Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Libický

Casparyho nové věty z geometrie trojúhelníka. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 31 (1902), No. 3, 189--201

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122617

Casparyho nové věty z geometrie trojúhelníka.

Dokazuje

A. Libický,
professor na Král. Vinohradech.

(Pokračování.)

6. Bývá někdy s prospěchem, provésti transformaci souřadnic, vztahovati totiž body roviny k jiným bodům základním nežli jsou body A_1, A_2, A_3. Za takové nové body volme body B_1, B_2, B_3 a obírejme se nyní úlohou: *Dány jsou souřadnice x_1, x_2, x_3 libovolného bodu X v soustavě $A_1 A_2 A_3$; jest ustanoviti jeho souřadnice v soustavě $B_1 B_2 B_3$, jejíž body základní jsou dány rovnicemi*

$$\begin{aligned} xB_1 &= x_1 A_1 + x_3 A_2 + x_2 A_3, \\ xB_2 &= x_3 A_1 + x_2 A_2 + x_1 A_3, \qquad (x = x_1 + x_2 + x_3) \\ xB_3 &= x_2 A_1 + x_1 A_2 + x_3 A_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Řešením těchto rovnic dle A_1, A_2, A_3 obdržíme pro tyto body zlomky, jichž společným jmenovatelem jest determinant

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_3, & x_2 \\ x_3, & x_2, & x_1 \\ x_2, & x_1, & x_3 \end{vmatrix},$$

který lze psáti též

$$\begin{vmatrix} x_1 + x_3 + x_2, & x_3, & x_2 \\ x_3 + x_2 + x_1, & x_2, & x_1 \\ x_2 + x_1 + x_3, & x_1, & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x, & x_3, & x_2 \\ x, & x_2, & x_1 \\ x, & x_1, & x_3 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1, & x_3, & x_2 \\ 1, & x_2, & x_1 \\ 1, & x_1, & x_3 \end{vmatrix}.$$

Označme poslední determinant písmenem ξ', tak že

$$\xi' = \begin{vmatrix} 1, & x_3, & x_2 \\ 1, & x_2, & x_1 \\ 1, & x_1, & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2, & x_2 - x_3 \\ x_2 - x_3, & x_3 - x_1 \end{vmatrix}$$

$$= x_1 (x_2 - x_1) + x_2 (x_3 - x_2) + x_3 (x_1 - x_3). \tag{12 a}$$

Určíme-li známým způsobem ještě čítatele výrazů pro A_1, A_2, A_3, plynoucí z uvedených rovnic, obdržíme, krátivše veličinou x, o které předpokládáme, že se nerovná nulle, rovnice

$$\begin{aligned}(13a)\quad \xi' A_1 &= (x_2 x_3 - x_1^2) B_1 + (x_1 x_2 - x_3^2) B_2 + (x_3 x_1 - x_2^2) B_3,\\ \xi' A_2 &= (x_1 x_2 - x_3^2) B_1 + (x_3 x_1 - x_2^2) B_2 + (x_2 x_3 - x_1^2) B_3,\\ \xi' A_3 &= (x_3 x_1 - x_2^2) B_1 + (x_2 x_3 - x_1^2) B_2 + (x_1 x_2 - x_3^2) B_3.\end{aligned}$$

Označíme-li dále subdeterminanty

$$(14a)\quad x_2 x_3 - x_1^2 = x\xi_1, \quad x_3 x_1 - x_2^2 = x\xi_2, \quad x_1 x_2 - x_3^2 = x\xi_3,$$

a poměr $\frac{\xi'}{x} = \xi$, píšeme kratčeji:

$$(15)\quad \begin{aligned}\xi A_1 &= \xi_1 B_1 + \xi_3 B_2 + \xi_2 B_3,\\ \xi A_2 &= \xi_3 B_1 + \xi_2 B_2 + \xi_1 B_3, \quad (\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3).\\ \xi A_3 &= \xi_2 B_1 + \xi_1 B_2 + \xi_3 B_3.\end{aligned}$$

Výrazy ξ_1, ξ_2, ξ_3 můžeme pokládati za souřadnice barycentrické (v soustavě $B_1 B_2 B_3$) nějakého bodu R, jehož rovnice bude

$$\xi R = \xi_1 B_1 + \xi_2 B_2 + \xi_3 B_3;$$

sestrojení bodu toho poznáme později.

