar{a}\bar{c} \cos \bar{\beta}.$$

I obdržíme

$$\cos \bar{\beta} = \frac{\bar{a}^2 + \bar{c}^2 - \bar{b}^2}{2\bar{a}\bar{c}},$$

a tedy

$$\bar{a}^2 > \bar{b}^2 + \bar{c}^2.$$

Z tohoto vztahu snadnou úvahou plyne, že trojúhelník ten nemůže býti ani rovnostranný ani pravoúhlý. Může býti rovnoramenný při $\bar{b} = \bar{c}$ pro $\bar{a} > \bar{b}\sqrt{2}$. Pak $a = 2b \cos \beta$, tedy $\cos \beta > \frac{\sqrt{2}}{2}$ t. j. $\beta > 45^0$ a tudíž $\alpha < 90^0$ t. j. $\sphericalangle\ VST < 90^0$. $\bar{a}$ nemůže býti ani rovno $\bar{b}$ ani $\bar{c}$.

27.

Odvoditi vztah

$$\frac{tg\, \varrho\, cotg\, r}{sin\, s\, cos\, \sigma} = -\frac{tg \frac{\alpha}{2}\, tg \frac{\beta}{2}\, tg \frac{\gamma}{2}}{tg \frac{a}{2}\, tg \frac{b}{2}\, tg \frac{c}{2}},$$

kdež značí ϱ a r poloměry kružnice vepsané a opsané sférickému trojúhelníku o stranách a, b, c a úhlech α, β, γ; $2s = a + b + c$, $2\sigma = \alpha + \beta + \gamma$. Inž. *B. Pivnička.*

Řešení. Zaslal p. *Jaroslav Mayer*, stud. VII. tř. gymn. v Praze v Žitné ul.

Pro poloměr kružnice vepsané máme vzorec

$$tg\, \varrho = tg \frac{a}{2} \sin (s - a).$$

Dále jest

$$tg \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - c) \sin (s - a)}{\sin s \sin (s - b)}},$$

$$tg \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s - a) \sin (s - b)}{\sin s \sin (s - c)}}$$

a tedy

$$tg\frac{\beta}{2}\,tg\frac{\gamma}{2}=\frac{sin\,(s-a)}{sin\,s}.$$

Jest tudíž

$$\frac{tg\,\varrho}{sin\,s}=tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}\,tg\frac{\gamma}{2}. \tag{1}$$

Pro poloměr kružnice opsané platí

$$cotg\,r=cotg\frac{\alpha}{2}\,cos\,(\sigma-\alpha)$$

a ze vzorců

$$cotg\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{cos\,(\sigma-\gamma)\,cos\,(\sigma-\alpha)}{-cos\,\sigma\,cos\,(\sigma-\beta)}},$$

$$cotg\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{cos\,(\sigma-\alpha)\,cos\,(\sigma-\beta)}{-cos\,\sigma\,cos\,(\sigma\ \ \gamma)}}$$

plyne

$$cotg\frac{b}{2}\,cotg\frac{c}{2}=-\frac{cos\,(\sigma-\alpha)}{cos\,\sigma}$$

a tedy

$$\frac{cotg\,r}{cos\,\sigma}=-cotg\frac{a}{2}\,cotg\frac{b}{2}\,cotg\frac{c}{2} \tag{2}$$

Znásobením rovnic (1) a (2) obdržíme vztah, který jsme měli dokázati.

28.

Čtyřstěn protnouti rovinou, aby řez byl rovnoběžník daného obvodu. Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení. Zaslal p. *Miloš Eliáš*, stud. VI. tř. gymn. v Praze v Žitné ul.

Je-li daný čtyřstěn $ABCD$, pak rovina protíná jej v rovnoběžníku, je-li rovnoběžna s dvěma protějšími hranami, na př. $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ (Vojtěch, Geom. pro V. tř. reál., str. 141, úkol k cv. 4.). Abychom sestrojili rovnoběžník daného obvodu, uvažme, že při zvoleném označení čtyřstěnu a, nazveme-li řez $MNPQ$, jest $\overline{MN}:\overline{AC}=\overline{MD}:\overline{AD}$. Veďme bodem M rovnoběžku s $\overline{AB}$, až protne $\overline{BD}$ v bodě R. Pak $\overline{MD}:\overline{AD}=\overline{DR}:\overline{DB}$, tudíž $\overline{MN}:\overline{AC}=\overline{DR}:\overline{DB}$, což možno přepsati na $(AC-\overline{MN}):$

$\overline{AC} = \overline{MQ} : \overline{DB}$, aneb dále $(\overline{AC} - \overline{MN} - \overline{MQ}) : \overline{MQ} = (\overline{AC} - \overline{BD}) : \overline{BD}$. Jelikož $\overline{MN} + \overline{MQ}$, jest poloviční obvod $\frac{o}{2}$, jest dále $\left(\overline{AC} - \frac{o}{2}\right) : \overline{MQ} = (\overline{AC} - \overline{BD}) : \overline{BD}$, odkudž možno sestrojiti $\overline{MQ}$, čímž jest úloha rozřešena.

Úloha vyžaduje, aby $AC \neq BD$. Je-li $AC = BD$, mají všechny řezy rovnoběžné s AC a BD stejný obvod $= 2AC$.

29.

Vypočísti objem klášterní klenby, je-li dán poloměr r. Objemem oním jest míněna polovina společného prostoru dvou rotačních válců o témž poloměru, jichž osy se protínají pravoúhle. Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení 1. Dle p. *J. Haka*, stud. VI. tř. reálky v Brně a dle p. autora.

Klášterní klenba má za půdorys čtverec, jehož úhlopříčny jsou půdorysy dvou poloellips, v něž se rozpadá průsečná křivka 4. stupně. Každý řez, jehož rovina jest vodorovná, má tvar čtverce (viz ostatně Pithardt-Seifert, Deskr. geom. pro VI. a VII. tř. reálek, str. 59, cv. 75).

Objem klenby možno určiti způsobem Archimedovým vylíčeným v Bydžovského Arithmetice pro V. až VII. tř. šk. reálných, str. 144, následovně: Rozdělme výšku klenby r na n stejných dílů a vodorovnými rovinami rozložme klenbu na vrstvy o výšce $\frac{r}{n}$ a základnách Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 ... Každé vrstvě možno vepsati a opsati pravoúhlý rovnoběžnostěn, načež objem klenby lze nabraditi součtem vepsaných neb opsaných rovnoběžnostěnů tím přesněji, čím n jest větší. Tudíž objem klenby jest, užijeme-li vepsaných rovnoběžnostěnů,

$$V = \frac{r}{n}(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{n-1}).$$

Strany čtverců Z_0, Z_1, Z_2, ... označme y_0, y_1, y_2, ...;
pak

$$y_0 = 2r,$$

$$y_1 = 2\sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{n}\right)^2},$$

$$y_2 = 2\sqrt{r^2 - \left(\frac{2r}{n}\right)^2},$$

$$y_3 = 2\sqrt{r^2 - \left(\frac{3r}{n}\right)^2}, \ldots$$

Tudíž

$$Z_1 = 4\left(r^2 - \frac{r^2}{n^2}\right), \quad Z_2 = 4\left(r^2 - \frac{4r^2}{n^2}\right), \quad Z_3 = 4\left(r^2 - \frac{9r^2}{n^2}\right)\ldots$$

Proto

$$V = \frac{4r^3}{n}\left[n - 1 - \frac{1}{n^2}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \overline{n-1}^2\right)\right];$$

řada $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \overline{n-1}^2$ má však součet

$$\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}$$

(v. Bydžovský, Arithm. pro V. až VII. tř. reálek str. 140). Tedy jest

$$V = \frac{4r^3}{n}\left[n - 1 - \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6n^2}\right]$$

aneb

$$V = 4r^3\left[1 - \frac{1}{n} - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{6}\right].$$

Je-li $lim\ n = \infty$, pak $lim\ \frac{1}{n} = 0$, načež

$$V = 4r^3\left[1 - \frac{1}{3}\right] = \frac{8r^3}{3},$$

což jest jednoduchý výsledek.

Jinak lze počítati objem dle Cavalieriho principu, jak jej líčí Bydžovský, Mathem. pro nejvyš. tř. reálek, str. 105, takto:

$$V = \frac{v}{6}(A + 4S + B),$$

kdež

$$v = r,\ A = (2r)^2,\quad B = 0,\quad S = 4\left(r^2 - \frac{r^2}{4}\right) = 3r^2,$$

tudíž

$$V = \frac{r}{6}(4r^2 + 12r^2) = \frac{16r^3}{6} = \frac{8r^3}{3}.$$

(Oprávněnost užití tohoto vzorce vyplývá z předešlého, kde Z_1, Z_2, ... byly kvadr. funkce vzdálenosti od Z_0.)

Řešení 2. Zaslal p. *Jaroslav Mayer*, stud. VII. tř. gymn. v Praze v Žitné ul.

Dokážeme, že řez vedený rovnoběžně se základnou má stejný plošný obsah, jako řez vedený ve stejné výši hranolem, jehož základna je čtverec o základně $2r$ a výška jeho r, z něhož je vyňat jehlan o téže základně a výšce.

Plocha řezu u tohoto obrazce jest rozdíl čtverců $ABCD$ a $A'B'C'D'$.

Avšak $ABCD = 4r^2$. Je-li řez $A'B'C'D'$ veden ve výšce x od základny, $A'B'C'D' : ABCD = x^2 : r^2$, a tedy $A'B'C'D' = 4x^2$, tak že plocha řezu toho jest $4(r^2 - x^2)$. Plocha řezu u oné klášterní klenby jest čtverec o základně

$$a = 2\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Z toho ihned patrno, že ona plocha jest rovněž $4(r^2 - x^2)$, tudíž obsah oné klášterní klenby

$$V = 4r^3 - \tfrac{4}{3}r^3 = \tfrac{8}{3}r^3,$$

jakož plyne z principu Cavalierova.

30.

Ellipse (a, b) opsána (vepsána) soustředná kružnice, jež má poloměr a (b). Každá tečna ellipsy (kružnice k (b)) protíná obecně kružnici K (a) (ellipsu) ve dvou bodech. Těmito body veďme tečny ke kružnici K (ellipse)! Které jest geom. místo jich průsekův? Dr. *J. Tomáš.*

Řešení. Dle p. *J. Kodrle*, stud. VI*a*. tř. r. v Pardubicích a p. *Jar. Mayera*, stud. VII. tř. gymn. v Praze v Žitné ul.

Mějme dvě ellipsy o rovnicích

$$E_1 \equiv \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1 = 0,$$

$$E_2 \equiv \frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} - 1 = 0.$$

K tečnám první ellipsy ustanovme póly vzhledem ke druhé ellipse a hledejme geometrické místo těchto pólů.

Tečna prvé ellipsy v bodě $x_0 y_0$ má rovnici

$$T_1 \equiv \frac{x x_0}{a_1^2} + \frac{y y_0}{b_1^2} - 1 = 0$$

a posléze bodu ξ, η vzhledem ke druhé ellipse má rovnici

$$P_2 \equiv \frac{x\xi}{a_2^2} + \frac{y\eta}{b_2^2} - 1 = 0.$$

Aby se obě přímky ztotožnily, musí býti

$$\frac{x_0}{a_1^2} = \frac{\xi}{a_2^2}, \quad \frac{y_0}{b_1^2} = \frac{\eta}{b_2^2}$$

a tedy

$$x_0 = \frac{a_1^2}{a_2^2}\,\xi, \quad y_0 = \frac{b_1^2}{b_2^2}\,\eta$$

Souřadnice (x_0, y_0) splňují rovnici E_1, tak že rovnice geometrického místa bodů (ξ, η) jest

$$E_3 \equiv \frac{\xi^2}{\left(\frac{a_2^2}{a_1}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(\frac{b_2^2}{b_1}\right)^2} - 1 = 0,$$

což jest ellipsa o poloosách $\frac{a_2^2}{a_1}$, $\frac{b_2^2}{b_1}$.

