Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Rudolf Piska

O kuželosečkách se společnou normálou v daném bodě, jejichž osy procházejí dvojicí pevných bodů této normály

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 4, D376--D384

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122662

O KUŽELOSEČKÁCH SE SPOLEČNOU NORMÁLOU V DANÉM BODĚ, JEJICHŽ OSY PROCHÁZEJÍ DVOJICÍ PEVNÝCH BODŮ TÉTO NORMÁLY.

Dr RUDOLF PISKA, Brno.

Ač soustava kuželoseček tohoto pojednání je speciálním případem soustav uvažovaných J. SOBOTKOU[1]) a J. KLÍMOU,[2]) není snad bezúčelné se jí zabývati samostatně. Při tom možno využíti její speciálnosti a provésti rozbor jednoduššími prostředky, které však postačují k nalezení nových konstruktivních vztahů.

Je obecně známo, že užitím STEINER-PELZOVY paraboly lze snadno sestrojiti vrcholy kuželosečky, dané polohou os a tečnou s bodem dotyku. (Viz KADEŘÁVEK-KLÍMA-KOUNOVSKÝ, Deskriptivní geometrie I, str. 53, obr. 87). Snadnost této konstrukce vede k otázce:

„Jaké vlastnosti má soustava Σ kuželoseček, které mají společnou tečnu t s dotykovým bodem T a jejichž osy procházejí pevnými body ${}^1N$, ${}^2N$ příslušné normály?“

Nechť úsečky $\overline{T^1N}$ a $\overline{T^2N}$ jsou konečné délky. Za tohoto předpokladu obsahuje soustava Σ jen středové kuželosečky, které jsou — jak ukáži — podobné a dvojnásobně tečné k dvěma navzájem se dotýkajícím kružnicím. V případě, že jeden z obou bodů ${}^1N$, ${}^2N$ je nevlastním bodem společné normály soustavy kuželoseček, vyskytují se v této soustavě jen paraboly. Tuto posledně uvedenou soustavu parabol vylučme z našich úvah.

Abychom analyticky vyšetřili vlastnosti soustavy Σ, volme společnou tečnu a normálu kuželoseček této soustavy za souřadnicové osy x resp. y (viz obr. 1). Pak rovnice kuželosečky, která se v počátku dotýká osy x má tvar

$$(l) \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2y = 0,^{3)} \tag{1}$$

při čemž dle předpokladu $ac - b^2 \neq 0$. Souřadnice jejího středu jsou dány vztahy

$$x_s = \frac{b}{ac - b^2}, \; y_s = \frac{-a}{ac - b^2} \tag{2}$$

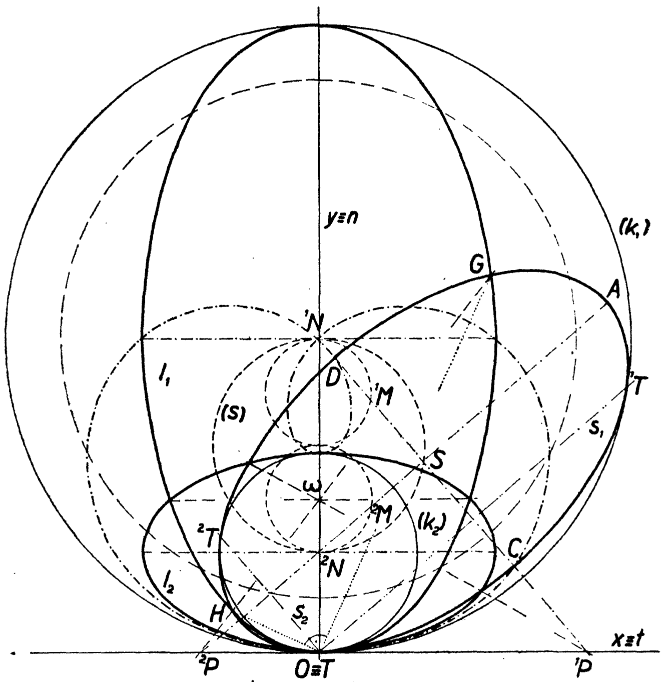
[1]) J. SOBOTKA, K některým konstrukcím kuželoseček, jejichž určující útvary nejsou reálné. Časopis JČMF, **54**, Praha 1925, str. 336—337.