Z těchto rovnic plynou opět pro B_1, B_2, B_3 hodnoty:

$$\begin{aligned}(13b)\quad x' B_1 &= (\xi_2 \xi_3 - \xi_1^2) A_1 + (\xi_1 \xi_2 - \xi_3^2) A_2 + (\xi_3 \xi_1 - \xi_2^2) A_3,\\ x' B_2 &= (\xi_1 \xi_2 - \xi_3^2) A_1 + (\xi_3 \xi_1 - \xi_2^2) A_2 + (\xi_2 \xi_3 - \xi_1^2) A_3,\\ x' B_3 &= (\xi_3 \xi_1 - \xi_2^2) A_1 + (\xi_2 \xi_3 - \xi_1^2) A_2 + (\xi_1 \xi_2 - \xi_3^2) A_3\end{aligned}$$

značí-li

$$(12b)\quad x' = \begin{vmatrix} 1, & \xi_3, & \xi_2 \\ 1, & \xi_2, & \xi_1 \\ 1, & \xi_1, & \xi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 - \xi_2, & \xi_2 - \xi_3 \\ \xi_2 - \xi_3, & \xi_3 - \xi_1 \end{vmatrix}.$$

Neboť společný jmenovatel výrazů pro B_1, B_2, B_3, plynoucí z rovnic (15), jest

$$\begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_3, & \xi_2 \\ \xi_3, & \xi_2, & \xi_1 \\ \xi_2, & \xi_1, & \xi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 + \xi_3 + \xi_2, & \xi_3, & \xi_2 \\ \xi_3 + \xi_2 + \xi_1, & \xi_2, & \xi_1 \\ \xi_2 + \xi_1 + \xi_3, & \xi_1, & \xi_3 \end{vmatrix} = \xi \begin{vmatrix} 1, & \xi_3, & \xi_2 \\ 1, & \xi_2, & \xi_1 \\ 1, & \xi_1, & \xi_3 \end{vmatrix} = \xi x'.$$

Body B_1, B_2, B_3 máme tedy vyjádřeny jednak rovnicemi (8), jednak rovnicemi (13b); z toho, co bylo pověděno v odd. 1. o souřadnicích barycentrických nějakého bodu vůbec, plyne, že musí býti $\xi_2\xi_3 - \xi_1^2 = kx_1$, $\xi_3\xi_1 - \xi_2^2 = kx_2$, $\xi_1\xi_2 - \xi_3^2 = kx_3$, značí-li k koefficient úměrnosti.

Z těchto rovnic jde, že

$$
\begin{aligned}
k(x_1-x_3) &= \xi_2\xi_3-\xi_1^2-(\xi_1\xi_2-\xi_3^2)\\
&= \xi_2(\xi_3-\xi_1)+(\xi_3+\xi_1)(\xi_3-\xi_1)\\
&= (\xi_1+\xi_2+\xi_3)(\xi_3-\xi_1)\\
&= \xi\,(\xi_3-\xi_1);
\end{aligned}
$$

podobné výrazy obdržíme pro $k(x_2-x_1)$, $k(x_3-x_2)$.

Koefficient k ustanovíme, uvážíme-li, že srovnáním levých stran rovnic (13*b*) a (8) vychází

$$x' = kx;$$

násobíce obě strany rovnice (12*b*) ξ^2 a kladouce pak na pravé straně $\xi(\xi_1-\xi_2) = -k(x_1-x_2)$ atd. nabýváme však rovnice

$$\xi^2 x' = \xi^2 \begin{vmatrix} \xi_1-\xi_2, & \xi_2-\xi_3 \\ \xi_2-\xi_3, & \xi_3-\xi_1 \end{vmatrix} = k^2 \begin{vmatrix} x_1-x_2, & x_2-x_3 \\ x_2-x_3, & x_3-x_1 \end{vmatrix} = k^2\xi'.$$

Dosadíme-li tu za x' hodnotu kx a za ξ' hodnotu ξx, obdržíme po zjednodušení $k=\xi$.

