K Brownovu pohybu torsního zrcátka.

Jan Potoček.

(Došlo 27. července 1933.)

Nechť vykonává nějaká částice Brownův pohyb, při čemž nechť její poloha závisí na jediné souřadnici (pohyb lineární). Pozorujme pohyb částice a označme souřadnici její počáteční polohy resp. její souřadnice v okamžicích $\vartheta, 2\vartheta, \ldots, n\vartheta, \ldots$ (ϑ je libovolně zvolené kladné číslo) písmeny x_0, resp. $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Utvořme střední hodnotu (s. h.) aritmetického průměru prvních n členů. Roste-li n přes všechny meze, má tato střední hodnota limitu, kterou označíme $\bar{x}$. Tedy

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} \text{s. h.} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}. \tag{1}$$

Abychom mohli posouditi, jak se blíží aritmetický střed hodnot x_k číslu $\bar{x}$, roste-li n přes každou mez, násobme čtverec rozdílu obou číslem n a utvořme střední hodnotu výrazu takto získaného. Má-li tato střední hodnota limitu pro n rostoucí přes každou mez, nazýváme tu limitu dispersí a označujeme ji $\frac{1}{2}C$:

$$\tfrac{1}{2}C = \lim \text{s. h.} \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n\bar{x})^2}{n}. \tag{2}$$

Hodnota disperse závisí na délce časového intervalu ϑ.

V tomto článku je vypočten vzorec pro dispersi u Brownova pohybu zrcátka, zavěšeného na torsním vlákně. Vzorec ten je velmi jednoduchý, takže se po této stránce hodí mnohem lépe k experimentálnímu zkoumání než obdobné vzorce pro dispersi, odvozené pro Brownův pohyb částice, na niž nepůsobí vnější síla a pro pohyb částice, podléhající tíži.[1])

Výpočet disperse zakládá se na některých větách z teorie Markovových řetězů, odvozených v obecnějším tvaru B. Hostinským[2]):

[1]) Viz J. Potoček: Příspěvek k theorii Brownova pohybu (Contribution à la théorie du mouvement Brownien), Spisy vyd. přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, č. 171 (avec un résumé français).

[2]) B. Hostinský: Application du Calcul des Probabilités à la théorie du mouvement Brownien. (Annales de l'Institut H. Poincaré, T. III, fasc. 1), kap. IV.

O Markovových řetězech viz od téhož autora: Méthodes générales du Calcul des Probabilités, Mémorial des sc. math., fasc. LII.

Nechť se pohybuje bod spojitě po přímce (ose x) v konečném intervalu $(0, h)$. Nechť hustota pravděpodobnosti $u(x_0, x, t)$, že bod přejde za dobu t z bodu x_0 do bodu x, je kladná, spojitá funkce proměnných x_0, x, t, nechť vyhovuje Smoluchowského funkční rovnici

$$u(x_0, x, t_1 + t_2) = \int_0^h u(x_0, \xi, t_1)\, u(\xi, x, t_2)\, d\xi$$

a nechť jest

$$\int_0^h u(x_0, x, t)\, dx = 1.$$

Pak platí, užijeme-li zavedeného označení, tato tvrzení:

1. Roste-li n přes všechny meze, má funkce $u(x_0, x, n\vartheta)$ limitu nezávislou na x_0:

$$\lim_{n \to \infty} u(x_0, x, n\vartheta) = u(x). \tag{3}$$

2. Střední hodnota veličiny x_n definovaná vztahem

$$\text{s. h. } x_n = \int_0^h u(x_0, x, n\vartheta)\, x\, dx$$

má limitu

$$\lim_{n \to \infty} \text{s. h. } x_n = \bar{x} = \int_0^h u(x)\, x\, dx. \tag{4}$$

3. Existuje limita $\frac{1}{2}C$ definovaná vzorcem (2).

Připomeňme, že disperse je konečné číslo pro konečný interval; roste-li délka intervalu přes každou mez, může se stát, že i disperse roste nad každou mez [n. p. první příklad z práce citované v pozn.[1])].

Známe-li hustotu pravděpodobnosti u jako funkci veličin x_0, x, t, lze počítati dispersi podle vzorce[3]):

$$\frac{1}{2}C = \int_0^h u(x)\, (x - \bar{x})^2\, dx +$$

$$+ 2 \int_0^h \int_0^h \sum_{n=1}^{\infty} [u(x_0, x, n\vartheta) - u(x)]\, u(x_0)\, (x_0 - \bar{x})\, (x - \bar{x})\, dx_0\, dx, \tag{5}$$

kde $u(x)$ a $\bar{x}$ jsou dány vzorci (3), (4).

