Bohumil Bydžovský

Sur certains points remarquables d'une cubique rationnélle plané

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 4, 219--229

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122663

SUR CERTAINS POINTS REMARQUABLES D'UNE CUBIQUE RATIONNELLE PLANE.

B. BYDŽOVSKÝ, Praha.

(Reçu le 26 Novembre 1949.)

La généralisation la plus naturelle du problème des points d'inflexion d'une cubique, c. à d., des points où les tangentes ont avec la courbe un contact triponctuel, est celle dans laquelle on étudie les points où la cubique a, avec une n-ique, un contact du plus haut ordre possible, à savoir un contact $3n$-ponctuel. J'appellerai ces points tout court *points au contact $3n$-ponctuel.* Pour $n = 2$ on obtient les points sextactiques bien connus, où la cubique a un contact 6-ponctuel avec des coniques.

Dans cette courte étude du problème annoncé je me bornerai aux cubiques rationnelles. Pour une cubique ayant un point de rebroussement, ce problème est dépourvu d'intérêt, puisqu'en cherchant les points en question on retrouve, pour chaque valeur de n, le même point, à savoir, l'unique point d'inflexion de la courbe. C'est donc la cubique nodale qui fera l'objet de notre étude.

Nous écrirons son équation sous la forme

$$x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2x_3 = 0. \tag{1}$$

Pour cette forme, le noeud est le sommet O_3 du triangle de référence, les tangentes en ce point sont les axes de coordonnées o_1, o_2 et les trois points d'inflexion sont donnés par les équations

$$x_3 = 0,\ x_1^3 + x_2^3 = 0.$$

Cette équation de la courbe donne lieu, comme on sait, à l'expression paramétrique des points de la courbe suivante:

$$x_1 = 6t,\ x_2 = 6t^2,\ x_3 = 1 + t^3. \tag{2}$$

J'appellerai un point au paramètre t tout court „le point t“.

Une courbe du n-ième ordre

$$x_3^n u_0 + x_3^{n-1} u_1 + \ldots + u_n = 0 \tag{3}$$

(u_i est une forme des x_1, x_2 de l'ordre i) coupe la cubique (1) en $3n$ points dont les paramètres sont les racines de l'équation en t qu'on obtient en faisant, dans (3), la substitution (2). Cette équation est de l'ordre $3n$. Désignons ses racines par t_i $(i = 1, \ldots, 3n)$. Puisque le coefficient de t^{3n} dans cette équation est le même que son terme absolu, à savoir u_0, les racines t_i satisfont à la relation suivante

$$t_1 t_2 \ldots t_{3n} + (-1)^{n-1} = 0 \tag{4}$$

ce qui exprime la condition nécessaire et suffisante pour que $3n$ points $t_1, \ldots, t_{3n}$ de la cubique soient situés sur une courbe du n-ième ordre.

Par un calcul facile, nous obtenons l'équation de la droite passant par les points t_1, t_2 sous la forme

$$x_1(t_1^2 t_2^2 - t_1 - t_2) + x_2[1 - t_1 t_2(t_1 + t_2)] + 6x_3 t_1 t_2 = 0. \tag{5}$$

Rappelons encore qu'une cubique nodale est reproduite par un groupe de six homographies, dont les équations sont, pour la cubique écrite sous la forme (1):

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1', & x_2 &= x_2', & x_3 &= x_3' \\ x_1 &= \alpha x_1', & x_2 &= \alpha^2 x_2', & x_3 &= x_3' \\ x_1 &= \alpha^2 x_1', & x_2 &= \alpha x_2', & x_3 &= x_3' \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2', & x_2 &= x_1', & x_3 &= x_3' \\ x_1 &= \alpha x_2', & x_2 &= \alpha^2 x_1', & x_3 &= x_3' \\ x_1 &= \alpha^2 x_2', & x_2 &= \alpha x_1', & x_3 &= x_3' \end{aligned} \tag{7}$$

