František Velísek

Proudění elektřiny ve vrchlíku kulovém omezeném sférickou ellipsou. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 5, 534--545

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122624`

Proudění elektřiny ve vrchlíku kulovém omezeném sférickou ellipsou.

Napsal Dr. **Frant. Velísek,** assistent čes. techniky v Praze.

(Dokončení.)

Kombinací vzorců obdržíme jako formuli zobrazovací

$$w = \sqrt{k}\, sn\, \frac{2K}{\pi}\, arc\, sin\, \frac{z}{c}.$$

Z rovnic definujících a, b plyne

$$\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 = e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

tedy pro konstantu Jacobiho plyne

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

Poněvadž zobrazení kruhu w na positivní půlrovinu ζ dáno jest výrazem

$$w = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}, \quad \text{z čehož } \zeta = -i\,\frac{w+1}{w-1},$$

zobrazí se ellipsa z na rovinu ζ jednoznačně. Plyne tudíž pro funkci

$$W = \Sigma J_n\, lg\, (\zeta - \zeta_n)\, (\zeta - \zeta'_n)$$

$$W = \Sigma J_n\, lg \left[-i\,\frac{\sqrt{k}\, sn\, u + 1}{\sqrt{k}\, sn\, u - 1} + i\,\frac{\sqrt{k}\, sn\, u_n + 1}{\sqrt{k}\, sn\, u_n - 1}\right] \left[-i\,\frac{\sqrt{k}\, sn\, u + 1}{\sqrt{k}\, sn\, u - 1} - i\,\frac{\sqrt{k}\, sn\, u'_n + 1}{\sqrt{k}\, sn\, u'_n - 1}\right],$$

kde

$$u = \frac{2K}{\pi}\, arc\, sin\, \frac{z}{c},$$

neb

$$W = \Sigma J_n\, lg\, (sn\, u - sn\, u_n)\, (k\, sn\, u\, sn\, u'_n - 1) + konst.$$

Pro odpovídající proudění ve vrchlíku kulovém dlužno jen se vrátiti k původním proměnným u, v.

Výraz pro W možno převésti na tvar jiný. Transformujeme irracionalitu Legendreovu na Riemannovu tak, že bodům

$$1, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k}, -1$$

odpovídají resp.

$$\infty, 0, 1, \frac{(1+k)^2}{4k},$$

tedy relací

$$\frac{z'-0}{1-0} : \frac{z'-\infty}{1-\infty} = \frac{z-\frac{1}{k}}{-\frac{1}{k}-\frac{1}{k}} : \frac{z-1}{-\frac{1}{k}-1},$$

z čehož

$$z = \frac{1}{k} \frac{1+k-2kz'}{1+k-2z'}.$$

Nazveme-li nový modul λ,

$$\lambda = \frac{4k}{(1+k)^2},$$

obdržíme vztah

$$\int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{z'(1-z')(1-\lambda z')}}$$

$$= (1+k) \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \alpha(1+k),$$

kde α značí konstantu

$$\alpha = iK' - K \quad \text{(při modulu } k\text{)}.$$

Klademe-li

$$z = sn\, u, \quad z' = sn^2\,[(1+k)\,w, \lambda],$$

kde

$$w = \frac{u+\alpha}{2},$$

tedy

$$z = \frac{1}{k} \frac{1+k-2k\, sn^2\,[(1+k)\,w, \lambda]}{1+k-2sn^2\,[(1+k)\,w, \lambda]}.$$

Dosadíme-li do výrazu pro W a použijeme opět vztahu $\Sigma J_n f(w) = 0$, obdržíme

$$W = \Sigma' J_n \lg \{sn^2[(1+k)w, \lambda) - sn^2[(1+k)w_n, \lambda]\} \\ \{sn^2[(1+k)w, \lambda] - sn^2[(1+k)w'_n, \lambda]\}.$$