[2]) J. KLÍMA, Polárné vlastnosti soustavy kuželoseček, dotýkajících se dvojnásob dvou kuželoseček a z toho plynoucí konstrukce kuželoseček. Tamtéž, **56**, 1927, str. 24 a další.

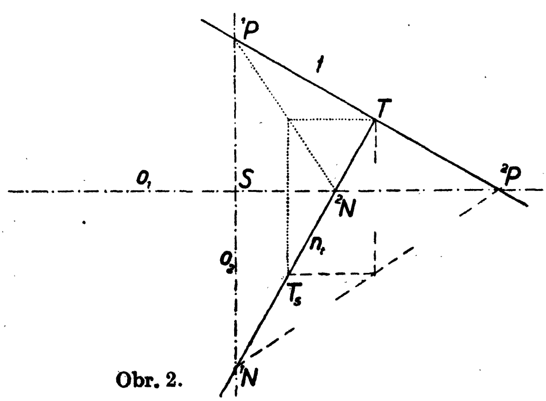
[3]) ve které koeficient a u x^2 udává křivost kuželosečky v počátku, jak lze snadno ověřiti. Konstruktivně lze v tomto případě určiti střed křivosti následovně: Užitím Steiner-Pelzovy paraboly plyne, že $\overline{{}^1NT_s} : \overline{T_s{}^2N} = \overline{{}^1PT} : \overline{T^2P}$ a z této úměry vychází konstrukce středu T_s, jak je tečkovaně resp. čárkovaně vyznačena v obr. 2.

a její osy rovnicí

$$bx^2 - (a - c)\,xy - by^2 + \frac{(ac - b^2) - (a^2 + b^2)}{ac - b^2}\,x - \\ - \frac{b(a + c)}{ac - b^2}\,y - \frac{b}{ac - b^2} = 0. \tag{3}$$



Obr. 1.



Obr. 2.

Průsečíky ${}^1N, {}^2N$ těchto os s normálou kuželosečky jsou podle předpokladu pevné, a označíme-li jejich y-ové souřadnice $n + r$ resp. $n - r$, kde $n^2 - r^2 \neq 0$, $r > 0$, jsou to kořeny rovnice

$$y^2 + \frac{a + c}{ac - b^2} y + \frac{1}{ac - b^2} = 0. \tag{4}$$

Mezi a, b, c platí vztahy

$$a + c = -\frac{2n}{n^2 - r^2}, \quad ac - b^2 = \frac{1}{n^2 - r^2}, \tag{5}$$

takže výrazy (2) nabývají tvaru

$$x_s = b(n^2 - r^2), \quad y_s = -a(n^2 - r^2). \tag{2,1}$$

Středy $S(x_s, y_s)$ kuželoseček soustavy Σ leží na kružnici středů

$$(s) \equiv x^2 + (y - n)^2 - r^2 = 0, \tag{6}$$

pro niž úsečka ${}^1N{}^2N$ je průměrem. Z (5) dále plyne, že a, c jsou kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 + \frac{2n}{n^2 - r^2} x + \frac{1}{n^2 - r^2} + b^2 = 0 \tag{7}$$

a lze je tedy vyjádřiti jako funkce parametru b vztahy

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{-n \pm \sqrt{r^2 - b^2(n^2 - r^2)^2}}{n^2 - r^2} \\ c &= \frac{-n \mp \sqrt{r^2 - b^2(n^2 - r^2)^2}}{n^2 - r^2} \end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

při čemž nutno bráti současně buď hořejší nebo dolejší znaménka před odmocninou, jejíž hodnotu v dalším béřeme vždy kladně.[4])

Rovnici (1) lze nyní napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} (l) \equiv \frac{-n \pm \sqrt{r^2 - b^2(n^2 - r^2)^2}}{n^2 - r^2} x^2 + \\ + 2bxy - \frac{n \pm \sqrt{r^2 - b^2(n^2 - r^2)^2}}{n^2 - r^2} y^2 + 2y = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

[4]) Označíme-li ϱ resp. d vzdálenost voleného bodu resp. přímky od počátku a φ úhel, který průvodič ϱ resp. vzdálenost d svírají s kladným směrem souřadnicové osy x, pak bodem procházejí resp. přímky se dotýkají dvě reálné různé kuželosečky soustavy Σ, jsou-li splněny vztahy

$$2(n - r)\sin\varphi < \varrho < 2(n + r)\sin\varphi$$

resp.