Nechť působí na částici vykonávající Brownův pohyb v intervalu $(-h, h)$ vnější síla $f(x)$, jež buď konečnou a i se svou první

---

[3]) J. Potoček: O dispersi v theorii Markovových řetězů (Sur la dispersion dans la théorie des chaînes de Markoff), Spisy vyd. přírodověd. fak. Masarykovy university, č. 154.

M. Fréchet: Complèments à la théorie des probabilités discontinues „en chaîne". Ann. scuola norm. sup. Pisa II, s. 2, p. 131.

derivací spojitou funkcí x. Hustota pravděpodobnosti $u(x_0, x, t)$ je dána diferenciální rovnicí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial}{\partial x} [u f(x)]$$

s podmínkami na kraji

$$D \frac{\partial u}{\partial x} - \beta\, u f(x) = 0, \quad x = -h, \quad x = h,$$

a s podmínkou počáteční

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ x \neq x_0}} u(x_0, x, t) = 0.$$

Při tom znamená D koeficient difuse, β je t. zv. pohyblivost částice. Řešení je dáno vzorcem (l. c.[1]), str. 7):

$$u(x_0, x, t) = \frac{y(x; 0)}{I_0} + \sum_{\varrho_\nu} e^{-D\varrho_\nu^2} \frac{y^{-1}(x_0; 0)\, y(x_0; \varrho_\nu)\, y(x; \varrho_\nu)}{I_{\varrho_\nu}} \tag{6}$$

kde je položeno

$$I_{\varrho_\nu} = \int_{-h}^{h} y^{-1}(x; \varrho_\nu)\, y^2(x; \varrho_\nu)\, dx$$

a kde

$$\begin{aligned} y(x; \varrho_\nu) = {} & [w'(h; \varrho_\nu) - \alpha f(h)\, w(h; \varrho_\nu)]\, v(x; \varrho_\nu) - \\ & - [v'(h; \varrho_\nu) - \alpha f(h)\, v(h; \varrho_\nu)]\, w(x; \varrho_\nu) \end{aligned} \tag{7}$$

je řešení rovnice

$$y'' - \alpha f(x)\, y' + [\varrho^2 - \alpha f'(x)]\, y = 0, \tag{8}$$

s podmínkou

$$y' - \alpha f(x)\, y = 0, \qquad x = -h, \qquad x = h, \tag{9}$$

$$\left(\alpha = \frac{\beta}{D}\right),$$

která přísluší charakteristické hodnotě ϱ_ν; při tom je fundamentální systém $v(x, \varrho_\nu)$, $w(x, \varrho_\nu)$ volen tak, aby bylo

$$y(x; 0) = v(x; 0) = e^{\alpha \int_0^x f(\xi)\, d\xi} \tag{10}$$

Charakteristické hodnoty ϱ_ν jsou kořeny rovnice:

$$\begin{aligned} & [w'(-h; \varrho) - \alpha f(-h)\, w(-h; \varrho)]\, [v'(h; \varrho) - \alpha f(h)\, v(h; \varrho)] - \\ & - [v'(-h; \varrho) - \alpha f(-h)\, v(-h; \varrho)]\, [w'(h; \varrho) - \alpha f(h)\, w(h; \varrho)] = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Disperse je pak dána vzorcem:

$$\frac{C}{2}=\frac{1}{I_0}\int\limits_{-h}^{h}\mathrm{y}(x;\,0)\,(x-\bar{x})^2\,\mathrm{d}x+$$

$$+\frac{2}{I_0}\sum_{\varrho_\nu}\frac{1}{I_{\varrho_\nu}}\frac{1}{e^{D\varrho_\nu^2\vartheta}-1}\left(\int\limits_{-h}^{h}\mathrm{y}(x;\,\varrho_\nu)\,(x-\bar{x})\,\mathrm{d}x\right)^2. \tag{12}$$

Řady na pravých stranách vzorců (6) a (12) konvergují absolutně a stejnoměrně.

Užijme nyní těchto obecných vzorců k výpočtu hustoty pravděpodobnosti u a k výpočtu disperse, běží-li o Brownův pohyb zrcátka, zavěšeného na torsním vlákně.