Dle Gaussovy transformace obdržíme

$$sn\left[(1+k)w, \frac{4k}{(1+k)^2}\right] = \frac{(1+k)\, sn\,(w,k)}{1+k\, sn^2\,(w,k)},$$

a po příslušném zjednodušení

$$W = \Sigma J_n \lg (sn^2 w - sn^2 w_n)(sn^2 w - sn^2 w'_n) \\ (1 - k^2 sn^2 w\, sn^2 w_n)(1 - k^2 sn^2 w\, sn^2 w_n).$$

Použijeme-li Jacobi-ho funkcí Θ a H (Weber: Ell. Functionen str. 115)

$$\Theta^2(o)\, \Theta(w + w_n)\, \Theta(w - w_n) = \Theta^2(w)\, \Theta^2(w_n)(1 - k^2 sn^2 w\, sn^2 w_n)$$
$$\Theta^2(o)\, H(w + w_n)\, H(w - w_n) = k\, \Theta^2(w)\, \Theta^2(w_n)(sn^2 w - sn^2 w_n),$$

přejde výraz pro W do tvaru

$$W = \Sigma J_n \lg \Theta(w + w_n)\, \Theta(w - w_n)\, H(w + w_n)\, H(w - w_n) \\ \Theta(w + w'_n)\, \Theta(w - w'_n)\, H(w + w'_n)\, H(w - w'_n).$$

Vyjádříme-li funkce exponencielami, můžeme vzorec snadno geometricky interpretovati.

Ke konci uvedeme ještě, jak možno výsledky hořejší obdržeti pomocí stereografické projekce vrchlíku na rovinu

$$\zeta = \xi + i\eta.$$

Souřadnice pravoúhlé sférických kuželoseček byly dány ve tvaru

$$x = k\, sn\, t\, sn\, u, \quad y = \frac{ik}{k'}\, cn\, t\, cn\, u, \quad z = \frac{1}{k'}\, dn\, t\, dn\, u,$$

a jeví se jako průseky koule poloměru 1

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

s plochami kuželovými

$$\frac{x^2}{k^2 sn^2 t} + \frac{y^2}{k^2 sn^2 t - k^2} - \frac{z^2}{dn^2 t} = 0,$$
$$\frac{x^2}{k^2 sn^2 u} + \frac{y^2}{k^2 sn^2 u - k^2} - \frac{z^2}{dn^2 u} = 0,$$

kde u leží v mezích $0 \ldots 4K$, t v mezích $K \ldots K + iK'$.

Zavedeme-li místo t novou proměnnou v mezích $0 \ldots K'$, ponechávajíce označení t, obdržíme pro pól (0, 0, 1) jako střed projekce

$$\xi + i\eta = \frac{x + iy}{1 - z} = k\,\frac{sn\,u\,cn\,it + cn\,u\,sn\,it}{dn\,it - dn\,u}.$$

Použijeme-li vzorců (Greenhill: Les fonctions elliptiques, str. 206)

$$k(sn\,u\,cn\,it + sn\,it\,cn\,u) = \sqrt{1 - k^2\,sn^2 u\,sn^2 it}$$
$$\sqrt{[1 + dn(u + it)]\,[1 - dn(u - it)]}$$
$$dn\,u - dn\,it = \sqrt{1 - k^2\,sn^2 u\,sn^2 it}$$
$$\sqrt{[1 - dn(u + it)]\,[1 - dn(u - it)]},$$

obdržíme

$$\xi + i\eta = \sqrt{\frac{1 + dn(u + it)}{1 - dn(u + it)}} = \frac{1 + k'}{k}\,\frac{1}{sn\left[\frac{u + it}{1 + \lambda}, \lambda\right]}, \tag{8}$$

kde

$$\lambda = \frac{1 - k'}{1 + k'}.$$

Abychom poznali, jaké křivky odpovídají sférickým kuželosečkám $u = konst$, $t = konst$ v rovině, eliminujeme z formule zobrazovací jednou t, pak u. Eliminace t dává

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\xi^2\left(1 + \frac{2}{k^2}\,\frac{dn^2 u}{sn^2 u}\right) - 2\eta^2\left(1 - \frac{2}{k^2}\,\frac{dn^2 u}{cn^2 u}\right) + 1 = 0,$$

tedy křivku cirkulární 4-ho stupně.