où α est la racine cubique imaginaire de l'unité. Les équations (6) expriment l'identité et deux homographies cycliques à la période trois; les points de la cubique se transforment par ces homographies suivant les relations

$$t = t'\sqrt[3]{1}. \tag{8}$$

Les équations (7) expriment trois homographies involutives; le centre de chacune de ces homographies est un point d'inflexion, son axe est la droite joignant le noeud au point sextactique dont le point tangentiel est le point d'inflexion respectif. Les points de la cubique se transforment par (7) suivant les relations

$$t = \sqrt[3]{1} : t'. \tag{9}$$

Le noeud est point invariant pour le groupe tout entier; tout point sextactique est invariant pour une homographie (7). Il n'y a pas, sur la courbe, d'autres points invariants pour les homographies du groupe.

Une conique

$$\sum a_{ij} x_i x_j = 0$$

se transforme par la deuxième homographie (6) en la conique

$$a_{11}\alpha^2 x_1^2 + a_{22}\alpha x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}\alpha x_1 x_3 + 2a_{23}\alpha^2 x_2 x_3 = 0$$

d'où il suit que les coniques des faisceaux

$$a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0,\ a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 = 0,\ a_{11}x_1^2 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \quad (10)$$

sont invariantes par rapport à la dite homographie; on voit de suite qu'elles sont invariantes par rapport au groupe cyclique (6) tout entier. Seulement les coniques du premier faisceau (elles ont pour tangentes les tangentes au noeud de la cubique, les points de contact étant situés sur la droite $x_3 = 0$, joignant les points d'inflexion) sont, en même temps, invariantes par rapport aux transformations (7), donc, par rapport au groupe tout entier. Je les appelerai tout court *coniques covariantes*. Il en suit que tout groupe de six points engendré par le groupe de transformations en question se trouve sur une conique.

Abordons maintenant le problème indiqué au début. Pour un point au contact $3n$-ponctuel l'équation (4) a lieu, si l'on y pose $t_1 = t_2 = \ldots = t_{3n} = t$, à savoir, l'équation

$$t^{3n} + (-1)^{n-1} = 0. \quad (11)$$

Pour $n = 1$ on a les points d'inflexion; leurs paramètres satisfont à l'équation

$$t^3 + 1 = 0. \quad (12)$$

Donc, les paramètres des points d'inflexion sont

$$-1,\ e^{\frac{\pi i}{3}},\ e^{\frac{5\pi i}{3}}.$$

Pour $n = 2$ l'équation (11) donne

$$t^6 - 1 = (t^3 + 1)(t^3 - 1) = 0$$

c. à d., les points d'inflexion (les coniques respectives sont les tangentes d'inflexion comptées deux fois) et puis trois points satisfaisant a l'équation

$$t^3 - 1 = 0 \quad (13)$$

dont les racines sont $1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}}$. Ce sont les paramètres des trois points sextactiques, en lesquels la cubique a un contact 6-ponctuel avec des coniques régulières.

En substituant pour t, on obtient pour les coordonnées des points sextactiques l'équation

$$x_1^3 - x_2^3 = 0.$$

On sait que les points sextactiques sont les points de contact des tangentes menées à la courbe des points d'inflexion. On obtient une autre propriété de ces points en déterminant la conique covariante qui les contient. On obtient son équation en déterminant les coefficients dans la première équation (10) de sorte que la conique respective contienne le point 1 de la cubique; on obtient ainsi la conique

$$9x_3^2 - x_1x_2 = 0. \quad (14)$$

En éliminant de (1) et de cette dernière équation x_3, on obtient

$$(x_1^3 - x_2^3)^2 = 0$$

ce qui nous dit que cette conique covariante touche la cubique aux points sextactiques. La conique (14) est un covariant connu de la cubique. On peut mener, d'un point t de la cubique, deux tangentes à la courbe; u étant le point de contact, la relation (4) donne