Označíme-li písmenem x úhlovou odchylku zrcátka od nulové polohy, písmenem a koeficient torse, jest

$$\mathrm{f}(x)=-ax.$$

Rovnice (8) s podmínkou (9) přejde v tuto:

$$y''+\varepsilon xy'+(\varrho^2+\varepsilon)\,y=0,$$
$$y'+\varepsilon xy=0,\quad x=-h,\quad x=h,$$

kde je položeno

$$\varepsilon=a\alpha=\frac{a\beta}{D}.$$

Substitucí $y=ve^{-\frac{1}{4}\varepsilon x^2}$ a zavedením nové proměnné vztahem $x=\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\xi$ obdržíme z první rovnice známou diferenciální rovnici pro funkce parabolického válce[4]):

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\xi^2}+\left(\frac{\varrho^2}{\varepsilon}+\frac{1}{2}-\frac{\xi^2}{4}\right)v=0.$$

Můžeme tedy vzíti za fundamentální systém funkce

$$\mathrm{v}(x;\,\varrho)=e^{-\frac{1}{4}\varepsilon x^2}\,\mathrm{D}_{\varrho^2/\varepsilon}(x\sqrt{\varepsilon})$$
$$\mathrm{w}(x;\,\varrho)=e^{-\frac{1}{4}\varepsilon x^2}\,\mathrm{D}_{-\varrho^2/\varepsilon-1}\,(ix\sqrt{\varepsilon}).$$

Podmínce (10) je vskutku vyhověno, neboť

$$\mathrm{D}_0(x\sqrt{\varepsilon})=e^{-\frac{1}{4}\varepsilon x^2}.$$

Charakteristickou rovnici (11) lze upraviti užitím známých rovností

$$\mathrm{D}'_n(z)+\tfrac{1}{2}\,z\mathrm{D}_n(z)-n\mathrm{D}_{n-1}(z)=0, \tag{13}$$
$$\mathrm{D}_{n+1}(z)-z\mathrm{D}_n(z)+n\mathrm{D}_{n-1}(z)=0 \tag{14}$$

na tvar

---

[4]) Whittaker, A course of modern analysis, 3. ed., p. 347.

$$\varrho^2 e^{-\frac{1}{2}h^2\varepsilon} [D_{\varrho^2/\varepsilon-1}(h\sqrt{\varepsilon})\, D_{-\varrho^2/\varepsilon}(-ih\sqrt{\varepsilon}) -$$
$$- D_{\varrho^2/\varepsilon-1}(-h\sqrt{\varepsilon})\, D_{-\varrho^2/\varepsilon}(ih\sqrt{\varepsilon})] = 0.$$

Charakteristické hodnoty ϱ_ν, jež tvoří nekonečnou posloupnost, stále stoupající, jsou jednoduchými kořeny této rovnice. Čtverec žádného z jejích kladných kořenů ϱ_ν není celistvým násobkem čísla ε, ať je h jakékoli. Roste-li však h přes každou mez, blíží se posloupnost $\{\varrho_\nu^2/\varepsilon\}$ posloupnosti 0, 1, 2, 3, . . .

Lze to nahlédnouti, uvede-li se výraz v hranaté závorce pomocí asymptotických rozvojů

$$D_n(z) = e^{-\frac{1}{4}z^2} z^n\, P_1(n, z), \quad |\arg z| < \tfrac{3}{4}\pi,$$

$$D_n(z) = e^{-\frac{1}{4}z^2} z^n\, P_1(n, z) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-n)}\, e^{n\pi i}\, e^{\frac{1}{4}z^2} z^{-n-1}\, P_2(n, z),$$
$$\tfrac{5}{4}\pi > \arg z > \tfrac{1}{4}\pi,$$

v nichž je

$$P_1(n, z) = 1 - \frac{n(n-1)}{2z^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \,.\, 4z^4} - \dots$$

$$P_2(n, z) = 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2z^2} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \,.\, 4z^4} + \dots$$

na tvar

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{P_1(\nu, \xi)}{P_2(\nu, \xi)}\, \frac{\xi^{2\nu-1}}{e^{\frac{1}{2}\xi^2}}\, \Gamma(-\nu) \cos \nu\pi = 1,$$

kde je položeno

$$\nu = \varrho^2/\varepsilon, \qquad \xi = h\sqrt{\varepsilon}.$$

Vypočtěme limitu funkce $y(x; \varrho_\nu)$, roste-li h přes každou mez. Limita koeficientu při $w(x; \varrho_\nu)$ ve vzorci (7) je v našem případě — jak se lze přesvědčiti dosazením zvláštních hodnot a užitím vztahů (13), (14) — rovna nule, lze tedy vzíti

$$\lim_{h\to\infty} y(x; \varrho_\nu) = I(x; \varrho_\nu) = e^{-\frac{1}{4}\varepsilon x^2}\, D_\nu(x\sqrt{\varepsilon}), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Označíme-li $U(x_0, x, t)$ hustotu pravděpodobnosti, odpovídající případu, že úhlový pohyb zrcátka není žádnou pevnou hranicí omezen, obdržíme ze vzorce (6) se zřetelem na známý vztah