Eliminace u dává

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 + 2\xi^2\left(1 - \frac{2dn^2 it}{k^2 cu^2 it}\right) + 2\eta^2\left(1 + \frac{2dn^2 it}{k^2 sn^2 it}\right) + 1 = 0. \tag{9}$$

Tím dána stereografická projekce daného systému sférických kuželoseček na rovinu rovníkovou, při čemž pól (0, 0, 1) jest středem projekce. Použijeme-li téhož pólu za střed projekce, obdržíme týmž vztahem projekci polokoule dolejší, jen u se mění v mezích $2iK' \ldots 2iK' + 4K$. Obě projekce vyplňují celou rovinu ζ. Použijeme projekce polokoule hořejší. Pro $t = 0$, $u = 0$ obdržíme projekci středu promítání. Pro $t = K'$

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2(\xi^2 + \eta^2) + 1 = 0, \quad \text{t. j.}$$
$$(\xi^2 + \eta^2 - 1)^2 = 0,$$

tedy dvojnásobně čítanou kružnici, jest tedy zobrazena hořejší polokoule na vnějšek kružnice

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Je-li mezní hodnota pro $t = t_0$, obdržíme jako projekci vrchlíku kulového omezeného kuželosečkou sférickou rovinu, z níž vyňata plocha omezená křivkou

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 + 2\xi^2\left(1 - \frac{2}{k^2}\frac{dn^2 it_0}{cn^2 it_0}\right) + 2\eta^2\left(1 + \frac{2}{k^2}\frac{dn^2 it_0}{sn^2 it_0}\right) + 1 = 0, \tag{10}$$

tedy cirkulární křivkou 4-ho stupně, u níž vedlejší ohnisko padá v počátek souřadnic. Položíme k vůli jednoduchosti

$$-a = 1 - \frac{2dn^2 it_0}{k^2 cn^2 it_0}, \qquad -b = 1 + \frac{2dn^2 it_0}{k^2 sn^2 it_0}.$$

Poslední rovnice křivky (10) má pak tvar

$$f \equiv (\xi^2 + \eta^2)^2 - 2a\xi^2 - 2b\eta^2 + 1 = 0. \tag{11}$$

Křivka má za dvojné body kruhové body v nekonečnu; obdržíme totiž v souřadnicích Hesseových

$$\xi = \frac{x_1}{x_3}, \quad \eta = \frac{x_2}{x_3},$$

$$f \equiv (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2ax_1^2 x_3^2 - 2bx_2^2 x_3^2 + x_3^4 = 0,$$

a z podmínek

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

plyne pro dvojné body

$$x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad x_3 = 0,$$

tedy

$$\frac{x_1}{x_2} = \pm i.$$

Použijeme-li druhých derivací pro body $(\pm i, 1, 0)$, totiž

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} = -8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 4(a-b),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 8i, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 0,$$

obdržíme pro tečny v bodech dvojných v nekonečnu rovnici

$$\xi \pm i\eta \pm \sqrt{\frac{a-b}{2}} = 0.$$

Pro průseky jich obdržíme 2 body v nekonečnu, ohniska

$$\left(0, \pm \sqrt{\frac{b-a}{2}}\right),$$

kde

$$\sqrt{\frac{b-a}{2}} = i \frac{dn\, it_0}{k\, sn\, it_0\, cn\, it_0},$$

tedy výraz reelní.