$$tu^2 + 1 = 0, \tag{15}$$

d'où $u_{12} = \pm \sqrt{-1 : t}$, u_i étant les deux points de contact. On a $u_1 + u_2 = 0$, $u_1u_2 = 1 : t$ et la droite joignant les deux points de contact — je l'appelerai la *corde appartenant au point t* — a, d'après (5), l'équation

$$x_1 + t^2x_2 + 6tx_3 = 0. \tag{16}$$

On trouve que l'enveloppe de cette droite est précisément la conique (14). Appelons - la *conique des cordes*. On a le résultant:

a) *La conique des cordes d'une cubique nodale touche cette courbe en ses points sextactiques.*

Faisons remarquer que la conique (14) est la seule conique covariante dont les points d'intersection avec la cubique ne sont pas distincts. En effet, les points d'intersection de la cubique (1) avec la conique

$$a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

satisfont à l'équation

$$a_{33}(x_1^3 + x_2^3)^2 + 72a_{12}x_1^3x_2^3 = 0$$

laquelle on obtient en éliminant x_3 des équations des deux courbes. Pour que cette équation ait une racine double, les deux relations doivent avoir lieu:

$$a_{33}x_1^2(x_1^3 + x_2^3) + 36a_{12}x_1^2x_2^3 = 0,$$
$$a_{33}x_2^2(x_1^3 + x_2^3) + 36a_{12}x_1^3x_2^2 = 0.$$

Puisque les cas $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ne donnent pas de racine commune, on tire de ces deux relations la suivante

$$a_{12}(x_1^3 - x_2^3) = 0.$$

Comme $a_{12} \neq 0$, cette relation veut dire que ce n'est qu'aux points sextactiques que la cubique peut être touchée par une conique covariante; on retrouve ainsi la conique (14). Il suit de là:

b) *Pour $n > 2$ le nombre de points au contact $3n$-ponctuel est divisible par six.*

En effet, par un de ces points, une seule conique covariante est déterminée. Elle coupe la cubique en six points de la même espèce, qui sont distincts, d'après le résultat précédent. Si, par ces six points, le nombre des points en question n'est pas épuisé, il existe une deuxième conique covariante contenant six des points en question. Les deux coniques covariantes n'ont d'autres points d'intersection que deux points de contact situés sur la droite $x_3 = 0$. Donc, le théorème est démontré.

Pour $n = 3$ on obtient les points au contact 9-ponctuel; en ces points la cubique a un contact 9-ponctuel avec des cubiques (formant un faisceau). Leurs paramètres satisfont à l'équation

$$t^9 + 1 = 0.$$

Les racines de cette équation sont

$$t_k = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{9}} \text{ pour } k = 0, 1, \ldots, 8.$$

Ici, t_1, t_4, t_7 sont les points d'inflexion, les points $t_0, t_2, t_3, t_5, t_6, t_8$ sont les points au contact 9-ponctuel proprement dits. Les groupes de points t_0, t_3, t_6; t_2, t_5, t_8 sont des cycles du groupe cyclique (6), ce qui suit de la relation (8). On trouve facilement que

$$t_0 t_2 t_1 + 1 = 0, \quad t_3 t_8 t_1 + 1 = 0, \quad t_6 t_5 t_1 + 1 = 0,$$

donc — voir (4) pour $n = 1$ — les points t_0, t_2, t_1 sont en ligne droite, et ainsi de suite. Donc, les deux triangles dont les sommets sont les points des deux cycles mentionnés plus haut sont perspectifs, le centre de perspectivité étant un point d'inflexion. Ceci a lieu pour les trois points d'inflexion; par suite, ces deux triangles sont trois fois perspectifs, les centres de perspectivité étant les trois points d'inflexion. Mais ceci n'est pas une propriété caractéristique des points au contact 9-ponctuel; cette propriété découle du fait que ces points forment deux cycles d'une homographie cyclique à la période trois. En effet, chaque couple de tels cycles se trouve en perspectivité de trois manières, les centres de perspectivité respectifs formant encore un cycle.*) Les trois points d'inflexion forment un cycle de l'homographie (6). On se rend facilement compte du fait que ces trois centres de perspectivité sont situés sur une droite dans le cas ou les deux cycles en question se trouvent, ce qui est le cas actuel, sur une conique (et inversement).