V případě prvém máme

$$E_1 \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$E_2 \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0.$$

Geometrické místo jest ellipsa o poloosách a, $\frac{a^2}{b}$.

V případě druhém jest

$$E_1 \equiv \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$E_2 \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Geometrické místo jest ellipsa o poloosách $\frac{a^2}{b}$, b.

31.

Ellipse E (a, b) opsána (vepsána) soustředná kružnice o poloměru a (b). Z každého bodu kružnice K (a) (ellipsy E) vedeny tečny k ellipse (kružnici k (b)). Dotyčné body obou tečen ellipsy E (kružnice k) spojme tětivou! Kterou křivku obalují tětivy? Dr. *J. Tomáš.*

Řešení. Dle p. *Jaroslava Mayera,* stud. VII. tř. gymn. v Praze v Žitné ul.

Mějme dané dvě ellipsy o rovnicích,

$$\overline{E_1} \equiv \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1 = 0$$

$$\overline{E_2} \equiv \frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} - 1 = 0.$$

K bodům prvé ellipsy ustanovme poláry vzhledem ke druhé ellipse a hledejme jich obálku.

Na základě úlohy předešlé soudíme, že onou obálkou bude ellipsa $\overline{E_3}$. Abychom obdrželi její rovnici, učiníme

$$\overline{E_1} \equiv E_3, \ \overline{E_2} \equiv E_2, \ \overline{E_3} \equiv E_1.$$

Tak dostaneme vztahy

$$\begin{array}{l|l|l} \overline{a_1} = \dfrac{a_2^2}{a_1} & \overline{a_2} = a_2 & \overline{a_3} = a_1 \\ \overline{b_1} = \dfrac{b_2^2}{b_1} & \overline{b_2} = b_2 & \overline{b_3} = b_1 \end{array}$$

a odtud

$$\overline{a_3} = \frac{\overline{a_2^2}}{\overline{a_1}}, \ \overline{b_3} = \frac{\overline{b_2^2}}{\overline{b_1}}.$$

Pro prvý případ jest

$$\overline{E_1} \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0,$$

$$\overline{E_2} \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

a tedy $\overline{E_3}$ jest ellipsa o poloosách a, $\frac{b^2}{a}$;

pro druhý případ jest

$$\overline{E_1} \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\overline{E_2} \equiv \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

a jest tedy $\overline{E_3}$ ellipsa v poloosách $\frac{b^2}{a}$, b.

32.

Do dané ellipsy vepsati trojúhelník největšího obsahu a určiti jeho plochu. Prof. *Václav Hübner.*

Řešení. Zaslal p. *Jaroslav Mayer*, stud. VII. tř. gymn. v Praze v Žitné ul.

Daná ellipsa o poloosách a, b jest průmět kruhu o poloměru a, jehož rovina svírá s rovinou ellipsy úhel α daný rovnicí

$$\cos\alpha = \frac{b}{2}.$$

Trojúhelník maxim. obsahu, vepsaný do tohoto kruhu, jest rovnostranný o straně $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ a obsahu $\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$.

Průmět jeho jest trojúhelník s těžištěm ve středu ellipsy a obsahem $\frac{3}{4}\,ab\sqrt{3}$. Máme tedy výsledek:

Z trojúhelníků vepsaných do ellipsy mají maximální obsah trojúhelníky s těžištěm ve středu ellipsy, jež mají stejný obsah

$$\frac{3}{4}\,ab\sqrt{3}.$$

33.

Kterou křivku naplňují koncové body průměrů sdružených k prvnímu směru v ellipsách konfokálních? Prof. *J. Schuster.*

Řešení. Zaslal pan *Jaroslav Mayer*, stud. VII. tř. gymn. v Praze v Žitné ul.

Konfokální ellipsy v poloze osové lze napsati ve formě:

$$b^2(x^2 + y^2) + e^2y^2 = b^2(e^2 + b^2), \tag{1}$$

kdež b jest proměnný parametr.

Daný průměr mějž směrnici A. Pak průměr sdružený bude dán rovnicí

$$y = -\frac{1}{A}\frac{b^2}{(e^2 + b^2)}x$$

čili

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{A}\frac{b^2}{e^2 + b^2} \tag{2}$$

Z této rovnice vypočteme b^2 a dosadíme do (1), načež obdržíme jako hledané místo geometrické hyperbolu

$$x^2 - A^2y^2 = A^2e^2.$$

34.

Na parabole určete normálu, od níž má její pól nejmenší odlehlost. Prof. *J. Schuster.*

Řešení. Zaslal p *Josef Kodrle*, stud. VI*a*. tř. r. v Pardubicích.

Normála paraboly $y^2 = 2px$ v bodě jejím (x_1, y_1) vedená jest zároveň polárou jistého bodu (x_0, y_0) vzhledem k ní. Aby rovnice poláry toho bodu byla totožná s rovnicí normály, musí součinitelé při x, y a člen absolutní býti úměrny v rovnicích

$$y_0y = px + px_0$$

$$py - py_1 = -y_1x + y_1x_1,$$

t. j. musí býti

$$ky_0 = p,\ kpx_0 = y_1x_1 + py_1,\ kp = -y_1,$$

(kde k značí koefficient úměrnosti). Odtud určíme

$$k = -\frac{y_1}{p},\ y_0 = -\frac{p^2}{y_1},\ x_0 = -(p + x_1).$$

Jest patrno, že vzdálenost bodu (x_0, y_0) od normály jest

$$d = \sqrt{(y_1 - y_0)^2 + (x_1 - x_0)^2}$$

a dle vypočtených hodnot

$$d = \sqrt{\left(y_1 + \frac{p^2}{y_1}\right)^2 + (2x_1 + p)^2}$$

a užijeme-li vztahu $y_1^2 = 2px_1$

$$d = \sqrt{\frac{(2x_1 + p)^3}{2x_1}}.$$

Hledejme minimum funkce

$$y = \frac{(2x + p)^3}{2x},$$

čili funkce

$$y = 4x^2 + 6px + 3p^2 + \frac{p^3}{2x}.$$

První derivace jest

$$y' = 8x + 6p - \frac{p^3}{2x^2}.$$

Pro krajní hodnoty jest $y' = 0$, tedy

$$8x + 6p - \frac{p^3}{2x^2} = 0,$$

nebo

$$16x^3 + 12px^2 - p^3 = 0.$$

Řešením této rovnice obdržíme kořeny

$$x_1 = \frac{p}{4}, \quad x_{2,3} = -\frac{p}{2}.$$

Z těch reálné řešení naší úlohy poskytuje jen kořen

$$x_1 = \frac{p}{4}.$$

Druhá derivace

$$y'' = 8 + \frac{p^3}{x^3} \text{ jest pro } x = \frac{p}{4},$$

$y'' = 72$, t. j. větší než nulla, pročež hodnota ta jest minimální.

35.

Na parabole určete normálu, jež s tečnami v průsečících jejích s parabolou vedenými omezuje trojúhelník nejmenší plochy.

Prof. *J. Schuster.*

Řešení. Zaslal p. *F. Ryba,* stud. VII. tř. r. v Hodoníně.

Obsah trojúhelníka, tvořeného normálou paraboly a tečnami v jejích průsečících s parabolou lze vyjádřiti co polovinu součinu z úseku normály mezi oběma průsečíky jejími s parabolou a ze vzdálenosti jejího pólu od ní. Je-li jeden průsečík normály s parabolou $\left(\frac{y_1^2}{2p_1}\, y_1\right)$, je druhý

$$\left(\frac{(2p^2+y_1^2)^2}{2py_1^2},\ -\frac{2p^2+y_1^2}{y_1}\right),$$

délka tětivy na normále je

$$\frac{2\,(y_1^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{y_1^2} \text{ a vzdálenost pólu (úl. 34.)} = \frac{(p^2+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{py_1}.$$

Plocha trojúhelníka je pak

$$= \frac{(p^2+y_1^2)^3}{py_1^3} = \frac{1}{p}\left(\frac{p^2}{y_1}+y_1\right)^3.$$

Ta závisí na výrazu

$$f(y_1) = \frac{p^2}{y_1} + y_1.$$

Minimum stanovíme tím, že první derivaci

$$f'(y_1) = -\frac{p^2}{y_1} + 1$$

položíme $= 0$. Tak obdržíme

$$y_1 = \pm p.$$

Dosazením do druhé derivace shledáme, že minimum nastane pro $y_1 = p$.

Plocha tohoto nejmenšího trojúhelníka jest pak $8p^2$.

Úloha tato souvisí s úlohou 20., kde stanovíme minimální úseč omezenou normálou. Minimum nastává v obou případech za stejných podmínek; plochy trojúhelníka a úseče jsou v poměru 3 : 2, což platí obecně.

b) Z deskriptivní geometrie.

1.

Ke dvěma mimoběžkám sestrojiti příčku dané délky, aby s danou rovinou svírala určitý úhel. Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení. Zaslal p. *Josef Kodrle,* stud. VIa. tř. reálky v Pardubicích.

Z libovolného bodu jedné mimoběžky a jako vrcholu opišme rotační plochu kuželovou tak, aby její povrchové přímky svíraly s danou rovinou ϱ žádaný úhel α. Pak body na této rotační ploše kuželové, jichž vzdálenost od vrcholu jest rovna dané délce, naplňují dvě kružnice K, K_1, jichž roviny jsou rovnoběžné s rovinou ϱ. Posouvá-li se vrchol této plochy kuželové po mimoběžce a tak, že odchylky povrchových přímek od roviny ϱ jsou stále α, pak kružnice K, resp. K_1 vytvoří dvě plochy válcové s kruhovými podstavami rovnoběžnými s rovinou ϱ a površkami rovnoběžnými s mimoběžkou a. Sestrojme nyní průsečíky druhé mimoběžky b s těmito kruhovými obecně šikmými plochami válcovými. Každým průsečíkem proložme rovinu rovnoběžnou s rovinou ϱ. Ta protíná příslušný válec v kružnici, v jejímž středu vztyčená kolmice k rovině ϱ protíná mimoběžku a v bodě, který spojen s příslušným průsečíkem na mimoběžce b dává hledanou příčku.

Ježto mimoběžka b protíná obě plochy válcové obecně ve 4 bodech, dostáváme též obecně čtyři příčky vyhovující daným podmínkám.

2.

Sestrojiti přímku daným bodem A, aby svírala s rovinami ϱ, σ úhly stejné a s rovinou τ úhel daný. Prof. *Jan Kroupa.*

Řešení. Zaslal p. *Jan Částka*, stud. III. roč. prům. šk. v Plzni.

Veškeré přímky obou rovin souměrnosti úhlů daných rovin ϱ a σ mají zřejmě stejnou odchylku od obou rovin ϱ a σ. Ježto pak přímky rovnoběžné jsou stejně skloněny k téže rovině, vyplývá, že hledané přímky musí býti rovnoběžny s těmito symetrálnými rovinami. Přímky ty mají mimo to procházeti bodem A

a býti skloněny k dané rovině τ o určitý úhel. I budou proto površkami rotační plochy kuželové o vrcholu A, jejíž površky svírají s rovinou τ úhel daný. Površky tohoto kužele, rovnoběžné se symetrálnými rovinami úhlu rovin ϱ a σ, jsou hledanými přímkami. Proložíme-li tedy vrcholem A roviny rovnoběžné s rovinami souměrnosti úhlu rovin ϱ a σ, protínají kuželovou plochu v hledaných přímkách.