Tím rovnice pro $k(x_1-x_3)$, $k(x_2-x_1)$, $k(x_3-x_2)$ nabývají tvaru

(16) $\quad x_1-x_3=\xi_3-\xi_1,\quad x_2-x_1=\xi_1-\xi_2,\quad x_3-x_2=\xi_2-\xi_3.$

Připojme k tomu ještě. že z rovnice

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_3, & x_2 \\ x_3, & x_2, & x_1 \\ x_2, & x_1, & x_3 \end{vmatrix} = x\xi'$$

odvodíme dle známých vět o determinantech*), majíce zření ke vzorcům (14*a*), rovnice:

$$
(17)\qquad
\begin{aligned}
x_1\xi_1+x_3\xi_3+x_2\xi_2 &= \xi',\\
x_3\xi_1+x_2\xi_3+x_1\xi_2 &= 0,\\
x_2\xi_1+x_1\xi_3+x_3\xi_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Po těchto úvahách přistoupíme k řešení naší úlohy. Souřadnice bodu X v soustavě $B_1B_2B_3$ určíme nejlépe výrazy, ve kterých se vyskytují veličiny ξ_1, ξ_2, ξ_3, což se stane tímto způsobem: Násobme rovnice (15) po řadě x_1, x_2 a x_3 a sečtěme je pak; poněvadž $\xi x=\xi'$ a $xX = x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3$, obdržíme

*) Viz Baltzer-Pokorný: Základové mathematiky, díl I., str. 125.

$$\xi' X = (\xi_1 x_1 + \xi_3 x_2 + \xi_2 x_3) B_1 + (\xi_3 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_1 x_3) B_2 + (\xi_2 x_1 + \xi_1 x_2 + \xi_3 x_3) B_3.$$

Hodnota součinitele u B_1 se nezmění, odečteme-li od něho trojčlen $x_2\xi_1 + x_1\xi_3 + x_3\xi_2$, který dle třetí rovnice (17) se rovná nulle; tím však obdržíme pro tento součinitel výraz $(\xi_3 - \xi_1)(x_2 - x_1)$, a ten jest dle (16) roven $(\xi_3 - \xi_1)(\xi_1 - \xi_2)$. Podobně vyjádříme součinitele u B_2 a B_3; rovnice bodu X zní pak:

$$\xi' X = (\xi_3 - \xi_1)(\xi_1 - \xi_2) B_1 + (\xi_1 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_3) B_2 + (\xi_2 - \xi_3)(\xi_3 - \xi_1) B_3,$$

aneb, dělíce součinem $(\xi_1 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_3 - \xi_1)$ a kladouce

$$\frac{\xi'}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_3 - \xi_1)} = \xi'',$$

též

$$(18a)\qquad \xi'' X = \frac{1}{\xi_2 - \xi_3} B_1 + \frac{1}{\xi_3 - \xi_1} B_2 + \frac{1}{\xi_1 - \xi_2} B_3.$$

Nebude nesnadno, určiti podobným výpočtem souřadnice bodů Y a Z v této soustavě; rovnice těchto bodů budou:

$$(18b)\qquad \xi'' Y = \frac{1}{\xi_3 - \xi_1} B_1 + \frac{1}{\xi_1 - \xi_2} B_2 + \frac{1}{\xi_2 - \xi_3} B_3,$$

$$(18c)\qquad \xi'' Z = \frac{1}{\xi_1 - \xi_2} B_1 + \frac{1}{\xi_2 - \xi_3} B_2 + \frac{1}{\xi_3 - \xi_1} B_3.$$

Ustanovme ještě souřadnice bodů D_1, D_2, D_3 v soustavě $B_1 B_2 B_3$; pro bod $D_1 \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}\right)$ bude výpočet tento: Rovnice (15) násobme po řadě $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$, $\frac{1}{x_3}$, a sečtěme je; přihlížejíce k rovnici bodu D_1 (7c), obdržíme

$$\xi \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) D_1 = \left(\frac{\xi_1}{x_1} + \frac{\xi_3}{x_2} + \frac{\xi_2}{x_3}\right) B_1 + \left(\frac{\xi_3}{x_1} + \frac{\xi_2}{x_2} + \frac{\xi_1}{x_3}\right) B_2 + \left(\frac{\xi_2}{x_1} + \frac{\xi_1}{x_2} + \frac{\xi_3}{x_3}\right) B_3.$$