Rovnici křivky možno psáti

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 - (a+b)(\xi^2 + \eta^2) + (b-a)(\xi^2 - \eta^2) + 1 = 0,$$

a zavedeme-li

$$\xi + i\eta = \zeta, \quad \xi - i\eta = \zeta_1,$$

obdržíme

$$f(\zeta, \zeta_1) \equiv \zeta^2\zeta_1^2 - (a+b)\,\zeta\zeta_1 + \frac{b-a}{2}\,\zeta^2 + \frac{b-a}{2}\,\zeta_1^2 + 1 = 0. \tag{12}$$

Dle Lindemanna (Sitzungsber. der physik.-ökonom. Gesellschaft zu Königsberg 1894) možno provésti konformní zobrazení pro křivku $f(\zeta, \zeta_1) = 0$, když dá se určiti racionální funkce F, argumentů ξ, η s reelními koefficienty tak, že vhodná potence podílu

$$F(\zeta, \zeta_1) : \frac{\partial f}{\partial \zeta_1}$$

jest opět racionální funkcí ζ. Zároveň udáno, že tento případ vyskytuje se při ellipse a parabole (provedeno od Schwarze), hyperbole (od Lindemanna), pak při cirkulárních křivkách 3-ho a 4-ho stupně (od Göttlera: Münch. Ber. 1900).

Z rovnice (12) obdržíme derivací dle proměnné z (různé od souřadnice plochy kulové).

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{d\zeta}{dz} = -\frac{\partial f}{\partial \zeta_1}\frac{d\zeta_1}{dz}, \tag{13}$$

kde
$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} = 2\zeta\zeta_1^2 - (a+b)\,\zeta_1 + (b-a)\,\zeta,$$
$$\frac{\partial f}{\partial \zeta_1} = 2\zeta^2\zeta_1 - (a+b)\,\zeta + (b-a)\,\zeta_1.$$

Z rovnice křivky (12) obdržíme
$$\zeta = \frac{a+b}{2}\,\zeta_1 \pm \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}\left[\zeta_1^2 - \left(\frac{1+k'}{k}\right)^2\right]\left[\zeta_1^2 - \left(\frac{1-k'}{k}\right)^2\right]}}{\left(\zeta_1^2 + \frac{b-a}{2}\right)},$$
$$\zeta_1 = \frac{a+b}{2}\,\zeta \pm \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}\left[\zeta^2 - \left(\frac{1+k'}{k}\right)^2\right]\left[\zeta^2 - \left(\frac{1-k'}{k}\right)^2\right]}}{\left(\zeta^2 + \frac{b-a}{2}\right)},$$
kde
$$\varepsilon = \frac{2dn^2\, it_0}{k^2\, sn^2\, it_0\; cn^2\, it_0},$$
tedy
$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial f}{\partial \zeta} = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}\left[\zeta_1^2 - \left(\frac{1+k'}{k}\right)^2\right]\left[\zeta_1^2 - \left(\frac{1-k'}{k}\right)^2\right]},$$
$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial f}{\partial \zeta_1} = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}\left[\zeta^2 - \left(\frac{1+k'}{k}\right)^2\right]\left[\zeta^2 - \left(\frac{1-k'}{k}\right)^2\right]}.$$

Rovnice (13) nabude pak tvaru
$$\sqrt{\left[\zeta_1^2 - \left(\frac{1+k'}{k}\right)^2\right]\left[\zeta_1^2 - \left(\frac{1-k'}{k}\right)^2\right]}\;\frac{d\zeta}{dz}$$
$$= -\sqrt{\left[\zeta^2 - \left(\frac{1+k'}{k}\right)^2\right]\left[\zeta^2 - \left(\frac{1-k'}{k}\right)^2\right]}\;\frac{d\zeta_1}{dz}.$$

Logarithmujeme-li a differencujeme tuto rovnici (dle Schwarze), obdržíme
$$\frac{d}{dz}\left(l\,\frac{d\zeta}{dz}\right) - \frac{\zeta}{\zeta^2 - \left(\frac{1+k'}{k}\right)^2}\,\frac{d\zeta}{dz} - \frac{\zeta}{\zeta^2 - \left(\frac{1-k'}{k}\right)^2}\,\frac{d\zeta}{dz}$$
$$= \frac{d}{dz}\left(l\,\frac{d\zeta_1}{dz}\right) - \frac{\zeta_1}{\zeta_1^2 - \left(\frac{1+k'}{k}\right)^2}\,\frac{d\zeta_1}{dz} - \frac{\zeta_1}{\zeta_1^2 - \left(\frac{1-k'}{k}\right)^2}\,\frac{d\zeta_1}{dz} \qquad (14)$$