Úloha je patrně obecně čtyřznačnou.

3.

Sestrojiti jest plochu kulovou, známe-li jeden bod P, tečnou rovinu τ a průměr polohou; nalézti na této kouli body, jichž vzdálenosti od daného bodu P a tečné roviny τ jsou stejné.

Prof *J. Hanuš.*

Řešení. Zaslal p. *Pavel Bořkovec*, stud. VIII. tř. gymnasia v Praze v Žitné ulici.

Hledaná plocha kulová musí obsahovati kružnici k, již vytvoří bod P rotací kol daného průměru, a mimo to musí se dotýkati rotační plochy kuželové, již obalí rovina tečná τ, otáčí-li se kol tohoto průměru. Libovolná rovina průměrem tím proložená protíná kružnici k ve dvou bodech, kuželovou plochu ve dvou přímkách, a zobrazíme-li obě kružnice, procházející těmito body a dotýkající se těchto přímek, budou to hlavní kružnice obou ploch kulových, hovících daným podmínkám.

Body stejně vzdálené od bodu P a roviny tečné τ naplňují rotační paraboloid, mající bod P za ohnisko a rovinu τ za rovinu řídící. Průsečné křivky obou sestrojených ploch kulových s tímto paraboloidem obsahují body žádaných vlastností. Křivky ty jsou stupně čtvrtého a jednotlivé body jejich sestrojíme prokládáním rovin rovnoběžných s rovinou τ, jež protínají jak plochu kulovou, tak paraboloid v kružnicích.

Jiné řešení. Zaslal p. *Jos. Kozák*, stud. VII. tř. reálky v Pardubicích.

Geometrické místo středů ploch kulových, dotýkajících se roviny τ a obsahujících bod P, je rotační paraboloid, jehož ohnisko je v bodu P a rovina direkční v rovině τ. Průsečíky daného průměru s tímto paraboloidem jsou středy hledaných dvou ploch kulových.

Průsečné křivky pak právě tohoto paraboloidu s oběma plochami kulovými dávají ony křivky, jichž body jsou stejně vzdáleny od bodu P a od roviny τ.

Poznámka. Úloze vyhovují dvě reálné plochy kulové, dokud kružnice, již vytvoří bod P rotací kol daného průměru, je uvnitř plochy kuželové, již obaluje rovina τ při otáčení kol téhož průměru. Spadá-li kružnice ta na kuželovou plochu, je jediné řešení, a je-li konečně vně, jsou obě plochy kulové imaginární.

Při sestrojení proniku koule s rotačním paraboloidem možno použíti též té vlastnosti, že průsek ten na společnou rovinu meridiálnou promítá se do paraboly, jejíž osa je kolma k ose paraboloidu.

4.

Na rotační ploše kuželové, určené osou o, bodem P a tečnou t, stanovte body, jichž vzdálenosti od roviny tečné, jdoucí tečnou t a od roviny, jdoucí bodem P kolmo k ose, jsou v poměru $m : n$. Prof. *J. Hanuš.*

Řešení. Zaslal p. *J. Hak*, stud. VI. tř. reálky v Brně.

Rovinu proloženou bodem P kolmo k ose o pokládejme za půdorysnu a označme stopník osy o na půdorysně S. Půdorysna protíná hledanou plochu kuželovou v kružnici k o středu S a poloměru $\overline{PS}$. Tečná rovina plochy kuželové, obsahující tečnu t, má půdorysnou stopu v tečně ke kružnici k jdoucí půdorysným stopníkem tečny t. Tečny ty jsou dvě reálné, je-li stopník ten vně kružnice k, jedna, je-li na kružnici k, a jsou imaginárné, spadá-li stopník tečny t dovnitř kružnice. Každá tato tečna stanoví s t rovinu tečnou τ hledané rotační plochy kuželové, jež protíná osu o ve vrcholu V této. Tedy obecně dvě plochy kuželové vyhovují úloze.

Uvažujme jednu tuto plochu kuželovou, jejíž rovina tečná, obsahující tečnu t, nechť svírá s půdorysnou úhel ω. Všechny body, jichž vzdálenosti od roviny τ a od půdorysny jsou v poměru $m : n$, vyplňují dvě roviny ε a ε', které procházejí půdorysnou stopou roviny τ, z nichž prvá svírá s půdorysnou úhel α, o němž platí:

$$\sin\alpha : \sin(\omega - \alpha) = n : m.$$

Sestrojme průsečík E roviny ε s osou o; tu bod E dán vzhledem k základním bodům S a V poměrem

$$\overline{SE} : \overline{VE} = -n : \frac{m}{\cos\omega},$$

čímž bod ten určen. Stejně průsečík E' druhé roviny ε' s osou o dán poměrem

$$\overline{SE'} : \overline{VE'} = n : \frac{m}{\cos\omega}.$$

Průsečné křivky rovin ε a ε' s plochou kuželovou obsahují hledané body. Rovina ε, obsahující bod E ležící uvnitř úsečky $\overline{SV}$, protíná plochu kuželovou vždy v ellipse.

Rovina druhá ε' obsahuje bod E' ležící vně úsečky $\overline{SV}$ a protíná plochu kuželovou v ellipse, dokud

$$n < \frac{m}{2\cos\omega},$$

v parabole, je-li

$$n = \frac{m}{2\cos\omega},$$

a konečně v hyperbole, když

$$n > \frac{m}{2\cos\omega}.$$

5.

Určiti směr a rovinu šikmého promítání, by do této daný čtyřstěn obecný promítal se jako čtverec a jeho úhlopříčky.

J. Klíma, assist. c. k. české techn.

Řešení. Zaslal p. *Pavel Bořkovec*, stud. VIII. tř. gymnasia v Praze v Žitné ulici.

Jsou-li U a V půlící body dvou protilehlých mimoběžných hran čtyřstěnu $ABCD$, je spojnice $\overline{UV}$ směrem šikmého promítání, při kterém průmět daného čtyřstěnu na libovolnou rovinu jest rovnoběžník a jeho úhlopříčky. Proložme rovinu kolmou ke směru tohoto šikmého promítání a promítněme do této daný čtyřstěn. Úhlopříčky rovnoběžníka, do něhož se čtyřstěn promítá, určují pár sdružených průměrů ellipsy opsané tomuto, z nichž známou konstrukcí sestrojíme osy. Jde nyní o to, protnouti tento kolmý elliptický válec v kružnicích. To lze dvojím způsobem, a to rovinami rovnoběžnými s rovinami jdoucími hlavní osou podstavné ellipsy a body na površce jdoucí vrcholem vedlejší osy, jež jsou od vrcholu toho vzdáleny o délku rovnou výstřednosti ellipsy té. Do těchto rovin směrem $\overline{UV}$ promítá se daný čtyřstěn do rovnoběžníka, jehož úhlopříčky jsou k sobě kolmé a který je vepsán do kružnice, tedy do čtverce.

Protože u čtyřstěnu jsou tři páry mimoběžných hran, jsou možné tři různé směry šikmého promítání a ke každému z nich přísluší dvojí poloha průmětny. Lze tudíž daný obecný čtyřstěn promítnouti šesterým způsobem do čtverce a jeho úhlopříček.

6.

Sestrojiti kružnici danou tečnou s dotyčným bodem a dvěma rovinami tečnými. *J. Klíma*, assist. c. k. české techn.

Řešení. Zaslal p. *Ferd. Soukup*, stud. VIII. tř. gymnasia v Praze v Žitné ulici.

Protíná-li daná tečna t dané tečné roviny ϱ a σ v bodech R a S, musí dotyčný bod U kružnice hledané k na rovině ϱ ležeti na kružnici u, opsané v rovině ϱ poloměrem $\overline{RT}$ (kde T je dotyčník dané tečny t) kol bodu R. Obdobně dotyčný bod V roviny σ s kružnicí k musí býti na kružnici v o poloměru $\overline{ST}$ a středu S. Protíná-li rovina kružnice k průsečnici o rovin ϱ a σ v bodě P, musí býti tento stejně vzdálen od kružnic u a v, ježto $\overline{PU}$ a $\overline{PV}$ jsou tečnami kružnice k z téhož bodu P.

Sklopme nyní rovinu σ kol průsečnice o do roviny ϱ a opišme kol sklopeného středu R kružnice u kružnici r o poloměru rovném rozdílu poloměrů kružnic u a v a určeme v přímce o bod P tak, by byl stejně vzdálen od bodu S a kružnice r. Je tedy bod P středem kružnice, procházející bodem S a dotýkající se kružnice r. Je-li S' bod symetrický k bodu S vzhledem k přímce o, proložme body S a S' kružnici libovolnou x; chordála q kružnic r a x protíná spojnici $\overline{SS'}$ v bodě A, jímž veďme tečny $\overline{AX}$, $\overline{AY}$ ke kružnici r. Přímky $\overline{RX}$, $\overline{RY}$ (X a Y dotyčné body na kružnici r) vytínají na přímce o body P, ${}^1P$, načež hledaná kružnice k je vepsána do trojúhelníku RSP, resp. $RS{}^1P$. Úloha obecně dvojznačná.

Jiné řešení. Zaslal p. *Josef Kodrle*, stud. VI*a*. reálky v Pardubicích.

Budiž dána v rovině pevná úsečka a na ní bod. Pak geometrickým místem třetího vrcholu trojúhelníku, jemuž kružnice vepsaná dotýká se pevné základny v daném bodě, jest hyperbola o ohniskách v krajních bodech základny a o vrcholech v daném bodě a v bodě s tímto dle středu základny souměrném. Důkaz:

V trojúhelníku ABS, kde $\overline{AB}$ je pevná základna, dotýká se kružnice vepsaná základny v bodě T, strany $\overline{AS}$ v bodě T_1 a $\overline{BS}$ v bodě T_2. Pak protože tečny vedené z bodu ke kružnici jsou stejné, platí

$$\overline{AT_1} = \overline{AT},\quad \overline{BT_2} = \overline{BT},\quad \overline{ST_1} = \overline{ST_2}.$$

Rozdíl stran proměnných

$$\overline{AS} - \overline{BS} = \overline{AT_1} + \overline{T_3S} - (\overline{BT_2} + \overline{ST_3})$$
$$= \overline{AT} - \overline{BT} = const.$$

Sestrojíme-li na $\overline{AB}$ bod R tak, že $\overline{AR} = \overline{BT}$, je též

$$\overline{AS} - \overline{BS} = \overline{TR},$$

z čehož plyne věta uvedená pro rovinu. Pro prostor máme pak větu:

Geometrickým místem vrcholů všech trojúhelníků, jímž kružnice vepsané dotýkají se pevné základny v daném bodě, jest rotační hyperboloid dvojplochý, jehož ohniska jsou v koncových bodech pevné základny a vrcholy v daném bodě a v bodě s tímto dle středu základny souměrném. Z tohoto plyne bezprostředně řešení naší úlohy.

Sestrojíme průsečíky dané tečny s danými rovinami tečnými. Tím obdržíme ohniska zmíněného dvojplochého rotačního hyperboloidu, jehož vrcholy snadno určíme. Průsečíky tohoto hyperboloidu s průsečnicí daných rovin tečných dávají třetí vrcholy trojúhelníků, jimž jsou hledané kružnice vepsané. Dle toho, zda průsečnice ta protíná hyperboloid ve dvou reálných, různých neb splývajících, nebo ve dvou imaginárných bodech, máme tolikéž kružnic hovících dané úloze.

7.