On trouvera une propriété caractéristique des points au contact 9-ponctuel en déterminant le point tangentiel d'un tel point. Soit t_k ce point, t_k' son point tangentiel; d'après (4) pour $n = 1$ la relation a lieu:

$$t_k^2 t_k' + 1 = 0.$$

Il en suit

$$t_k' = -t_k^{-2} = e^{\frac{(7-4k)\pi i}{9}}$$

*) Voir V. VOJTĚCH: Geometrie projektivní, p. 278.

ce qui donne, pour $k = 1, 4, 7$ les points d'inflexion, pour tout autre k (< 9) des points au contact 9-ponctuel. Donc, on a, tout d'abord, le résultat:

c) *Le point tangentiel d'un point au contact 9-ponctuel est encore un tel point.*

Le point tangentiel du point t_0 est le point t_3, le point tangentiel de celui-ci est le point t_6 et le point tangentiel de ce dernier est le point t_0. De la même manière se comportent les trois points t_2, t_8, t_5. Appelons un triangle qui est circonscrit et en même temps inscrit à la courbe (c. à d., dont les sommets se trouve sur la courbe et dont les côtés sont tangents à la courbe) *triangle tangentiel de la cubique.* On peut alors énoncer le résultat suivant:

d) *Les points au contact 9-ponctuel sont les sommets de deux triangles tangentiels de la cubique.*

Ceci est une propriété caractéristique des points en question, puisque la cubique nodale possède seulement deux triangles tangentiels. En effet, t, u, v étant les sommets d'un triangle tangentiel, les relations ont lieu

$$t^2u + 1 = 0, \ u^2v + 1 = 0, \ v^2t + 1 = 0.$$

En éliminant u, v, on obtient pour t l'équation

$$t^9 + 1 = 0$$

c. à d., le sommet d'un triangle tangentiel est un point au contact 9-ponctuel.

L'étude des points au contact $3n$-ponctuel peut être ratachée, pour certaines valeurs de n, à un autre problème concernant la cubique nodale. Soit t_0 un point de la cubique, différent du noeud. On peut mener de ce point deux tangentes à la courbe; soit t_1 un des points de contact; désignons par t_2 un des points de contact des tangentes menées à la courbe du point t_1, en ainsi de suite. On obtient ainsi le point t_k, que j'appellerai *k-ième point de contact du point t_0.* À un point t_0 appartiennent 2^k points t_k. Les relations ont lieu:

$$t_0t_1^2 + 1 = 0, \ t_1t_2^2 + 1 = 0, \ \ldots, \ t_{k-1}t_k^2 + 1 = 0.$$

Il en suit

$$t_k^{2^k} = (-t_0)^{(-1)^k}$$

d'où

$$t_k = (-t_0)^{(-\frac{1}{2})^k} \tag{17}$$

ce qui donne bien 2^k différentes valeurs du paramètre t_k.