Příslušnou hodnotu součinitelů u B_1, B_2, B_3 vyhledáme, dělíce druhou z rovnic (17) po sobě součiny x_3x_1, x_1x_2, x_2x_3; tím vychází nejprve

$$\frac{\xi_1}{x_1}+\frac{\xi_3 x_2}{x_3 x_1}+\frac{\xi_2}{x_3}=0,$$

a z toho, připočteme-li na obou stranách $\frac{\xi_3}{x_2}$, dále

$$\frac{\xi_1}{x_1}+\frac{\xi_3}{x_2}+\frac{\xi_2}{x_3}=-\frac{\xi_3 x_2}{x_3 x_1}+\frac{\xi_3}{x_2}=\frac{\xi_3(x_3x_1-x_2^2)}{x_1x_2x_3}=\frac{\xi_3 x \xi_2}{x_1x_2x_3}.$$

Dělíme-li druhou rovnici (17) druhým a třetím z uvedených součinů, dostaneme podobně

$$\frac{\xi_3}{x_1}+\frac{\xi_2}{x_2}+\frac{\xi_1}{x_3}=\frac{x\xi_1\xi_3}{x_1x_2x_3},$$
$$\frac{\xi_2}{x_1}+\frac{\xi_1}{x_2}+\frac{\xi_3}{x_3}=\frac{x\xi_2\xi_1}{x_1x_2x_3}.$$

Sečtením těchto tří rovnic vychází, poněvadž $\xi_1+\xi_2+\xi_3=\xi$, rovnice

$$\xi\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=\frac{x}{x_1x_2x_3}(\xi_2\xi_3+\xi_3\xi_1+\xi_1\xi_2);$$

tudíž lze psáti hledanou rovnici bodu D_1, vynecháme-li na obou tranách činitel $\frac{x}{x_1x_2r_3}$, ve tvaru

$$(\xi_2\xi_3+\xi_3\xi_1+\xi_1\xi_2)\,D_1=\xi_2\xi_3B_1+\xi_3\xi_1B_2+\xi_1\xi_2B_3$$

aneb

$$(19a)\qquad \left(\frac{1}{\xi_1}+\frac{1}{\xi_2}+\frac{1}{\xi_3}\right)D_1=\frac{1}{\xi_1}B_1+\frac{1}{\xi_2}B_2+\frac{1}{\xi_3}B_3.$$

Týmž způsobem vyhledáme rovnice bodů D_2 a D_3, i obdržíme

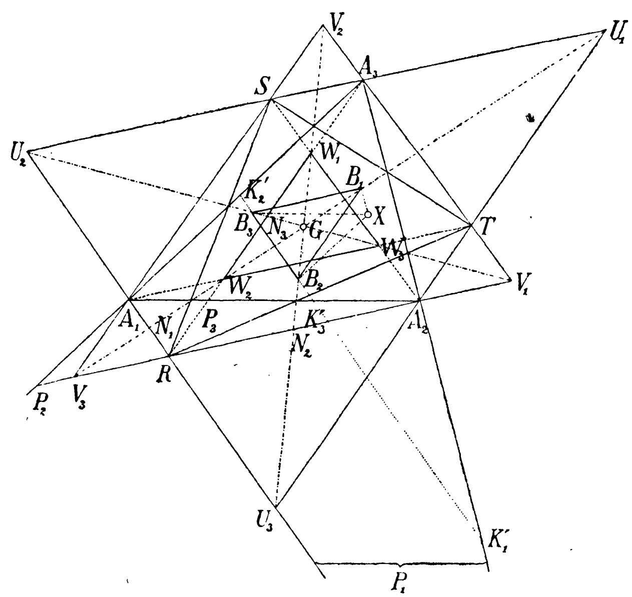
$$(19b)\qquad \left(\frac{1}{\xi_1}+\frac{1}{\xi_2}+\frac{1}{\xi_3}\right)D_2=\frac{1}{\xi_2}B_1+\frac{1}{\xi_3}B_2+\frac{1}{\xi_1}B_3,$$

$$(19c)\qquad \left(\frac{1}{\xi_1}+\frac{1}{\xi_2}+\frac{1}{\xi_3}\right)D_3=\frac{1}{\xi_3}B_1+\frac{1}{\xi_1}B_2+\frac{1}{\xi_2}B_3.$$

Výsledek, ku kterému jsme takto dospěli, můžeme vysloviti takto:

Rovnice bodů A_1, A_2, A_3, D_1, D_3, D_2 v soustavě $B_1B_2B_3$ obdržíme z rovnic bodů B_1, B_2, B_3, D_1, D_2, D_3 v soustavě $A_1A_2A_3$, položíme-li v rovnicích těch místo souřadnic x_1, x_2, x_3 bodu X souřadnice ξ_1, ξ_2, ξ_3 bodu R.