$$(n - r)(1 + \sin\varphi) < d < (n + r)(1 + \sin\varphi).$$

nebo v přímkových souřadnicích

$$u^2 - 2bu + 2\,\frac{-n \pm \sqrt{r^2 - b^2(n^2 - r^2)^2}}{n^2 - r^2}\,v - \frac{1}{n^2 - r^2} = 0. \qquad (10)$$

Anulováním diskriminantu rovnice (9), psané ve tvaru

$$b^2(n^2 - r^2)^2(x^2 + y^2)^2 - 4b(n^2 - r^2)[n(x^2 + y^2) - 2(n^2 - r^2)y]\,xy + \\ + [n(x^2 + y^2) - 2(n^2 - r^2)\,y]^2 - r^2(x^2 - y^2)^2 = 0, \qquad (11)$$

získáme rovnici obálky

$$(x^2 - y^2)^2[(x^2 + y^2)^2 - 4n(x^2 + y^2) - 4(n^2 - r^2)\,y^2] = 0,$$

z níž má pro soustavu Σ smysl jen druhý činitel, rozložitelný v rovnice dvou kružnic

$$(k_1) \equiv x^2 + y^2 - 2(n + r)\,y = 0$$
$$(k_2) \equiv x^2 + y^2 - 2(n - r)\,y = 0, \qquad (12)$$

které se navzájem dotýkají v počátku a jejichž středy jsou v uvažovaných bodech ${}^1N$, ${}^2N$ společné normály kuželoseček soustavy Σ.[5]) Z toho však ihned plyne, že

1. *každá kuželosečka soustavy Σ se dvakráte dotýká každé z obou kružnic (k_1), (k_2).*

Dotykové body ${}^1T$ resp. ${}^2T$ libovolné kuželosečky (l) soustavy Σ s kružnicemi (k_1) resp. (k_2) snadno sestrojíme tím, že bodem $O \equiv T$ vedeme s osami uvažované kuželosečky rovnoběžky $s_1 \equiv O^1T \parallel {}^2NS$ resp. $s_2 \equiv O^2T \parallel {}^1NS$, které na (k_1) resp. (k_2) vytnou hledané dotykové body.

O sdružených tětivách s_1 a s_2 a sdružených dotykových bodech ${}^1T$ a ${}^2T$ platí:

2. *Sdružené tětivy s_1, s_2 tvoří pravoúhlou paprskovou involuci o vrcholu O a vytínají na kružnicích (k_1) resp. (k_2) projektivní řady bodové $({}^1T \ldots)$ resp. $({}^2T \ldots)$, při čemž spojnice $o = {}^1T{}^2T$ dvojic sdružených bodů ${}^1T$, ${}^2T$ prochází pevným bodem ω. Bod ω je pólem přímky t vzhledem ke kružnici středů (s).*

První část tvrzení plyne z toho, že s_1, s_2 jsou rovnoběžné s osami kuželosečky l soustavy Σ. Abychom dokázali druhou část tvrzení, označme směrnici tětivy s_1 písmenem k; pak spojnice o průsečíků ${}^1T$, ${}^2T$ má rovnici

$$o \equiv [(n - r) - k^2(n + r)]\,x + 2kny - 2k(n^2 - r^2) = 0, \qquad (13)$$

[5]) Synthetický lze toto dokázat daleko jednodušeji; stačí jen k bodu T uvažovat body souměrně sdružené dle os kuželoseček soustavy Σ.

ze které je zřejmé, že její průsečík s osou y je pevný bod $\omega\left(O, \frac{n^2-r^2}{n}\right)$, j. b. d.[6])

Dále platí věta

3. *Kuželosečky soustavy Σ vytínají na zvolené pevné kuželosečce téže soustavy bodovou involuci o středu ω, která se z bodu O promítá pravoúhlou paprskovou involucí.*