J'appellerai h-ième corde du point t_0 toute corde qui joint deux

h-ièmes points de contact de ce point. Une h-ième corde du point t_0 est, bien entendu, $(h - j)$-ième corde d'un point t_j. Considérons deux h-ièmes cordes du point t_0 qui ne sont, en même temps, $(h - j)$-ièmes cordes d'un point t_j pour aucune valeur de $j > 0$. Ces deux cordes se coupent en un point que j'appellerai, dans un sens plus restreint, point d'intersection de deux h-ièmes cordes (c. à d., je ne considérerai les points d'intersection de deux h-ièmes cordes qui sont, en même temps, des cordes $(h - j)$-ièmes pour $j > 0$). Si l'une des deux cordes considérées est $(h-1)$-ième corde du point t_1, l'autre est $(h - 1)$-ième corde du point $-t_1$ (t_1, $-t_1$ sont les deux premiers points de contact du point t_0). Remplaçons la formule (17) par deux formules, l'une qui exprime les k-ièmes points de contact dérivés du point $-t_1$ et que je désignerai par t_k, et l'autre qui exprime les k-i'èmes points de contact dérivé du point t_1 et que je désignerai par t'_k. Puisque ces points sont $(k - 1)$-ièmes points de contact des points $-t_1$, t_1, les deux formules sont, d'après (17):

$$t_k = (t_1)^{(-\frac{1}{2})^{k-1}}, \quad t'_k = (-t_1)^{(-\frac{1}{2})^{k-1}}. \tag{18}$$

Il en suit la relation

$$t'_k = t_k(-1)^{(-\frac{1}{2})^{k-1}} = E_k t_k$$

où

$$E_k = (-1)^{(-\frac{1}{2})^{k-1}} = (-1)^{(\frac{1}{2})^{k-1}}.$$

La corde appartenant au point t_k, a, d'après (16), l'équation

$$x_1 + t_k^2 x_2 + 6 t_k x_3 = 0 \tag{19}$$

et celle, appartenant au point t'_k, a l'équation

$$x_1 + t_k'^2 x_2 + 6 t'_k x_3 = 0. \tag{20}$$

Ces deux cordes sont $(k + 1)$-ièmes cordes du point t_0 telles qui ne sont $(k + 1 - j)$-ièmes cordes pour $j > 0$. Déterminons le lieu du point d'intersection de ces deux cordes; ce sera, d'après la définition donnée plus, le lieu des points d'intersection des cordes $(k + 1)$-ièmes. En substituant pour t_k', l'équation (20) peut s'écrire

$$x_1 + E_k^2 t_k^2 x_2 + 6 E_k t_k x_3 = 0. \tag{21}$$

En éliminant, de (19) et (21), le paramètre t_k, on obtient l'équation du lieu cherché:

$$(1 + E_k)^2 x_1 x_2 - 36 E_k x_3^2 = 0. \tag{22}$$

La racine de l'unité E_k prend 2^{k-1} différentes valeurs. Soient E_k, E'_k deux différentes valeurs de cette racine. Pour que la conique exprimée par (22) soit la même pour les deux valeurs E_k, E_k', il faut que

$$(1 + E_k^2) : E_k = (1 + E_k'^2) : E_k'$$

d'où il suit

$$E_k + E_k^{-1} = E_k' + E_k'^{-1} \text{ c. à d. } E_k' = E_k^{-1}.$$

Donc, la conique (22) est la même pour deux différentes valeurs de E_k (E_k^{-1} est toujours différent de E_k). L'équation (22) exprime 2^{k-2} différentes coniques. Donc, on a ce théorème:

e) *Le lieu des points d'intersection des h-ièmes cordes sont* 2^{h-3} *coniques covariantes.*

Déterminons d'autre part une conique covariante contenant un point au contact $3n$-ponctuel. Pour un tel point l'équation (11) a lieu, d'où il suit

$$t = (\pm 1)^{\frac{1}{3n}}$$

où il faut prendre le signe + (—) pour n pair (impair). Les coordonnées d'un point au contact $3n$-ponctuel sont

$$x_1 = 6\,(\pm 1)^{\frac{1}{3n}},\; x_2 = 6\,(\pm 1)^{\frac{2}{3n}},\; x_3 = 1 + (\pm 1)^{\frac{1}{n}}.$$