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [D_n(x\sqrt{\varepsilon})]^2\, dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}}\, n!, \quad n = 1, 2, \dots$$

výsledek:

$$U(x_0, x, t) = \lim_{h\to\infty} u(x_0, x, t) = \tag{15}$$
$$= \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\varepsilon x^2} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}} \sum_{\nu=1} e^{-D_\nu t}\, \frac{D_\nu(x_0\sqrt{\varepsilon})\, D_\nu(x\sqrt{\varepsilon})}{\nu!}\, e^{\frac{1}{4}\varepsilon(x_0^2-x^2)};$$

tento vzorec, který odvodili přímo G. E. Uhlenbeck a L. S. Ornstein[5]), lze převésti podle tamtéž uvedeného výpočtu H. A. Kramerse na známější a starší tvar Smoluchowského[6]):

$$U(x_0, x, t) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2\pi\,(1 - e^{-2D\varepsilon t})}}\, e^{-\frac{\varepsilon(x - x_0 e^{-D\varepsilon t})^2}{2(1 - e^{-2D\varepsilon t})}}. \qquad (16)$$

Dispersi $\frac{1}{2} C$ pro tentýž případ vypočteme ze vzorce (12), přejdeme-li v něm po dosazení našich zvláštních hodnot k limitě pro $h \to \infty$.

Jest

$$\bar{x} = 0,$$

$$\lim_{h\to\infty} I_{\varrho_\nu} = \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}}\,\nu! \qquad \nu = 0,\ 1, 2, \ldots;\ 0! = 1,$$

takže

$$\lim_{h\to\infty} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon x^2}\, x^2 dx +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{e^{nD\vartheta} - 1} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{1}{4}\varepsilon x^2}\, D_n(x\sqrt{\varepsilon})\, dx \right]^2.$$

První člen na pravé straně je roven

$$1/\varepsilon.$$

Integrál v závorce můžeme, užijeme-li vzorce (14), napsati takto:

$$\frac{n}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} D_0(x\sqrt{\varepsilon})\, D_{n-1}(x\sqrt{\varepsilon})\, dx + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} D_0(x\sqrt{\varepsilon})\, D_{n+1}(x\sqrt{\varepsilon})\, dx.$$

Poněvadž je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D_m(z)\, D_n(z)\, dz = 0, \quad m \neq n;\ m, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

je tento výraz různý od nuly jen pro $n = 1$ a je roven

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}}.$$

[5]) G. E. Uhlenbeck, L. S. Ornstein: On the theory of the Brownian motion, Phys. Rev. XXXVI, 1930, p. 839.

[6]) Smoluchowski, Einige Beispiele Brownscher Molekularbewegung unter Einfluss äusserer Kräfte. Bull. Internat. de l'ac. des sc. de Cracovie, Kl. A, 1913, p. 418—34, Ostw. Klassiker p. 25.

Je tedy disperse Brownova pohybu torsního zrcátka vyjádřena vzorcem

$$\tfrac{1}{2}C = \frac{D}{\alpha\beta}\left(1 + \frac{1}{e^{D\vartheta} - 1}\right). \tag{15}$$

Tímto vzorcem je vyjádřena závislost disperse na délce intervalů ϑ, v nichž pohyb pozorujeme.

Závislost disperse na absolutní teplotě T vyjádří se jednoduše ze známého vztahu

$$\frac{D}{\beta} = kT,$$

kde k je Boltzmannova konstanta.

*

Sur le mouvement Brownien d'un miroir de torsion.

(Extrait de l'article précédent.)

Considérons le mouvement Brownien d'un miroir très léger, suspendu à un fil de torsion. Soient $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ les déviations angulaires du miroir par rapport à sa position d'équilibre, observées aux époques resp. $0, \vartheta, 2\vartheta, \ldots, n\vartheta, \ldots$, où ϑ est un nombre positif quelconque. On appelle dispersion et on désigne par $\frac{1}{2}C$ une valeur limite, définie par la formule (2) [voir les citations (2), (3)].

Dans le présent article on applique au cas particulier considéré du mouvement Brownien une méthode générale, développée dans un travail antérieur (1); on retrouve l'expression (16) pour la densité de probabilité $u(x_0, x; t)$ due à Smoluchowski (6) — voir aussi (5) — et on établit la formule (17), qui donne la dispersion en fonction d'intervalle du temps ϑ. Dans cette formule on désigne par α le coëfficient de torsion, par D resp. β le coëfficient de la diffusion resp. la mobilité.