Ellipsou proložiti rotační paraboloid obsahující mimo to daný bod. *J. Klíma*, assist. c. k. české techn.

Řešení. Zaslal p. *J. Hak*, stud. VI. reálky v Brně.

Rovina σ proložená hlavní osou $\overline{AB}$ dané ellipsy e a kolmá k rovině této ellipsy je rovinou meridiálnou hledaného rotačního paraboloidu. Protíná proto tento v parabole, jíž rotací kol její osy žádaný paraboloid vznikne. Sestrojíme-li tuto, je úloha rozřešena. Poněvadž na rotačním paraboloidu každá povrchová ellipsa promítá se do roviny kolmé k ose paraboloidu do kružnice, možno snadno určiti směr osy tohoto jako směr površek rotačního válce proloženého ellipsou e. Směry ty jsou dva.

V dalším třeba rozeznávati dva případy co do polohy bodu daného M vzhledem k ellipse e.

I. Rovina ϱ proložená bodem M kolmo k stanovenému směru osy paraboloidu protíná ellipsu e ve dvou reálných bodech U a V. Poněvadž rovina kolmá k ose paraboloidu protíná tento v kružnici, jest body U, V a M stanovena povrchová kružnice hledaného paraboloidu, jejímž středem prochází osa paraboloidu o. Touto a koncovými body A, B hlavní osy ellipsy e je určena základní parabola. Řešení tohoto možno užít i když rovina ϱ dotýká se ellipsy e ve vrcholu A neb B.

II. Rovina ϱ neprotíná ellipsu e. Pak bodem M proložíme libovolnou rovinu, kolmou k rovině σ tak, aby protla ellipsu e ve dvou bodech P, Q. Poněvadž body MPQ určují průsečnou ellipsu e' roviny (MPQ) s paraboloidem, a tato se do roviny ϱ promítá jako kružnice, lze snadno nalézti průsečíky X, Y roviny σ s touto ellipsou e'. Jedním z těchto bodů X (nebo Y) lze proložiti rovinu $\varrho' \parallel \varrho$ tak, aby protla danou ellipsu e ve dvou bodech U' a V'. Rovina ϱ' protíná paraboloid v kružnici k', z níž známe body U', V' a X (neb Y), čímž jest určen její střed S', kterým prochází osa paraboloidu o. Body A, B a osa o stanoví opět základní parabolu.

Úloha je patrně dvojznačná, ježto ellipsou e lze proložiti dva rotační válce, tedy též dostáváme dva směry pro osy hledaných paraboloidů rotačních.

Poznámka. Případ II. možno též řešiti cestou obdobnou jako I. Rovina ϱ jdoucí bodem M kolmo k stanovenému směru osy, protíná paraboloid v kružnici, která prochází bodem M a oněmi imag. průsečíky ellipsy e s průsečnicí roviny ϱ s rovinou ellipsy e. Ellipsa e promítá se do roviny ϱ do kružnice $'e$ a ona průsečnice promítá se do chordály této kružnice $'e$ a kružnice hledané, jdoucí bodem M. Povrchová kružnice roviny ϱ určena tedy bodem M a tou podmínkou, že má s kružnicí $'e$ danou přímku za chordálu, jež obě seče v imag. bodech. Proložením libovolné kružnice bodem M, jež protíná kružnici $'e$ a použitím vlastnosti, že chordály tří kružnic se protínají v jediném bodě, lze určiti kružnici paraboloidu hledaného v rovině ϱ kolmé k směru osy a tudíž i osu o jako v př. I.

Základní parabola je pak tu vždy určena osou o a dvěma body A, B. Vrchol této určíme tu nejsnadněji jako půlící bod úsečky, jíž vytne na ose o spojnice $\overline{AB}$ a spojnice ku př bodu A s bodem B' symetrickým s bodem B dle osy o. Průsečíky těchto spojnic s osou o jsou totiž sdruženými póly na ose a při parabole vrchol půlí jich vzdálenost. Ohnisko pak sestrojíme, určivše v jednom bodě ku př. A tečnu na základě toho, že subtangenta při parabole je vrcholem půlena. Kolmice pak k této tečně v průsečíku jejím s vrcholovou tečnou protíná osu o v ohnisku paraboly.

8.

Vyhledati kouli, jež procházejíc ohniskem paraboloidu rotačního, jehož parabola základní jest dána čtyřmi body, a sekouc jej v kružnici: 1. protíná jeho direkční rovinu v kružnici o daném poloměru, nebo 2. dotýká se roviny dané.

L. Staněk, posl. techn. v Brně.

Řešení. Zaslal p. *Václav Sedlák*, stud. VII. tř. II. reálky v Plzni.

Nejprve třeba stanoviti základní parabolu danou čtyřmi body ku př. A, B, C, D. Parabola dotýká se úběžné přímky své roviny. Zvrhlá kuželosečka $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ protíná úběžnou přímku v jednom páru involuce, druhý pár této jsou úběžné body druhé zvrhlé kuželosečky $\overline{AC}$, $\overline{BD}$. Vedením rovnoběžek libovolným bodem s těmito spojnicemi dostáváme paprskovou involuci určenou dvěma páry, jejíž samodružné paprsky udávají směry os obou parabol jdoucích body A, B, C, D.

Osu samu sestrojíme třeba tím, že větou Pascalovou určíme si ku př. bod C' tak, by $\overline{CC'}$ bylo kolmo ku směru osy paraboly. Osa pak půlí úsečku CC'. Parabola pak určena osou a dvěma body i omezí se snadno.

1. Hledaná plocha kulová musí míti střed svůj na ose paraboloidu, ježto protíná paraboloid v kružnici. Hlavní kružnice této plochy kulové v některé rovině meridiálné určí se snadno tím, že prochází ohniskem paraboloidu, vytíná na příslušné direkční přímce úsečku rovnou dané délce a má střed na ose. Kružnice tu v podstatě určena dvěma body a průměrem.

2. Proložme osou sestrojeného paraboloidu rovinu kolmou k dané rovině tečné. Tato protíná hledanou plochu v hlavní kružnici, jež určena tečnou a druhou tečnou, kolmicí to k ose paraboloidu v ohnisku, jež je zároveň dotyčným bodem. Vyhovují patrně dvě hlavní kružnice, tedy též dvě plochy kulové.

Jiné řešení. Zaslal p. *Pavel Bořkovec*, stud. VIII. tř. gymnasia v Praze v Žitné ulici.

Prvá část úlohy této, t. j. určení obou parabol jdoucích čtyřmi body $ABCD$, dá se řešiti též kollineací parabol těch s kružnicí k, již opíšeme nad $\overline{AB}$ co průměrem (avšak mohla by to býti též libov. kruž. jdoucí body A, B), osou kollineace je $\overline{AB}$. Spojnice $\overline{CD}$ protíná $\overline{AB}$ v bodě P, jehož polára ke kružnici k budiž p_1 a polára toho ku parabole je spojnice průsečíků $(\overline{AC} \times \overline{BD})$, $(\overline{AD} \times \overline{BC})$. Tečna u_1 kružnice k rovnoběžná s $\overline{AB}$ je příslušnou úběžnicí kollineace té a protíná přímku p_1 v bodě V_1, jemuž odpovídá úběžný bod přímky p; spojnice $\overline{V_1 V_\infty}$ dává jeden paprsek kollineace. Bod C spojme s V_∞ a sestrojme odpovídající přímku, jež protíná kružnici k v bodě C_1 (průsečíky ty jsou dva a proto dostáváme dvě kollineace a také dvě paraboly jdoucí čtyřmi body). Spojnice $\overline{V_1 V_\infty}$ a $C_1 C$ dají střed kollineace S. Je-li U_1 dotyčný bod úběžnice u_1 s kružnicí k, je $\overline{SU_1}$ směr osy příslušné paraboly. V dalším možno pokračovati jako v předchozím řešení.

Poznámka. Čtyřmi body proložiti parabolu, je specielní případ úlohy čtyřmi body proložiti kuželosečku dotýkající se dané přímky, přejde-li přímka ta v úběžnou přímku. Úloha ta řeší se větou Desargovou, která praví, že všechny kuželosečky jdoucí čtyřmi body (t. zv. svazek kuželoseček) vytínají na libovolné přímce dvojiny bodové, jež tvoří involuci, jejímiž samodružnými body jsou dotyčné body oněch dvou kuželoseček jdoucích těmi čtyřmi body, jež se přímky té dotýkají. Takový svazek tvoří též kružnice jdoucí dvěma body. Libovolná přímka protíná svazek kružnic těch též v involuci, jejímiž samodružnými body jsou dotyčné body oněch dvou kružnic jdoucích základními body a dotýkající se té přímky. Naopak, dána-li involuce bodová a chceme sestrojiti její samodružné body, možno převésti to na stanovení dotyčných bodů kružnic svazku, jež se dané přímky dotýkají, jsou-li ovšem body ty reálné.

By úloha čtyřmi body proložiti parabolu byla reálná, je nutno, by žádný ze čtyř těch bodů neležel uvnitř trojúhelníka stanoveného ostatními třemi. Není-li tato podmínka splněna, nelze takými čtyřmi body proložiti reálné paraboly

c) Z fysiky.

1.

Malá těžká koule jest zavěšena na dlouhé bezvážné niti a držena v takové poloze, že napiatá nit jest horizontální. Dokažte, že vypustíme-li kouli, je napětí niti rovno trojnásobné váze tělesa v okamžiku, kdy prochází nejnižším bodem své dráhy.

R.

Řešení, jež zaslal p. *J. Kodrle,* ze VIa. reál. v Pardubicích.

Budiž hmota koule m, délka niti l, urychlení tíže g a rychlost koule v nejnižším bodě její dráhy v. V tomto bodě napíná koule nit jednak vlastní vahou mg, jednak reakcí oproti síle centripetální $\frac{mv^2}{l}$. Rychlost koule padající volně z výše l jest $v = \sqrt{2gl}$. Celkové napětí niti jest tudíž

$$mg + \frac{mv^2}{l} = mg + 2mg = 3\,mg,$$

čili rovná se trojnásobné váze koule.

2.

Dokonalá ocelová kulička spočívá v nejnižším bodě konkávní sférické plochy; vyšineme-li ji z tohoto místa, kmitá kolem této rovnovážné polohy. Najděte dobu kmitovou za předpokladu, že se kulička po ploše nesmýká. Jak lze výsledku užít k měření radia křivosti sférického dutého zrcadla? Poloměr tento je ***R****, poloměr kuličky* ***r*** *a její moment setrvačnosti kolem průměru* $^2/_5\; m\, r^2$. *R.*

Řešení. Dokážeme nejprvé, že kulička bude za malých exkursí vykonávati jednoduchý pohyb harmonický. Předpokládejme, že se střed (těžiště) kuličky vychýlí z rovnovážné polohy O do nejzazší polohy A, jež leží patrně na kruhu, jehož radius jest $R - r = \varrho$. Při tom se zvedne vertikálně o výšku h a vzdálí ve směru horizontálním od rovnovážné polohy o délku a. (Příslušný obrazec čtenář snadno si nakreslí.) Je-li exkurse a malá, jak chceme předpokládati, platí dle známého vztahu geometrického $a^2 = (2\varrho - h)\,h = 2\varrho h$, kde h^2 lze zanedbati. Potenciálná energie kuličky v nejzazším bodě A je patrně $mgh = \frac{1}{2} mg\,\frac{a^2}{\varrho}$. Kdyby se kulička smýkala po ploše bez tření, bylo by jí realisováno jednoduché kyvadlo délky ϱ. Tím, že i v našem případě je potenciálná energie v nejzazším bodě výkyvu úměrna kvadrátu horizontálné exkurse, je dáno, že i tu nastává pohyb harmonický, neboť jen u tohoto jest tento vztah splněn.