Par un calcul simple on trouve l'équation d'une conique covariante contenant ce point sous la forme

$$[1 + (\pm 1)^{\frac{1}{n}}]^2\, x_1 x_2 - 36\,(\pm 1)^{\frac{1}{n}}\, x_3^2 = 0. \tag{23}$$

Pour que cette conique soit identique à la conique (22), il faut que les relations aient lieu

$$(\pm 1)^{\frac{1}{n}} = \varrho E_k,\; \left[1 + (\pm 1)^{\frac{1}{n}}\right]^2 = \varrho(1 + E_k)^2.$$

En éliminant la racine $(\pm 1)^n$, on obtient pour ϱ l'équation

$$(1 \mp \varrho^{\frac{1}{2}})(1 \mp \varrho^{\frac{1}{2}} E_k) = 0.$$

a) $\mp \varrho^{\frac{1}{2}} + 1 = 0,\; \varrho = 1,\; (\pm 1)^{\frac{1}{n}} = E_k;$

b) $1 \mp \varrho^{\frac{1}{2}} E_k = 0,\; \varrho = E_k^{-2},\; (\pm 1)^{\frac{1}{n}} = E_k^{-1}$ ce qui est encore une racine E_k. Donc, en tout cas

$$(\pm 1)^{\frac{1}{n}} = E_k = (-1)^{(\frac{1}{2})^{k-1}}.$$

Pour le signe inférieure, $n = 2^{k-1}$, pour le signe supérieur $(+1)^{\frac{1}{n}} = (-1)^{(\frac{1}{2})^{k-1}} = (+1)^{(\frac{1}{2})^k}$, donc $n = 2^k$. Ainsi, en tout cas, n est un nombre pair (pour $k > 1$) et il faut prendre le signe supérieur. Donc, on a

$$n = 2^k.$$

Cette condition, qui est nécessaire, est encore suffisante pour que les deux coniques (22), (23) soient identiques. On a le théorème:

f) *Pour $n = 2^k$, où $k > 1$, les coniques covariantes qui contiennent les points au contact $3n$-ponctuel sont identiques aux coniques lieux des points d'intersection des cordes $(k + 1)$-ièmes.*

Il en suit que le nombre de coniques contenant les points en question est 2^{k-2}. L'équation (11) donne pour n égal à 2^k:

$$t^{3 \cdot 2^k} - 1 = 0$$

ou bien

$$(t^{3 \cdot 2^{k-1}} - 1)(t^{3 \cdot 2^{k-1}} + 1) = 0.$$

La première paranthèse égalée à zéro fournit les points au contact $3 \cdot 2^{k-1}$-ponctuel; pour les points au contact $3 \cdot 2^k$-ponctuel on obtient

$$t^{3 \cdot 2^{k-1}} + 1 = 0.$$

Cette équation a $3 \cdot 2^{k-1} = 6 \cdot 2^{k-2}$ racines; les points en question se trouvent en effet sur 2^{k-2} coniques covariantes.

Faisons encore remarquer, que pour $k = 1$ (le cas exclu plus haut)

$$E_k = -1$$

et, alors, l'équation (22) donne la droite $x_3 = 0$. On a le résultat:

g) *Les points d'intersection des cordes deuxièmes se trouvent sur la ligne joignant les points d'inflexion.*

Pour $k = 2$ on obtient comme équation de la conique lieu des cordes troisièmes

$$18x_3^2 - x_1x_2 = 0$$

ce qui est, d'après le théorème f), en même temps la conique covariante qui contient les six points au contact 4-ponctuel.

Il vaudrait peut-être la peine de chercher des propriétés caractéristiques des coniques contenant les points $3n$-ponctuels pour des valeurs de n autres que celles auxquelles se borne le théorème f).

Některé význačné body racionální kubiky rovinné.

(Obsah předešlého článku.)