Označíme-li levou stranu rovnice (14) $F(\zeta, z)$, bude pravá strana $F(\zeta_1, z)$; tudíž

$$F(\zeta, z) = F(\zeta_1, z).$$

$F(\zeta, z)$ jest tedy funkce jednoznačná a spojitá, pro reelní hodnoty z jest reelní, pokud ζ a ζ_1 jsou konjugované veličiny, neboť pak pro bod křivky ζ, dle rovnice (14) jest $F(\zeta, z)$ reelní, t. j. funkce tato přiřaďuje každému bodu křivky (12) bod reelní osy roviny z. Funkce $F(\zeta, z)$ má póly v ohniscích křivky (12), pokud připadají do roviny vně křivky. Pro uvažovanou křivku jsou to body reelní osy, projekce to ohnisek sférických kuželoseček, a to uvnitř křivky $\pm \frac{1-k'}{k}$, vně $\pm \frac{1+k'}{k}$. Označme tyto poslední krátce

$$\pm \frac{1-k'}{k} = \pm c_1 \qquad \pm \frac{1+k'}{k} = \pm c.$$

Myslíme-li si ζ jako jednoznačnou funkci z, a má-li bodu $\zeta = c$ odpovídati bod $z = A$, bude platiti rozvoj

$$\zeta - c = \alpha_1 (z - A) + \alpha_2 (z - A)^2 + \ldots,$$

pro

$$\alpha_1 \neq 0.$$

Z toho

$$\frac{d\zeta}{dz} = \alpha_1 + 2\alpha_2 (z - A) + 3\alpha_3 (z - A)^2 + \ldots$$

$$\frac{d^2\zeta}{dz^2} = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 (z - A) + \ldots$$

Dosadíme-li tyto hodnoty za

$$\zeta, \frac{d\zeta}{dz}, \frac{d^2\zeta}{dz^2} \text{ do } F(\zeta, z)$$

$$F(\zeta, z) = \frac{d^2\zeta}{dz^2} \cdot \frac{1}{\frac{d\zeta}{dz}} - \frac{\zeta}{\zeta^2 - c^2}\frac{d\zeta}{dz} - \frac{\zeta}{\zeta^2 - c_1^2}\frac{d\zeta}{dz},$$

obdržíme především

$$\frac{d^2\zeta}{dz^2}\frac{1}{\frac{d\zeta}{dz}} = \frac{2\alpha_2 + 6\alpha_3 (z - A) + \ldots}{\alpha_1 + 2\alpha_2 (z - A) + \ldots} = P(z - A),$$

kde $P(z - A)$ značí potenční řadu

$$\zeta^2 = c^2 + 2c\alpha_1 (z - A) + \dots$$

$$\frac{\zeta}{\zeta^2 - c^2}\frac{d\zeta}{dz} = \frac{c + \alpha_1 (z - A) + \dots}{2c\alpha_1 (z - A) + \dots} [\alpha_1 + 2\alpha_2)(z - A) + \dots]$$

$$= \frac{1}{2(z - A)} + P(z - A),$$

$$\frac{\zeta}{\zeta^2 - c_1^2}\frac{d\zeta}{dz} = \frac{c + \alpha_1 (z - A) + \dots}{c^2 - c_1^2 + 2\alpha_1 c (z - A) + \dots} [\alpha_1 + 2\alpha_2 (z - A) + \dots]$$

$$= P(z - A).$$

Tedy dosazeno

$$F(\zeta, z) = -\frac{1}{2(z - A)} + P(z - A).$$

Podobně obdržíme, odpovídá-li bodu $\zeta = -c$ bod $z = A'$

$$F(\zeta, z) = -\frac{1}{2(z - A')} + P(z - A').$$

Abychom vyšetřili, jak se chová funkce $F(\zeta, z)$ pro $\zeta = \infty$, předpokládejme, že bodu $\zeta = \infty$ odpovídá bod $z = C$. Pak analytický výraz pro ζ

$$\zeta = \frac{\alpha}{z - C} + \alpha_0 + \alpha_1 (z - C) + \alpha_2 (z - C)^2 + \dots$$

z toho

$$\frac{d\zeta}{dz} = -\frac{\alpha}{(z - C)^2} + \alpha_1 + 2\alpha_2 (z - C) + \dots$$

$$\frac{d^2\zeta}{dz^2} = \frac{2\alpha}{(z - C)^2} + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 (z - C) + \dots$$