Probíhá-li kulička nejnižším bodem sférické plochy, svojí polohou rovnovážnou, má energii pohybovou jednak následkem pohybu svého těžiště, jednak z rotace kolem tohoto. Těžiště koná, jak jsme dokázali, pohyb harmonický o periodě τ, zatím neznámé; rychlost, se kterou prochází svou nejnižší polohou, jest tudíž rovna $v = 2\pi \frac{a}{\tau}$. (Tento vztah obecně platný dokážeme na př. z pohybu kyvadla délky l; tu platí $v^2 = 2gh = \frac{g}{l} a^2$ a dosazením za $\frac{g}{l}$ dle vztahu $T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{l}{g}$ patrně $v^2 = \left(2\pi \cdot \frac{a}{T}\right)^2$ jako psáno.) Kinetická energie pohybu těžiště kuličky je pak $\frac{1}{2} m v^2$.

Úhlovou rychlost ω kuličky kolem těžiště obdržíme z následující úvahy: Ježto se kulička po podkladu nesmýká, je bod, v němž se ho dotýká, pro velmi kraťounký okamžik pevným, a postupná rychlost centra v tedy rovna ωr, z čehož

$$\omega = \frac{v}{r} = 2\pi \frac{a}{\tau r}.$$

Ježto pak je moment setrvačnosti kuličky $K = \frac{2}{5} m r^2$, je kinetická energie rotace rovna $\frac{1}{2} K \omega^2$.

Z principu zachování energie plyne, že zdrojem celkové energie kinetické je počáteční energie polohy čili

$$\frac{1}{2} mg \frac{a^2}{\varrho} = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} K\omega^2 = \frac{1}{2} m \cdot \frac{4\pi^2 a^2}{\tau^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m r^2 \cdot \frac{4\pi^2 a^2}{\tau^2 r^2},$$

z čehož hledaná doba kmitová

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{7}{5}\varrho}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{7}{5}(R - r)}{g}}.$$

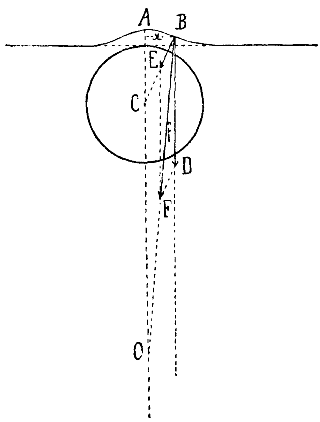
Pohyb kuličky je stejný jako aequivalentního kyvadla jednoduchého délky $\lambda = \frac{7}{5}(R - r)$. Z této poznámky plyne též experimentální methoda k určení poloměru křivosti R. Pokus daří se dobře ocelovou kuličkou průměru asi 1 *cm* (jako se jich užívá v kuličkových ložiskách) na kulové ploše poloměru asi 7—10 *cm*.

3.

Platinová koule poloměru 10 cm a specifické hmoty 2·15 g/cm³ ponoří se do vody tak, že se právě dotýká svým hořením bodem původního vodního povrchu. Dokažte, že vlivem přitažlivosti od koule pocházející se vodní povrch zvedne nad kouli, a vypočtěte poloměr křivosti vodního povrchu právě nad ní.

R.

Řešení. Není-li platinové koule pod vodu ponořené, tvoří vodní povrch část koule, jejímž středem jest střed zemský. Nyní předpokládejme, že kulová hmota vodní o radiu r a středu C, povrchu vodního právě se dotýkající, ztuhne, neměníc svojí hustoty. Volný povrch vodní nezmění svého tvaru. Dále pak nechť



tuhá koule zvyšuje svoji spec. hmotu z 1 na σ, spec. hmotu platiny. Jak uvidíme, zvedne se povrch vodní do bodu A, při čemž přímka AC míří do středu zemského. V bodě B, ve velmi malé vzdálenosti x od AC působí na jedničku hmotnou směrem k středu zemskému gravitační síla BD od země rovná

$$K \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \varrho}{R^2} = K \cdot \tfrac{4}{3}\pi \varrho R,$$

kde K je gravitační konstanta, R poloměr země a ϱ její střední hustota. Přitažlivá síla pocházející od platinové koule a směřující k jejímu středu C, znázorněná tratí BE, jest podobně rovna

$$K \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 (\sigma - 1)}{r^2} = K \cdot \tfrac{4}{3}\pi (\sigma - 1) \cdot r.$$

Výslednice obou sil BF musí státi patrně kolmo na povrchu vodním, neboť jinak by se vyskytovala složka síly s povrchem rovnoběžná, jíž by částice vodní se uváděla v pohyb, a nebyl by povrch vodní v rovnováze. Prodlužme BF až do bodu O, v němž protne se tížnice AC; tento bod jest středem křivosti a délka BO poloměrem křivosti zvednuté hladiny vodní. Označme tento poloměr písmenou λ a výslednou sílu BF písmenou f. Promítneme-li f i její složky ve směr původní hladiny vodní, tedy ježto průmět výslednice musí se rovnati součtu průmětů složek, platí

$$f \cdot \frac{x}{\lambda} = \tfrac{4}{3}\, K\pi\varrho R \cdot \frac{x}{R} + \tfrac{4}{3} K \cdot \pi\,(\sigma - 1) \cdot r \cdot \frac{x}{r},$$

čili

$$\frac{f}{\lambda} = \tfrac{4}{3} K\pi\,(\varrho + \sigma - 1). \qquad (1)$$

Jak f, tak i její složky jsou vesměs velmi blízce rovnoběžné s AC, neboť předpokládáme, že bod B je velmi blízký k A, tedy x velice malé. Můžeme tedy psáti velmi přibližně

$$\overline{BF} = \overline{BE} + \overline{BD} \text{ čili}$$

$$f = \tfrac{4}{3} K\pi \left\{\varrho R + (\sigma - 1)\, r\right\}. \qquad (2)$$

Dělíme-li rovnici (1) rovnicí (2), plyne

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\varrho + \sigma - 1}{\varrho R + (\sigma - 1)\, r} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\sigma - 1}{\varrho}\right)$$

neboť můžeme patrně ve jmenovateli zanedbati hodnotu $(\sigma - 1)\, r$ nesmírně malou oproti ϱR. Tím je dána hledaná křivost vodního povrchu v bodě A. Dosadivše $\sigma = 21{\cdot}5\ \frac{g}{cm^3}$ a $\varrho = 5{\cdot}5$, nacházíme

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{20{\cdot}5}{5{\cdot}5}\right) = \frac{1}{R} \cdot \frac{26}{5{\cdot}5} = \frac{1}{R} \cdot 4{\cdot}73$$

čili

$$\lambda = \frac{R}{4{\cdot}71},$$

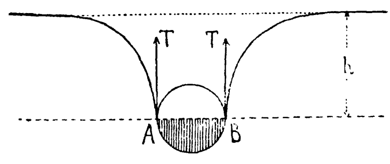
nezávisle na poloměru platinové koule, pokud ovšem lze $(\sigma - 1)\, r$ oproti ϱR zanedbati.

4.

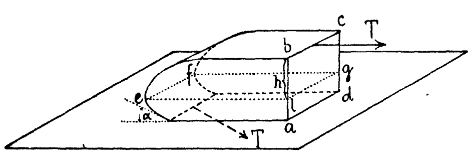
Určete průměr nejtlustší ocelové jehly specifické hmoty $7{\cdot}7\ g/cm^3$, která může ještě plovati na povrchu vodním na základě jeho povrchového napětí 70 dyn/cm, pokud se ovšem neomáčí.

R.

Řešení přibližné. Na ponořenou (a neomáčenou) válcovitou jehlu o poloměru r působí směrem dolů tíže, kteráž na jedničku délky jehly se rovná $\pi r^2 \sigma g$, kde σ je spec. hmota její a g urychlení tíže. Směrem nahoru působí na jedničku délkovou



různé síly a to: 1. Vztlak vody vytlačené ponořenou částí objemu jehly rovný $k \,.\, \pi r^2 g$, kde k je zlomek menší než 1. 2. Vztlak hydrostatický působící v hloubce h a působící na plochu $2r \,.\, 1$, tedy rovný $2rhg$, kdež h jest nutno teprve určiti. 3. Tah od povrchového napjetí $T = 70 \dfrac{dyn}{cm}$ působící: Přímý názor zdá se nám podávati řešení to, že síly působící směrem vzhůru jsou největší, dotýká-li se kapalina bodů A a B tak, že společná tangenta k válci ocelovému a profilu vody je vertikální (jak na obr. naznačeno), takže tah na jedničku délkovou jest roven $2T$ a vztlak sub 1. roven $\frac{1}{2}\pi r^2 g$. Zbývá vyšetřiti výšku h hladiny nad rovinou AB. Závisí patrně na povrchovém napětí, a nalezneme ji úvahou následující:



Představme si velikou kapku vodní, spočívající na rovinném podkladě, jejž neomáčí. Budiž tak veliká, že její horní povrch je rovinný. Vyřízněme z ní podélnou část $aebdfc$ šířky jednoho centimetru ($ad = bc = 1\ cm$) a mysleme si ji rozdělenu horizontálním řezem $efgl$ vedeným v největší její šířce, takže tangenta k profilové křivce aeb resp. dfc v bodě e a f je vertikální. Profilová křivka je onou křivkou, ohraničující volný povrch kapaliny, povrchovému napětí podrobené, jejíž tvar i v naší úloze intervenuje. Délka $bl = cg$ jest patrně naším h v řešení úlohy. Najdeme ji z podmínek rovnováhy. Na hoření část $belcfg$ kapky působí ve směru horizontálním z leva v právo síla T od povrchového napětí, kterou na délce bc nakreslená část kapky ji k sobě táhne. Za to z prava v levo působí tlak hydrostatický od kapaliny spec. hmoty s, který vzrůstá stejnoměrně od 0 do shg, pokračujeme-li od povrchu do hloubky h. Výslednice tohoto tlaku, ježto střední tlak se rovná $\frac{sgh}{2}$ a plocha, na níž působí h, je $\frac{1}{2}sgh^2$. Ježto síly v obou směrech musí býti stejné, má-li býti rovnováha, musí

$$\tfrac{1}{2}sgh^2 = T \text{ čili } h^2 = \frac{2T}{sg}.$$

Uvažujeme-li podobně rovnováhu horizontálních složek vnějších sil na celé části kapky ve výkresu znázorněné, kladouce výšku $ab = dc = H$ a předpokládajíce, že kapka dosedá na rovinný podklad styčným úhlem α (viz výkres), máme obdobně

$$\tfrac{1}{2}sgH^2 = T \cdot \cos\alpha + T = T\,(1 + \cos\alpha).$$

Mimochodem připomínáme, že největší výška kapky plyne patrně pro $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$ jakožto $\sqrt{\frac{4T}{sg}}$. V našem případě, kde kapalinou je voda, je patrně $s = 1$. (Tyto vývody viz: *Strouhal-Kučera*: Mechanika. Nákladem J. Č. M. v Praze 1910, str. 735 a násl.)