Problém inflexních bodů kubické křivky se nejpřirozeněji zobecní tím, že se studují body, v nichž mají s kubikou styk $3n$-bodový křivky stupně n-ho. Budu takové body nazývati *$3n$-dotykové.* Toto zobecnění vede pro $n = 2$ ke známým bodům sextaktickým. V předchozím článku se zabývám tímto problémem pro kubiky racionální a to nodální, poněvadž pro kubiku s bodem úvratu nemá tento problém významu.

Píšeme-li rovnici kubiky v tvaru (1) v předchozím textu, lze souřadnice jejích bodů vyjádřiti parametricky v tvaru (2). Podmínka nutná a dostačující pro to, aby $3n$ bodů kubiky o parametrech $t_1, \ldots, t_{3n}$ leželo na křivce n-ho stupně, je vyjádřena rovnicí (4), jejíchž důsledků je v dalším stále užíváno. Rovnice (5) vyjadřuje spojnici dvou bodů t_1, t_2. Připomeňme si také, že nodální kubika se reprodukuje grupou šesti kolineací, které jsou vyjádřeny rovnicemi (6), (7); rovnice (8), (9) ukazují, jak se při těchto kolineacích transformují parametry. Všechny kuželosečky

$$a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

jsou invariantní vůči všem kolineacím uvedené grupy. Nazýváme je stručně *kovariantní kuželosečky.*

Parametry bodů $3n$-dotykových jsou dány rovnicí (11). Pro $n = 1$ se dostanou body inflexní, pro $n = 2$ jednak body inflexní, jednak tři body sextaktické. Body sextaktické mají za body tečnové body inflexní. Další jejich důležitá vlastnost je, že *kovariantní kuželosečka, která je obsahuje, se v nich kubiky dotýká a je zároveň kuželosečkou tětiv kubiky. Počet bodů $3n$-dotykových pro $n > 2$ je vždy dělitelný šesti; tyto body leží po šesti na kovariantních kuželosečkách.*

Pro $n = 3$ dostáváme body 9-dotykové, jichž je šest. Tvoří po třech vrcholy dvou trojúhelníků, které jsou trojnásob perspektivní, při čemž středy perspektivnosti jsou tři inflexní body. Tato vlastnost není pro tyto body charakteristická, neboť jim přísluší jakožto dvěma cyklům ternárně cyklické kolineace (6). *Charakteristická vlastnost těchto bodů je ta, že jsou vrcholy dvou tečnových trojúhelníků kubiky, t. j. trojúhelníků kubice opsaných a zároveň vepsaných.*

Studium některých bodů zde uvažovaných lze uvésti v souvislost s jiným problémem týkajícím se kubiky. Nazveme *k-tým bodem dotyku bodu t_0* dotykový bod tečny, kterou dostaneme, když z bodu t_0 vedeme ke kubice tečnu, z dotykového bodu další tečnu a to opakujeme k-krát. k-tých dotykových bodů je 2^k a jejich parametry udává vzorec (17). Spojnici dvou dotykových bodů k-tých nazveme *k-tou tětivou bodu t_0.* Uvažujme dvě tětivy h-té, které nejsou zároveň tětivy $(h - j)$-té bodu t_j pro $j > 0$. Geometrické místo průsečíků takových tětiv jsou určité kovariantní kuželosečky v počtu 2^{h-3}; jsou dány rovnicí (22) pro $h = k + 1$. Platí pak věta, že *pro $n = 2^k$, kde $k > 1$, jsou kovariantní kuželosečky* *obsahující body 3n-dotykové* (a dané rovnicí (23)), *totožné s kuželosečkami, které jsou geometrická místa průsečíků* $(k + 1)$*-ních tětiv.*

Pro $k = 1$ dává rovnice (22) přímku $x_3 = 0$. Tím je dokázáno, že *geometrické místo průsečíků druhých tětiv je přímka spojující inflexní body.*

Bylo by zajímavo hledati geometrické vlastnosti kovariantních kuželoseček obsahujících body $3n$-dotykové také pro jiné hodnoty n.