Značí-li rovnice (1) pevnou kuželosečku a je-li rovnice proměnné kuželosečky

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2y = 0, \tag{14}$$

pak (1) s (14) určují svazek kuželoseček

$$(a + \lambda\alpha)\,x^2 + 2(b + \lambda\beta)\,xy + (c + \lambda\gamma)\,y^2 + 2(1 + \lambda)\,y = 0, \tag{15}$$

který obsahuje dvě degenerované kuželosečky. Prvá se skládá z tečny t v bodě O a ze spojnice dvou zbývajících bodů base, druhá z přímek spojující tyto dva body base s počátkem O. Položíme-li diskriminant rovnice (15) roven nule, tedy

$$(a + \lambda\alpha)\,.\,(1 + \lambda)^2 = 0, \tag{16}$$

pak kořeny $\lambda = -\frac{a}{\alpha}$ a $\lambda = -1$ rovnice (16) charakterisují hledané složené kuželosečky svazku (15). Rovnici prvé dostaneme pro hodnotu $\lambda = -\frac{a}{\alpha}$ ve tvaru

$$a[(\alpha b - a\beta)2nx + n(\alpha c - a\gamma)y - (n^2 - r^2)(\alpha c - a\gamma)] = 0 \tag{17}$$

z níž je snadno vidět, že kuželosečka se rozpadá v tečnu t a přímku procházející bodem ω.

Pro $\lambda = -1$ obdržíme rovnici druhé složené kuželosečky

$$(a - \alpha)\,x^2 + 2(b - \beta)\,xy + (c - \gamma)\,y^2 = 0, \tag{18}$$

odkud součin směrnic obou ji skládajících přímek — přihlédneme-li k (5) — je

$$\frac{a-\alpha}{c-\gamma} = -1,$$

čímž je dokázána druhá část tvrzení.

Ukažme nyní, že

4. *kuželosečky soustavy Σ jsou navzájem podobné.*

Pro délky poloos platí — užijeme-li vztahů plynoucích z použití Steiner-Pelzovy paraboly — rovnice (viz obr. 1)

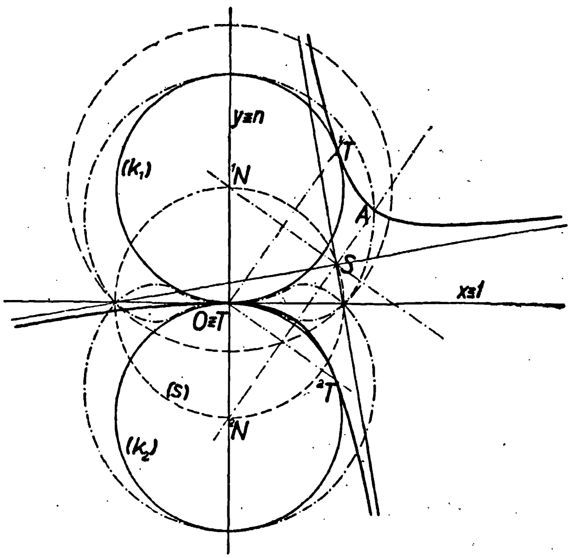
$$\mathrm{b}^2 = {}^2\overline{MC}^2 - {}^2\overline{MS}^2, \quad ({}^2\overline{MC} = {}^2\overline{MT}),$$

$$\mathrm{a}^2 = {}^1\overline{MA}^2 - {}^1\overline{MS}^2, \quad ({}^1\overline{MA} = {}^1\overline{MT}),$$

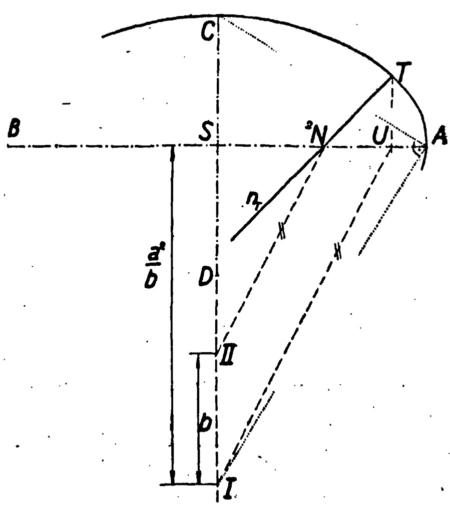
[6]) V případě $n = 0$ stačí pro důkaz uvažovat systém homogenních souřadnic.

a tedy

$$a : b = \sqrt{(n+r)\left[n + r - \frac{2r}{1+k^2}\right]} : \sqrt{(n-r)\left[n - r + \frac{2k^2r}{1+k^2}\right]} =$$
$$= \sqrt{n+r} : \sqrt{n-r}, \qquad (19)$$



Obr. 3.



Obr. 4.

kde k je směrnice hlavní osy libovolné kuželosečky (l) soustavy Σ. Je tedy poměr obou jejich os konstantní a roven poměru druhých odmocnin vzdáleností průsečíků ^1N, ^2N os s normálou od bodu T.