Nyní se můžeme navrátiti k řešení svého původního problému. Rovnováha sil působících na jehlu směrem dolů a nahoru vyžaduje, aby

$$\pi r^2\sigma g = \tfrac{1}{2}\pi r^2 g + 2rhg + 2\,T$$

čili

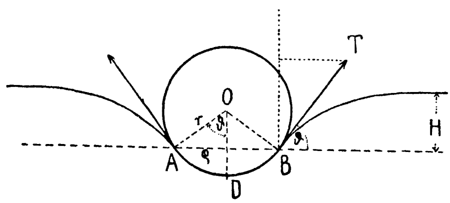
$$r^2 \cdot \pi g\,(\sigma - \tfrac{1}{2}) - r \cdot 2g\sqrt{\frac{2T}{g}} - 2T = 0$$

neboli

$$r = \frac{\sqrt{8T}\,[1 + \sqrt{1 + \pi\,(\sigma - \frac{1}{2})}]}{\pi\,(2\sigma - 1)\sqrt{g}}.$$

Dosadíme-li dané hodnoty $T = 70\,\frac{dyn}{cm}$, $\sigma = 7{\cdot}7\,\frac{gramm}{cm^3}$, $g = 981\,\frac{cm}{sec^2}$ (vše je udáno v míře absolutní), obdržíme výsledek (počítaný logarithmickým pravítkem) $r = 0{\cdot}0973\ cm = 0{\cdot}973\ mm$, neboť patrně r maximálné plyne pro znamení $+$ před odmocninou a záporná hodnota r nemá fysikálního smyslu.

Řešení přesné. Zcela obdobnou úvahou dospějeme k řešení přesnému. Dosud jsme z přímého názoru předpokládali, že tečné v prvých styčných bodech kapaliny a jehly mají býti vertikální. Tento předpoklad jest však pouze přibližný. Všeobecně mohou svírati s horizontální rovinou úhel ϑ, který je roven úhlu AOD. V tomto případě jest jako dříve síla tíže na jedničku délkovou jehly působící směrem dolů $\pi r^2 \sigma g$.



Ale 1. vztlak vody vytlačené částí ABD jehly jest, ježto plocha ABD se rovná $r^2 (\vartheta - \frac{1}{2} \sin 2\vartheta)$, nyní roven

$$r^2 (\vartheta - \tfrac{1}{2} \sin 2\vartheta) \,.\, g.$$

2. Vztlak hydrostatický, nazveme-li výšku hladiny nad rovinou AB nyní H, jest $H \,.\, g \,.\, 2r \sin \vartheta$. Při tom jest H dáno vztahem dříve odvozeným

$$\tfrac{1}{2} s g H^2 = T (1 + \cos \alpha),$$

kdež ovšem za α musíme psáti $\pi - \vartheta$, takže máme teď

$$\tfrac{1}{2} s g H^2 = T (1 - \cos \vartheta)$$

čili

$$H = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \sqrt{\frac{T}{sg}}\,.$$

3. Tah kolmo vzhůru, pochodící od povrchového napětí, jest nyní $2T \,.\, \sin \vartheta$. Pro rovnováhu na vodě $(s = 1)$ plyne

rovnice

$$\pi r^2 \sigma g = r^2 (\vartheta - \tfrac{1}{2} \sin 2\vartheta)\, g +$$

$$4r \sin \vartheta \,.\, \sin \frac{\vartheta}{2} \,.\, \sqrt{\frac{T}{g}} \,.\, g + 2T \,.\, \sin \vartheta$$

neboli, uspořádáme-li a dosadíme-li numerické hodnoty,

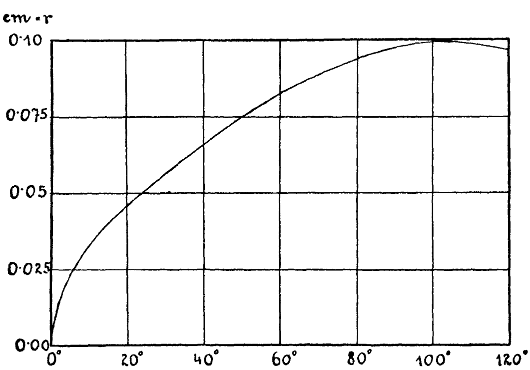
$$r^2 (24{\cdot}1 + 0{\cdot}5 \,.\, \sin 2\vartheta - \vartheta) - 2r \,.\, 0{\cdot}534 \,.\, \sin \vartheta \,.\, \sin \frac{\vartheta}{2} =$$

$$0{\cdot}1426 \,.\, \sin \vartheta.$$

Řešíme-li rovnici tuto vzhledem k r, volíce u odmocniny znamení kladné, obdržíme

$$r = \frac{\sin \vartheta \,.\, \sin \frac{\vartheta}{2}}{45{\cdot}2 + 0{\cdot}932 \,.\, \sin 2\vartheta - 1{\cdot}86\, \vartheta} +$$

$$\sqrt{\frac{0{\cdot}267 \sin \vartheta}{45{\cdot}2 + 0{\cdot}932 \sin 2\vartheta - 1{\cdot}86 \,.\, \vartheta} + \left(\frac{\sin \vartheta \,.\, \sin \frac{\vartheta}{2}}{45{\cdot}2 + 0{\cdot}932 \sin 2\vartheta - 1{\cdot}86\, \vartheta}\right)^2}.$$



Nyní nám nezbývá, než vypočísti r pro různá ϑ. Znázorníme-li pak vztah mezi r a ϑ graficky, obdržíme obrazec zde připojený, z něhož plyne, že největší hodnota r patří úhlu $\vartheta = 100^0$; rovná se pak $r\ max = 0{\cdot}0995\ cm = 0{\cdot}995\ mm$. Vidíme tudíž, že zapadá válcovitá jehla největšího průměru svým středem O poněkud pod horizontální rovinu proloženou styčnými body AB. Výsledek přesný a přibližný se přes to mnoho neliší.

Chceme-li vykonati příslušný pokus, zahřejme jehlu průměru asi 1·8 *mm* a povlečme její povrch tenounkou vrstvou paraffinu. Než tato ztuhne, posypme ji mírně lykopodiovým práškem. Takto upravenou jehlu, k níž voda nelne, položme na kousku pijavého papíru na čistý povrch vodní. Pijavý papír za chvilku padne ke dnu a jehla plove na povrchu.

5.

Na konci dlouhé tenké trubičky, z isolatoru zhotovené, sedí bublina z mydlinek, trubicí s vnějším vzduchem spojená. Dokažte, že bude bublina v rovnovážném stavu (nebude se stahovati), nabijeme-li ji elektricky na potenciál V *rovný*

$$V = 4\sqrt{2\pi r F},$$

kde r *je poloměr bubliny,* F *povrchové napětí. Elektrické silokřivky, končící se na povrchu opatřeném nábojem o hustotě* δ *elektrostat. jednotek na* cm^2, *působí naň tahem*

$$2\pi\delta^2\, dyn/cm^2. \qquad R.$$

Řešení, jež zaslal p. *Mil. Sosna* z reál. v Litovli.

Následkem povrchového napětí F snaží se bublina poloměru r se stáhnouti tlakem $\frac{4F}{r}\frac{dyn}{cm^2}$. Tah elektrických silokřivek na jedničku plošnou $2\pi\delta^2\frac{dyn}{cm^2}$, kde δ je hustota el. náboje, musí se rovnati tomuto tlaku, má-li býti rovnováha; tedy

$$2\pi\delta^2 = \frac{4F}{r}.$$

Ale hustota elektrického náboje

$$\delta = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{Vr}{4\pi r^2},$$

kde Q je celkový náboj koule, rovný součinu z potenciálu V a kapacity koule, jež je dána jejím poloměrem. Dosazením plyne $V = 4\sqrt{2\pi r F}$, jak bylo dokázati.

Že tlak od povrchového napětí se rovná $\frac{4F}{r}$, dokážeme nejjednodušeji takto: Mysleme si plnou kouli kapalinovou, tíži nepodrobenou, na př. kouli olejovou suspendovanou ve směsi vody a alkoholu stejné s ní hustoty. Rozřízneme-li v duchu kouli podél největšího kruhu obvodu $2\pi r$, působí na každou polovici od povrchového napětí tah $2\pi r \,.\, F$, jenž rozdělen je na plochu πr^2. Na jedničku plošnou působí tedy síla $\frac{2\pi r F}{\pi r^2} = \frac{2F}{r}$, čímž jest dán vnitřní tlak od povrchového napětí pochodící. U duté koule, jejíž tloušťka stěny je oproti poloměru velmi malá, jako je tomu u bubliny mydlinové, jsou povrchy, v nichž působí povrchové napětí, dva a to stejné, a jest tudíž tlak, jímž se hledí koule smrštiti, dvojnásobný, tedy roven $\frac{4F}{r}$, jak nahoře psáno.

Ještě jinak plyne tento výsledek z principu energie, víme-li, že povrchové napětí F representuje také množství energie na jedničce povrchové. Mějme plnou kouli poloměru r, která vlivem povrchového napětí zmenší svůj poloměr o velice malou délku Δr. Je-li výsledný tlak (t. j. síla na jedničku povrchu) roven S, vykonala se práce $4\pi r^2 \,.\, S \,.\, \Delta r$, ježto se každá jednička povrchová posunula ve směru tlaku o Δr. Původní energie povrchová byla $4\pi r^2 \,.\, F$, nová jest

$$4\pi\,(r - \Delta r)^2\, F = 4\pi r^2 F - 8\pi r \Delta r \,.\, F.$$

Dle principu zachování energie musela se práce vykonati na útraty energie povrchové, čili

$$4\pi r^2 S \,.\, \Delta r = 8\pi r F \,.\, \Delta r,$$

z čehož jako nahoře

$$S = \frac{2F}{r}.$$

(Srovnej také v citované u příkladu předchozího knize *Strouhal-Kučerově* str. 714 a násl.)

6.

Kus síry váží 50 grammů ve vzduchu teploty 17° C a tlaku 740 mm. Jaká je jeho skutečná váha, je-li jeho objem 25 cm³ a specifická hmota vzduchu 0·00129 g/cm³ za 0° C a 760 mm tlaku, jeho koefficient roztažlivosti tepelné 1/273 a specifická hmota mosazných závaží 8·0 g/cm³? *R.*

Řešení, jež zaslal p. *M. Sosna* z reál. v Litovli.

Je-li skutečná hmota tělesa o specifické hmotě S, jež vážíme M, hmota závaží Z, specifická hmota jejich s a specif. hmota vzduchu σ, pak jest rovnováha na vahách, vzhledem k vztlaku vzduchu působícímu jak na těleso vážené objemu $V = \frac{M}{S}$, tak na závaží objemu $\frac{Z}{s}$ dána vztahem:

$$\frac{M}{S}(S - \sigma)\,g = \frac{Z}{s}(s - \sigma)\,g,$$

kde g je urychlení zemské tíže, z čehož

$$M = Z \,.\, \frac{S}{s} \,.\, \frac{s - \sigma}{S - \sigma}.$$

Dle tohoto vzorce mohli bychom počítati přesně, dosadivše za $S = \frac{M}{V}$. Počítání lze zjednodušiti následujícím způsobem. Přepišme daný výraz na

$$M = Z \,.\, \frac{1 - \frac{\sigma}{s}}{1 - \frac{\sigma}{S}}.$$

Vzpomeneme-li, že jak $\frac{\sigma}{s}$, tak i $\frac{\sigma}{S}$, jsou čísly malými, lze v rozvoji dle binomické poučky zanedbati jejich vyšší mocniny, resp. vzájemné násobky a psáti

$$M = Z\left(1 - \frac{\sigma}{s}\right)\left(1 + \frac{\sigma}{S}\right) = Z\left(1 + \frac{\sigma}{S} - \frac{\sigma}{s}\right)$$

$$= Z + Z\sigma \,.\left(\frac{1}{S} - \frac{1}{s}\right).$$

Specifická hmota vzduchu σ za $17^0\,C$ a 740 *mm* tlaku je dle zákona Boyle-Mariotte-Gay-Lussacova

$$\sigma = 0{\cdot}00129 \,.\, \frac{740}{760} \,.\, \frac{1}{1 + \frac{17}{273}} = 0{\cdot}00118\, \frac{g}{cm^3}$$

a za specifickou hmotu síry stačí bráti v prvém přiblížení

$$S = \frac{Z}{V} = \frac{50}{25} = 2 \frac{g}{cm^2},$$

takže

$$\sigma . \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{s}\right) = 0{\cdot}00118 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) = 0{\cdot}000493$$

$$\text{a } M = 50 + 50 . 0{\cdot}000493 = 50{\cdot}022 \text{ grammů.}$$

7.