Dosazením obdržíme

$$\frac{d}{dz}\left(l\,\frac{d\zeta}{dz}\right) = \frac{2\alpha (z - C)^{-3} + 2\alpha_2 + \dots}{-\alpha (z - C)^{-2} + \alpha_1 + \dots} = -\frac{2}{z - C} + P(z - C).$$

$$\frac{\zeta}{\zeta^2 - c^2}\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\alpha (z - C)^{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 (z - C) + \dots}{\alpha^2 (z - C)^{-2} + \alpha_0^2 - c^2 + 2\alpha\alpha_1 (z - C)^{-1} + \dots}$$

$$[-\alpha (z - C)^{-2} + \alpha_1 + 2\alpha_2 (z - C) + \dots]$$

$$= -\frac{1}{z - C} + P(z - C).$$

Podobně pro

$$\frac{\zeta}{\zeta^2 - c_1^2}\frac{d\zeta}{dz} = -\frac{1}{z - C} + P(z - C).$$

Tudíž $\qquad F(\zeta, z) = P(z - C),$

chová se tedy funkce $F(\zeta, z)$ v bodě $\zeta = \infty$ regulárně.

Funkce

$$F(\zeta, z) + \frac{1}{2(z - A)} + \frac{1}{2(z - A')}$$

nemá v uvažovaném oboru pólu, jest tedy všude konečnou. Jsou-li A_1, A'_1 veličiny konjugované k A, A', jest funkce

$$\Phi(\zeta, z) = F(\zeta, z) + \frac{1}{2(z - A)} + \frac{1}{2(z - A')} + \frac{1}{2(z - A_1)} + \frac{1}{2(z - A'_1)}$$

všude v uvažovaném oboru konečnou, jednoznačnou a spojitou, pro reelní z jest reelní, t. j. přiřaďuje každému bodu křivky (12) bod reelní osy roviny z. Dle funkční theorie jest však funkce, která jest v celém uvažovaném oboru jednoznačnou, konečnou a spojitou, konstantou.

Tedy $\qquad \Phi(\zeta, z) = konst.$

Pro určení konstanty uvažujme hodnotu funkce v bodě $z = \infty$, kterému odpovídejž bod $\zeta = D$. Pak jest ζ jako funkce z dáno analyticky potenční řadou

$$\zeta - D = \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \frac{\alpha_3}{z^3} + \dots$$

Z toho plyne

$$\frac{d\zeta}{dz} = -\alpha_1 z^{-2} - 2\alpha_2 z^{-3} - 3\alpha_3 z^{-4} - \dots$$

$$\frac{d^2\zeta}{dz^2} = 2\alpha_1 z^{-3} + 6\alpha_2 z^{-4} + \dots,$$

tedy

$$\frac{d}{dz}\left(l\,\frac{d\zeta}{dz}\right) = \frac{2\alpha_1 z^{-3} + 6\alpha_2 z^{-4} + \dots}{-\alpha_1 z^{-2} - 2\alpha_2 z^{-3} - \dots} = 0 \text{ pro } z = \infty,$$

$$\frac{\zeta}{\zeta^2 - c^2}\frac{d\zeta}{dz} = \frac{D + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots}{D^2 - c^2 + \alpha_1^2 z^{-2} + 2\alpha\alpha_1 z^{-1} + \dots}$$

$$[-\alpha_1 z^{-2} - 2\alpha_2 z^{-3} - \dots] = 0 \text{ pro } z = \infty.$$

Rovněž

$$\frac{\zeta}{\zeta^2 - c_1^2} \frac{d\zeta}{dz} = 0 \text{ pro } z = \infty, \text{ jakož i } \frac{1}{z - A} \text{ atd.}$$