Je-li $|n| > r$, je Σ soustavou podobných elips, při $|n| < r$ jsou v soustavě Σ jen podobné hyperboly. V případě $n = 0$ se soustava Σ skládá z rovnoosých hyperbol (viz obr. 3). Z předcházejícího plyne bezprostředně, že *úsek normály mezi oběma osami rovnoosé hyperboly je půlen dotykovým bodem*, nebo obecněji:

Úseky na normále kuželosečky, měřené od bodu dotyku po průsečíky s osami kuželosečky, mají konstantní poměr, rovný poměru čtverců obou poloos.

To však vede k jednoduché konstrukci normály kuželosečky. Rovnice (19) dá se psát ve tvaru

$$\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}} : \mathrm{b} = (n + r) : (n - r) = \mathrm{a} : \frac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{a}}$$

nebo

$$\varrho_a : \mathrm{b} = (n + r) : (n - r) = \mathrm{a} : \varrho_b, \tag{20}$$

kde $\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}} = \varrho_a$ a $\frac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{a}} = \varrho_b$ jsou poloměry křivosti ve vrcholech kuželosečky. Naneseme-li tedy na vedlejší osu dané elipsy délky $\overline{SI} = \varrho_a$, $\overline{I\,II} = \mathrm{b}$ (viz tečkovanou konstrukci v obr. 4) a promítneme-li bod T kolmo do hlavní osy do bodu U, pak rovnoběžka $II^2N \parallel IU$ vytne na hlavní ose bod ${}^2N$, kterým prochází normála bodu T. Pro hyperbolu je konstrukce normály obdobná.[7][8])

Dále platí:

5. *Dvojice os kuželoseček soustavy Σ vytínají na tečně t bodovou involuci I o středu T a potenci $-(n^2 - r^2)$, t. j. involuci indukovanou na společné tečně t soustavy Σ kružnicí středů (s).*

Správnost tvrzení vychází bezprostředně z rovnice (3). Má smysl mluviti jen o hyperbolické resp. eliptické involuci pro $|n| > r$ resp. $|n| < r$, neboť pro $|n| = r$ soustava degeneruje.

6. *V téže bodové involuci I protíná tečnu t:*

a) *involuce sdružených průměrů každé kuželosečky soustavy Σ,*

b) *množství dvojic rovnoběžných tečen kterékoliv kuželosečky soustavy Σ,*

c) *množství dvojic spojnic průsečíků (různých od T) všech kuželoseček soustavy Σ s kuželosečkami l_1 a l_2 (l_1 a l_2 mají v T vrchol).*

Důkazy jsou snadné a obdobné předcházejícímu. Uveďme jen, že uvedené kuželosečky l_1 a l_2 mají rovnice

$$\begin{aligned}(l_1) &\equiv \frac{x^2}{n - r} + \frac{y^2}{n + r} - 2y = 0,\\ (l_2) &\equiv \frac{x^2}{n + r} + \frac{y^2}{n - r} - 2y = 0\end{aligned} \tag{21}$$

a obdržíme je z rovnice (9) pro hodnotu $b = 0$. Jejich osy rovnoběžné

---

[7]) Praktické sestrojení normály kuželoseček ukázal J. ZEZULA v práci „Ke konstrukci normál kuželoseček" (Rozhledy 1941, **20**, str. 87 a další).

[8]) Viz též FR. KADEŘÁVEK „Příspěvek k normálám kuželoseček a ploch druhého stupně" (Časopis JČMF, 1949, **28**, str. D46).

s tečnou t jsou stejně dlouhé a rovné střední měřické úměrné obou zbývajících os.

Z dosud uvedených vlastností vyplývá snadná prostorová interpretace:

7. *Každá soustava Σ je kolmým průmětem soustavy rovinných řezů tečných rovin rotačního kužele s rotační středovou plochou 2° do roviny rovníku této plochy, má-li kužel vrchol na rovníku uvažované kvadriky a je-li jeho osa rovnoběžná s osou rotace kvadriky.*

Pro každou soustavu Σ existují dva svazky rotačních kvadrik dotýkajících se navzájem podle rovníků, které mají poloměry $|n| + r$ a $|n| - r$. Aspoň jeden svazek obsahuje kvadriky hyperbolického typu. Přesněji řečeno: Je-li soustava Σ soustavou podobných elips, obsahuje jeden svazek rotační elipsoidy, druhý rotační hyperboloidy jednodílné. Je-li Σ soustavou podobných hyperbol, obsahují oba svazky rotační jednodílné hyperboloidy.