Vnitřní polep kulovité Leydenské láhve, jejíž polepy mají poloměry 12 a 14 cm, jest nabit 25 jednotkami kladného náboje a vnitřní polep druhé láhve s polepy o poloměrech 8 a 12 cm je nabit 5 jednotkami náboje téhož znamení. Vnější polepy obou lahví jsou spojeny se zemí. Spojíme-li na okamžik vnitřní polepy obou lahví, ve kterém směru bude se pohybovati kladný náboj, je-li dielektrikem u obou lahví vzduch a jejich vzájemná vzdálenost velmi značná? *R.*

Řešení, jež zaslali žáci gymn. v Praze v Žitné ulici.

Náboj kladný pohybuje se z míst vyššího potenciálu na místa potenciálu nižšího. Potenciál je dán poměrem mezi nábojem a kapacitou vodiče. Kapacita kulového kondensátoru o dielektriku diel. konstanty K a radiích R_1 a R_2 je

$$C = \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}.$$

Jest tedy u prvého kondensátoru

$$C_1 = \frac{12 . 14}{2} = 84 \; cm,$$

u druhého

$$C_2 = \frac{8 . 12}{4} = 24 \; cm,$$

ježto dielektrikem je vzduch, $K = 1$. Podobně potenciál prvého je

$$V_1 = \frac{E_1}{C_1} = \frac{25}{84},$$

druhého

$$V_2 = \frac{E_2}{C_2} = \frac{5}{24} = \frac{25}{120}.$$

Ježto $V_1 > V_2$, přechází kladný náboj z prvé Leydenské láhve do druhé.

8.

Dokažte, že všeobecně existují dvě polohy spojné čočky, v nichž dává obraz daného pevného předmětu na nepohnutém stinítku. V jakém vztahu je lineární velikost předmětu a obou obrazů? *R.*

Řešení, jež zaslali žáci gymn. v Praze v Žitné ulici.

Danou úlohu řeší rovnice čočková

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

a dle podmínky úlohy vztah

$$a + b = Const = 2c.$$

Z rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2c - a} = \frac{1}{f}$$

čili

$$a^2 - 2ac + 2fc = 0$$

plynou dva kořeny

$$a_{12} = c \pm \sqrt{c^2 - 2fc},$$

jež oba dávají možnou polohu čočky.

Lineárné zvětšení jest obecně rovno $\frac{b}{a}$, tedy v prvém případě

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{2c - a_1}{a_1} = \frac{c - \sqrt{c^2 - 2fc}}{c + \sqrt{c^2 - 2fc}},$$

v druhém

$$\frac{b_2}{a_2} = \frac{2c - a_2}{a_2} = \frac{c + \sqrt{c^2 - 2fc}}{c - \sqrt{c^2 - 2fc}}.$$

Byla-li velikost předmětu rovna A, jest zvětšeními dána velikost obrazů, $B_1 = A \cdot \frac{b_1}{a_1}$ a $B_2 = A \cdot \frac{b_2}{a_2}$. Z hořeního je patrno, že $A \cdot \frac{b_1}{a_1} \cdot A \frac{b_2}{a_2} = A^2 = B_1 B_2$ čili že velikost předmětu je střední geometr. úměrnou mezi oběma velikostmi obrazů.

Řešení p. *V. Bláhy* ze VII. reál. v Novém Městě na Moravě.

Ještě kratčeji plyne řešení ze vztahu Newtonova (Mašek, Fysika pro reálky II. str. 184).

$$xx_1 = f^2, \text{ kde } x = a - f, \quad x_1 = b - f.$$

Úloha vyžaduje další vztah

$$x + x_1 + 2f = Const = 2c.$$

Obě rovnice jsou vzhledem k x a x_1 symmetrické, lze tedy x za x_1 a naopak zaměniti; tím jsou dány ony dvě polohy čočky. Ježto zvětšení $g_1 = -\frac{f}{x}$ a záměnou x_1 za x v druhé poloze $g_2 = -\frac{f}{x_1}$, máme patrně, byl-li předmět lineární velikosti A a obrazy $B_1 = A \cdot g_1$ a $B_2 = A \cdot g_2$

$$B_1 B_2 = A^2 \cdot g_1 g_2 = A^2 \frac{f^2}{xx_1} = A^2,$$

čili týž vztah jako svrchu.

9.

Osvětlíme-li Newtonovo sklo plamenem sodíkovým, vznikne systém interferenčních pruhů; vzdalujeme-li pak pomalu hoření čočku od spodní desky, tu tyto pruhy střídavě mizí a znovu se objevují. Udejte důvod tohoto zjevu a vysvětlete, jak ho lze užíti ku zkoumání spektrálních čar. *R.*

Řešení. Jak je známo (viz na př. *Mašek*: Fysika pro VII. tř. reálek, str. 236 a násl.), vznikají u Newtonova skla pruhy interferenční vzájemným působením světla odraženého na rozhraní mezi čočkou a tenkou vrstvou vzduchovou a světla odraženého na rozhraní mezi touto vrstvou vzduchovou a rovinným sklíčkem. Minima tmavá leží v místech, kde vrstva vzduchová má tloušťku rovnou 0, $2\frac{\lambda}{4}$, $4\frac{\lambda}{4}$, obecně $2k\frac{\lambda}{4}$, maxima světla tam, kde je tloušťka $\frac{\lambda}{4}$, $3\frac{\lambda}{4}$, obecně $(2k+1)\frac{\lambda}{4}$, kde k je číslo celé a λ délka vlny užitého světla. U Newtonova uspořádání leží tato místa na kruzích, a vzniknou tedy za osvětlení homogenního kroužky tmavé a světlé. Když nyní vzdalujeme spodní desku od vrchní čočky, zvětšuje se tloušťka vrstvy vzduchové a kruh jistou tloušťku charakterisující zmenšuje svůj poloměr, stahuje se, až ve středu zjevu mizí. Díváme li se na nějaké místo poblíže středu, vidíme, že jím putují kroužky směrem k středu. Když byl místo bývalého tmavého kroužku zaujal nejblíže následující kroužek, znamená to, že se tloušťka vrstvy zvětšila v onom místě o $2\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$. Tento pokus provedl v r. 1862 *Fizeau* a seznal, že když bylo prošlo takovým místem asi 490 pruhů, staly se tyto úplně nezřetelnými, ba úplně zmizely. Při dalším vzdalování desky od čočky však se proužky znovu objevily a za průchodu proužku asi 980tého byly zase stejně dobře patrny jako dříve. Důvod tohoto zjevu, jenž ještě asi 50kráte se opakoval při dalším vzdalování, leží v tom, že sodíkové světlo sestává ze dvou světel, ze dvou čar spektrálních D_1 a D_2, délek vlnitých 590·0 a 589·4 $\mu\mu$ ($= 10^{-6}$ *mm*). Snadno nalezneme nyní tloušťku vrstvy vzduchové takovou, aby odpovídala současně minimu jednoho z těchto světel a maximu druhého. Stačí voliti celé číslo k_1 tak, aby

$$2k_1\frac{\lambda_1}{4} = (2k_1 + 1)\frac{\lambda_2}{4} \text{ čili } k_1 = \frac{\lambda_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

V našem případě plyne $k_1 = 491$. Leží tedy 491tý tmavý proužek pro světlo D_1 v témž místě, jako 491tý proužek světlý světla D_2 a přikrývajíce se úplně, což velmi přibližně činí i proužky sousední, působí na oko jistou střední intensitou světelnou, v níž však proužků rozeznati nelze. Zcela podobně nalezneme, že 982tý proužek tmavý pro D_1 leží v témž místě jako 983tý tmavý pro D_2, to jest, v těchto místech zase vidíme zřetelně světlé i tmavé proužky. Vůbec jest podmínkou toho, aby proužky nebyly znatelné. překrývala se maxima a minima, vztah

$$2k_1 \frac{\lambda_1}{4} = (2k_1 + 2\nu + 1) \frac{\lambda_2}{4},$$

kde ν je číslo celé, kde však je *Fizeau* nalezl, u Newtonova uspořádání hodnota $(2k_1 + 2\nu + 1)$ nesmí překročiti číslo asi 50.000, neboť pak vůbec již proužky se neobjevují. Vůbec lze z takovýchto „konsonancí" a „dissonancí" usuzovati o složitosti čáry spektrálné, jako v našem případě byla čára vodíková. *Michelson* udal uspořádání k tomu sloužící, Newtonovým sklům, z nichž jedno je posunovatelné. úplně obdobné, s tím pouze rozdílem, že vrstva vzduchová není klínovitá, nýbrž úplně planparallelní. Nazývá se interferometrem, a jeho konstruktér sám provedl velkou řadu podobných výzkumů, které poutavě popisuje v populární knížce „Light waves and their uses" (Světelné vlny a jich užívání), nedávno také do němčiny přeložené.

10.

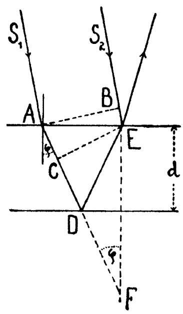
Mezi rovinou a čočkou jsou vytvořeny Newtonovy kroužky. Průměr třetího tmavého kruhu je 1 cm, osvětlíme-li světlem natriovým ($\lambda = 589 \,.\, 10^{-7}$ cm) v takovém úhlu, že světlo prochází tenkou vrstvou vzduchovou v úhlu 30° ku kolmici na spodní ploše. Najděte poloměr křivosti čočky. *R.*

Řešení. Tmavý kruh n-tý leží v těch místech, kde difference dráhy paprsku na hoření a spodní ploše vrstvy vzduchové odraženého se rovná $n\lambda$, kde λ je délka vlny užitého světla. Vztah mezi differencí dráhovou, tloušťkou vrstvy a úhlem, pod kterým paprsek vrstvou prochází, plyne snadno z přip. výkresu. Dráhy dvou interferujících paprsků S_1 a S_2 jsou až k bodům A a B, $(AB \perp S_2)$ stejné. Dráha BE ve skle a AC $(CE \perp AD)$ ve vzduchu jsou dle Huygensovy konstrukce (viz *Mašek*, Fysika pro VII. tř. reálek, str. 173) opticky rovnocenné, t. j. proběhnou se za tutéž dobu, leží na nich stejný počet délek vlnitých. Difference dráhová obou paprsků je tedy dána tratí CDE a tato, jak nejsnáze překlopením DE v DF vidíme, je rovna $2d \cos \varphi$, kde d je tloušťka vrstvy vzduchové. Z toho plyne vztah

$$2d \cos \varphi = n\lambda.$$

Mezi poloměrem ϱ tmavého kroužku u Newtonova skla, poloměrem svrchní čočky R a tloušťkou vrstvy d v místech tmavého kruhu platí známý geometrický vztah

$$\varrho^2 = (2R - d)\, d = 2Rd.$$



Velmi malé d^2 se zanedbává. Máme tudíž

$$R = \frac{\varrho^2}{2d} = \frac{\varrho^2 \,.\, \cos\varphi}{n\lambda}.$$

Dosazením za

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\, cm,\ \varphi = 30^0,\ n = 3 \text{ a } \lambda = 589 \,.\, 10^{-7}\, cm$$

plyne výsledkem

$$R = 12{\cdot}25 \text{ metrů.}$$

Řešení úloh zaslali:

Pánové:

Vojtěch Bláha, VII. r. v Novém Městě na Moravě
m. 1., 2., 5.—9., 13., 14., 20.—25., 28.—31., d. 1.—8., f. 1.—10.,

Pavel Bořkovec, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 12., 13., 18., 21.—30., 32., d. 1.—8.,

Josef Bruča, r. v Kroměříži
m. 2., 15., 16., 18., 20.,

Jan Částka, III. roč. vyš. prům. šk., odd. stroj. v Plzni
m. 1., 2., 5., 6., 8., 9., 13., 17., 19.—22., 24., 27., 28., 30.—32., 34., 35., d. 1.—7.,

A. Černý, VI. r. v Moravské Ostravě
d. 1.—6.,
Otokar Černý, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—3., 5., 6., 9., 13., 21.—25., 27., 28., 32.,
Karel Diviš, VIIa r. v Písku
m. 1.—3., 5., 6., 9.—13., 16., 17., 19.—21., 23., 25., 28., 30., 31., 34., 35., d. 4., f. 6., 7.,
Josef Dvořáček, uč. v Domašově u Brna
m. 1., 2., 9., 13., 16., 17.,
Jaroslav Dvořák, VII. r. v Bučovicích
d. 1.—4.,
Miloš Eliáš, VI. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 2., 5., 6., 28., 29., 30., 32.,
Jiří Friedländer, VII. g. v Roudnici
m. 1., 2., 13., 21., 22., 25., 30., 31.,
Bohumil Gregor, VI. r. v Novém Městě na Moravě
d. 1., 2., 4., 5.,
Josef Hak, VIa r. v Brně
m. 1., 2., 5., 9., 11., 13., 14., 17., 19., 23., 25., 28., 29., 30., 31., 32., 34., 35., d. 1.—8.,
Miloslav Hampl, VIa g. v Českých Budějovicích
m. 1., 2., 5., 6., 9., 13., 14., 19., 22., 27.,
Otakar Herink, VII. r. na Kladně
m. 1., 3., 5., 6., 7., 9., 12., 17., 18., 23., 29., 34., d. 1.—5.,
Zdeněk Hladký, VII. g. v Moravské Ostravě
m. 2., 5., 6., 13., 18., 20., 23., 30., f. 1.,
Adolf Hruška, VI. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 2., 5., 6., 9., 17., 27.—30., 33.,
Břetislav Hůla, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—9., 12.—25., 27.—32., 34., 35., f. 1., 4.—8., 10.,
O. Janota, V. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 2., 5., 18., 23.,
Josef Kaucký, VII. r. na Kladně
m. 1.—14., 16.—23., 25., 30., 31., 33., 34.,
Jaroslav Knotek, VII. r. v Karlíně
m. 1.—3., 5., 6., 8., 9., 13., 14., 17., 20.—25., 28.—32., 34., 35.,

Josef Kodrle, VIa r. v Pardubicích
m. 1.—3., 5., 6., 9.—15., 17. - 23., 25., 27., 28., 30.—34., d. 1.—8., f. 1.,

Julius Koerner, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—9., 12.—25., 27.—32., 34., 35., f. 1., 4.—8., 10.,

Květoslav Koldovský, V. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 2., 5., 29.,

Julius Kopp, VI. r. v Uherském Brodě
m. 17., d. 1.—8.

Ludvík Koukal, VII. r. v Bučovicích na Moravě
m. 2., d. 1., 2., 3., 4., 6., 8.,

Josef Kozák, VII. r. v Pardubicích
m. 1., 2., 5., 6., 10., 11., 13., 14., 17.—25., 29., 30., d. 1.—8.,

Čeněk Kramoliš, VIII. g. v Kroměříži
m. 2., 5., 6., 9., 12., 14., 17., 18., 19.,

Jan Květ, VI. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 2., 9., 13.,

B. Lahodný, VI. r. v Novém Městě na Moravě
m. 2.—7.,

Jaroslav Lašťovka,
m. 3., 5, 9., 13., 18., 21.—25, 28., 32.,

Rudolf Lukeš, VIa r. v Karlíně
m. 2., 7., 8., 9., 12., 24.,

František Mádle, V. r. v Rakovníce
m. 2., 5., 6., 7., 14., 17., 19., 20., 23., 27., 32.,

Hubert Masařík, VI. g. v Přerově
m. 2., 18.,

Jaroslav Mayer, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—25., 27.—35., f. 1., 2., 4.—8., 10.,

Alois Mezek, učitel v Panské Lhotě na Moravě
m. 1.—20.,

Čestmír Moravec, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—7., 11.—15., 19.—21.; 23., 27., 28., 32, f. 1., 4., 5., 8., 10.,

František Moravec, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—3., 5., 6., 8., 9., 12.—15., 20.—22., 27.—30., f. 2., 4., 5., 7., 8.,

Jan A. Novák, V. r. v Uherském Brodě
d. 1.—6.,
Emil Ouřada. VII. r. v Příbrami
m. 5., d. 2., 3., 4., 6., 8.,
Jiří Pazourek, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 2.—17., 19.—25., 27.-32., 34., 35., f. 1, 2., 4., 5., 7., 8., 10.,
Karel Pešek, V. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 2., 5., 9., 14., 18., 21., 22., 28., f. 1, 4., 5., 8., 10.,
Jan Pohanka, VI. r. v Novém Městě na Moravě
d. 1., 2., 4.,
Karel Pohonka, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—17., 19.—25., 27.—32., 34., 35., f. 1., 2., 4., 5., 7., 8., 10.,
Silvestr Prát. VII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—17., 19., 21.—32., 34., 35., f. 1., 2., 4., 5., 7., 8., 10.,
Rudolf Princ, V. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 2., 5., 18.,
František Prokop,
m. 3., 5., 9., 13., 18., 21.—25., 28., 32., f. 1., 4.,
Hubert Ripka, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.—17., 19.—32., 34., 35., f. 1., 2., 4. 5., 7., 8.. 10.,
F. Ryba, VII. r. v Hodoníně
m. 1.—3., 5., 6., 9., 13., 16., 17., 20.-22., 27., 29., 32., 34., 35.,
Václav Sedlák, VII. r. v Plzni
m. 1., 2., 5., 6., 9., 12.-14., 17., 19., 21., 22., 24., 27.—31., 33.—35., d. 1.—8.
František Sehnal, V. g. v Přerově
m. 2., 9., 18.—20
Arnošt Sonnenschein, VII. g. v Kyjově
m. 3.,
Miloslav Sosna, r. v Litovli
f. 1., 4.-8.
Antonín Soukup, V. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 2., 5., 6., 17., 18., 24.,

Ferdinand Soukup, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1.–9., 12.–25., 27.—32., 34., 35., d. 1.—4., 6., f. 1., 4.—8., 10.,

Rudolf Stránský, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 2., 3., 5., 6., 9., 13., 16.—20., 23., 27., f. 2., 4.,

Miloslav Suda, VIII. r. g. v Klatovech
m. 2., 5., 6., 13.,

T. Šedivý, VIII. g. v Kolíně
m. 1., 2., 5., 6., 8., 13., 17., 19.—21., 23., 30., 31., 34., 35.,

Josef Ševčík, VI. r. v Kroměříži
m. 2., 12., 17., 19., 20., f. 4.,

Viktor Ševčík, VIII. g. v Přerově
m. 2., 5., 6., 9., 13., 16.—18., 20., 21., 25., 28., 30.—32., 35.,

Vladimír Škarda, V. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 1., 2., 5., 22., 23.,

Em. Šlechta, VI. r. v Kutné Hoře
m. 1., 2., 5., 6., 8., 9., 16., 18., 22., 23., d. 3., f. 1. 2., 4.,

Karel Vavřina, VII. g. v Čáslavi
m. 2., 5., 6., 13., 20., 21.,

Josef Vorel, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
m. 2., 3., 5., 6., 9., 13., 18., 21.—25., 28., 32., f. 1., 4.,

J. Vyhnálek, VIb r. v Olomouci
m. 1., 2., 6., 8., 9., 13., 17., 18., 23.

Udělení cen.

Z mathematiky:

Redakce úloh přihlížejíc nejen k počtu, ale i k jakosti řešení, přisoudila těmto pp. řešitelům ceny vypsané výborem „Jednoty Českých Mathematiků a Fysiků“.

Ceny první:

Jan Částka, III. roč. vyš. prům. šk., odd. stroj., v Plzni
Břetislav Hůla, VII. g. v Praze, v Žitné ul.

Josef Kaucký, VII. r. na Kladně
Josef Kodrle, VIa r. v Pardubicích
Julius Koerner, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
Jaroslav Mayer, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
Jiří Pazourek, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
Karel Pohonka, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
Silvestr Prát, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
Hubert Řipka, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
Ferdinand Soukup, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.

Spis: Dr. F. J. Studnička: Úvod do nauky o determinantech (Sborník J. Č. M. č. III.) obdrží pánové *Jan Částka*, *Josef Kodrle* a *Jaroslav Mayer*.

Ceny druhé:

Vojtěch Bláha, VII. r. v Novém Městě na Moravě
Karel Diviš, VIIa r. v Písku
Josef Hak, VIa r. v Brně
Josef Kozák, VII. r. v Pardubicích
Javoslav Knotek, VII. r. v Karlíně
Čestmír Moravec, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
František Moravec, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
Václav Sedlák, VII. r. v Plzni.

Ceny třetí:

Pavel Bořkovec, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
Otokar Černý, VII. g. v Praze, v Žitné ul.
Miloš Eliáš, VI. g. v Praze, v Žitné ul.
Otokar Herink, VII. r. na Kladně
F. Ryba, VII. r. v Hodoníně
Rudolf Stránský, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
T. Šedivý, VIII. g. v Kolíně
Viktor Ševeček, VIII. g. v Přerově
Josef Vorel, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.

Z deskriptivní geometrie:

Spis. J. Sobotka: Deskriptivní geometrie promítání parallelního (Sborník J. Č. M., č. X.) obdrží pánové:

Pavel Bořkovec, VIII. g. v Praze, v Žitné ul.
Josef Kozák, VII. r. v Pardubicích.

Mimo to obdrží pánové:

Vojtěch Bláha, VII. r. v Novém Městě na Moravě
Hubert Blažek, VII. r. v Kroměříži
Jan Částka, III. roč. vyš. prům. šk., odd. stroj., v Plzni
Josef Hak, VI. r. v Brně
Josef Kodrle, VIa r. v Pardubicích
Julius Kopp, VI. r. v Uherském Brodě
Jan A. Novák, V. r. v Uherském Brodě
Václav Sedlák, VII. druhé r. v Plzni

spisy: Jarolímek: Deskriptivní geometrie pro vyšší školy reálné I., II., III. a Jarolímek: Deskriptivní geometrie v úlohách.

Z fysiky:

Cenu prvou (Dr. *V. Strouhal*. Akustika) obdrží p. *V. Bláha*, stud. VII. tř. reálky v Novém Městě na Moravě.

Ceny druhé (*Nábělek*: Hvězdné nebe, Nebeské hodiny, Obzor) obdrží pp. *Jar. Mayer*, *Jiří Pazourek*, *Karel Pohonka*, *Silv. Prát*, *Hub. Ripka*, vesměs stud. VII. tř. gymnasia v Praze v Žitné ulici.