Tedy pro $z = \infty$ platí

$$\Phi(\zeta, z) = 0.$$

Poněvadž pak funkce $\Phi(\zeta, z)$ jest konstantou, která má všude touž hodnotu, obdržíme rovnici

$$\Phi(\zeta, z) = 0,$$

neb rozepsáno

$$\frac{d}{dz}\left(l\frac{d\zeta}{dz}\right) - \frac{\zeta}{\zeta^2 - c^2}\frac{d\zeta}{dz} - \frac{\zeta}{\zeta^2 - c_1^2}\frac{d\zeta}{dz}$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z - A} + \frac{1}{z - A'} + \frac{1}{z - A_1} + \frac{1}{z - A'_1}\right].$$

Funkcí touto dáno tedy zobrazení našeho oboru na positivní půlrovinu z. Integrací obdržíme

$$l\frac{d\zeta}{dz} - \frac{1}{2}\, l\,(\zeta^2 - c^2)(\zeta^2 - c_1^2)$$
$$= -\frac{1}{2}\, l(z - A)(z - A')(z - A_1)(z - A'_1) + lL_1,$$

kde L_1 značí integrační konstantu. Opětnou integrací obdržíme, označíme-li konstantu integrační L_2

$$\int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - c^2)(\zeta^2 - c_1^2)}}$$
$$= L_1 \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z - A)(z - A')(z - A_1)(z - A'_1)}} + L_2. \quad (15)$$

První integrál dá se jednoduše vyjádřiti pomocí $u + it = w$. Klademe-li

$$\lambda = \frac{1 - k'}{1 + k'}, \text{ obdržíme pro } \zeta = \frac{1 - k'}{k}\zeta_1$$

$$\int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - c^2)(\zeta^2 - c_1^2)}}$$
$$= \frac{k}{1 + k'} \int_0^{\zeta_1} \frac{d\zeta_1}{\sqrt{(1 - \zeta_1^2)(1 - \lambda^2\zeta_1^2)}} = \frac{kw_1}{2},$$

z čehož

$$\zeta_1 = sn\left[(1+k')\frac{w_1}{2}, \lambda\right],$$

a použijeme-li Landen-ovy transformace

$$sn(w_1, k) = 2sn\left[\frac{1+k'}{2}w_1, \lambda\right] : \left[1 + k'\right.$$
$$\left. + (1-k')\, sn^2\left(\frac{1+k'}{2}w_1, \lambda\right)\right],$$

obdržíme při správném určení znamení (na př. pro hodnotu ζ v ohnisku sférických kuželoseček, kde $\zeta = \pm\frac{1+k'}{k}$),

$$sn\left[\frac{1+k'}{2}w_1, \lambda\right] = \frac{1+dn(w_1, k)}{(1-k')\, sn(w_1, k)} = \frac{k}{1-k'}, \sqrt{\frac{1+dnw_1}{1-dnw_1}}.$$

Z toho

$$\zeta = \sqrt{\frac{1+dnw_1}{1-dnw_1}},$$

a poněvadž ζ bylo dáno výrazem

$$\zeta = \sqrt{\frac{1+dnw}{1-dnw}},$$

plyne ze srovnání obou výrazů

$$w = w_1.$$

Dosadíme-li do výrazu (15) tuto hodnotu, obdržíme po dělení obou stran $\frac{k}{2}$

$$w = L_1 \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z-A)(z-A')(z-A_1)(z-A'_1)}} + L_2.$$

Pro určení konstant možno voliti dvě dvojice odpovídajících si bodů $c_1 - c$, A, A', neb po vhodné volbě L_1, L_2 určiti příslušné A, A'. Obrátíme-li funkcionální závislost, obdržíme po dosazení z do výrazu pro funkci Wtýž výraz jako dříve.