8. *Reálná ohniska kuželoseček soustavy Σ leží na kružnici soustředné s tou kružnicí obálky* (12), *jejímž středem procházejí vedlejší osy kuželoseček soustavy. Kružnice tato má poloměr* $\sqrt{|2r(r+n)|}$.

Předcházející věta se dá vysloviti — považujeme-li soustavu Σ za průmět soustavy rovinných řezů definovaných větou 7 — v následujícím znění:

Reálná ohniska průmětů těchto řezů do roviny rovníku leží na kružnici soustředné s rovníkem té kvadriky, jejíž osu rotace protínají průměty vedlejších os kuželoseček soustavy Σ.

Tato tvrzení jsou zřejmá, neboť uvažujeme-li systém řezů osnovou rovnoběžných rovin kvadrikou, pak kuželosečky jsou homotetické a jejich průměty dvojnásobně tečné s průmětem obrysu plochy. Ohniska těchto průmětů leží na kuželosečce konfokální s průmětem obrysu plochy.[9]) V uvažovaném případě musí tedy ohniska průmětů ležet na kružnici soustředné s rovníkem plochy. Otáčíme-li roviny řezů okolo osy rotace dané kvadriky, pak zřejmě lze kadou kuželosečku pootočit tak, aby všechny procházely jedním bodem rovníku kvadriky (u rotačního hyperboloidu jednodílného nelze však užíti všech řezů osnovy). Při tom ale ohniska průmětů se otáčejí po zmíněné soustředné kružnici s rovníkem.

Pomocí předešlého lze snadno

určiti v soustavě Σ kuželosečku, která prochází daným bodem G.

Úloha je dvojznačná. Stačí jen uvážiti, že kuželosečka musí procházeti též bodem H, kde spojnice HG prochází pólem ω a $HO \perp OG$.

[9]) PELZ, Über eine allgemeine Bestimmungsart der Brennpunkte von Konturen der Flächen zweiten Grades, Zprávy víd. akad. věd 1877.

Proložíme-li pak rovníkem (k_1) resp. (k_2) vhodnou rotační kvadriku (nejlépe kouli resp. rovnoosý jednodílný rotační hyperboloid), je hledaná kuželosečka stanovena jako řez roviny $\varrho \equiv (OGH)$ s touto kvadrikou. V podstatě jsou čtyři prostorová řešení, která však po dvou v průmětu splývají.

Ovšem tuto úlohu lze řešiti též projektivně tím, že dle 6b určíme tečny hledané kuželosečky v bodech G a H.

Stejně snadno lze

určiti v soustavě Σ kuželosečky, které se dotýkají dané tečny g.

Dle věty 6b určíme tečnu $h \parallel g$ a průměr rovnoběžný s těmito tečnami určí na kružnici středů (s) oba středy hledaných kuželoseček. Pomocí věty 6a též rychle určíme dotykové body na tečnách g a h.

Pomocí téže věty 6a lze lehce řešiti následující úlohu:

Určiti asymptoty hyperboly, která je dána polohou obou os a tečnou s bodem dotyku.

Nechť příslušná normála hyperboly protíná její osy v bodech ${}^1N$, ${}^2N$. Pak kružnice opsaná nad průměrem $\overline{{}^1N\,{}^2N}$ protíná tečnu hyperboly v bodech, jimiž jdou hledané asymptoty.

Podotkněme ještě, že geometrické místo vrcholů kuželoseček soustavy Σ jsou bicirkulární kvartiky s dvojným bodem v bodě ${}^1N$ resp. ${}^2N$, které se dotýkají osy x v počátku (viz obr. 1 a 3). Jejich rovnice je

$$(x^2 + y^2)^2 - 4n(x^2 + y^2)\,y + (n^2 - r^2)\,x^2 - (n \mp r)(5n \pm 3r)\,y^2 - \\ - 2(n^2 - r^2)(n \mp r)\,y = 0.$$

Sur le système spécial de coniques. Soient données dans le plan deux circonférences touchant l'une à l'autre. L'auteur étudie le système de coniques qui touchent à chacune de ces circonférences en deux points distincts et il en déduit quelques constructions, par exemple une construction très simple de la normale à une conique.