7. Než přikročíme k tomu, použiti tohoto výsledku k odvození nových vět, ukážeme, jak sestrojiti bod R. Stane se to způsobem, obdobným k sestrojení bodu X, použije-li se k němu bodů B_1, B_2, B_3. Bod X (obr. 6.) jest patrně průsečíkem tří



Obr. 6.

přímek, z nichž první jest vedena bodem B_1 rovnoběžně k straně A_2A_3, druhá bodem B_2 rovnoběžně k A_3A_1 a třetí bodem B_3 rovnoběžně k A_1A_2. Veďme nyní bodem A_1 rovnoběžku ku straně B_2B_3, bodem A_2 rovnoběžku k B_3B_1 a bodem A_3 rovnoběžku k B_1B_2; o těchto třech rovnoběžkách dokážeme, že procházejí týmž bodem R. Budiž P_1 průsečík první z těchto přímek se stranou A_2A_3, P_2 průsečík druhé s A_3A_1, P_3 průsečík třetí s A_1A_2; ustanovme nejprve poměry těchto bodů vzhledem k příslušným bodům základním. Pro bod P_1 užijeme dvou úměr, které plynou z toho, že přímka, vedená body B_2, B_3, jest rovnoběžná s přímkou A_1P_1, totiž

$$A_2P_1 : A_2A_1 = A_2K'_1 : A_2K'_3,$$
$$A_3P_1 : A_3A_1 = A_3K'_1 : A_3K'_2,$$

jsou-li body K'_1, K'_2, K'_3 průsečíky přímky B_2B_3 se stranami základními A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Dělíme-li stejnolehlé členy v těchto obou úměrách, obdržíme úměru, z níž plyne

$$\frac{A_2P_1}{A_3P_1} = \frac{A_2A_1}{A_3A_1} \frac{A_2K'_1}{A_3K'_1} : \frac{A_2K'_3}{A_3K'_2}$$

čili

$$\frac{A_2P_1}{P_1A_3} = \frac{A_1A_2}{K'_3A_2} \frac{A_2K'_1}{K'_1A_3} \frac{A_3K'_2}{A_3A_1}.$$

Rovnice průsečíků K'_1, K'_2, K'_3 určíme snadno z rovnic (5); položíme-li v nich za x_1, x_2, x_3 hodnoty souřadnic bodu B_2, totiž x_3, x_2, x_1 a za x'_1, x'_2, x'_3 hodnoty souřadnic bodu B_3, totiž x_2, x_1, x_3, dostaneme

$$(x_3 - x_2)\, K'_1 = (x_3x_1 - x_2^2)\, A_2 - (x_1x_2 - x_3^2)\, A_3,$$
$$(x_2 - x_1)\, K'_2 = -(x_3x_1 - x_2^2)\, A_1 + (x_2x_3 - x_1^2)\, A_3,$$
$$(x_1 - x_3)\, K'_3 = (x_1x_2 - x_3^2)\, A_1 - (x_2x_3 - x_1^2)\, A_2.$$

Z těchto rovnic ustanovíme snadno dle odd. 1. poměry

$$\frac{A_1A_2}{K'_3A_2} = -\frac{x_3 - x_1}{x_1x_2 - x_3^2}, \quad \frac{A_2K'_1}{K'_1A_3} = -\frac{x_1x_2 - x_3^2}{x_3x_1 - x_2^2}, \quad \frac{A_3K'_2}{A_3A_1} = \frac{x_3x_1 - x_2^2}{x_1 - x_2};$$

tudíž

$$\frac{A_2P_1}{P_1A_3} = \frac{x_3 - x_1}{x_1 - x_2}.$$

Podobně vyhledáme

$$\frac{A_3P_2}{P_2A_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3}, \qquad \frac{A_1P_3}{P_3A_2} = \frac{x_2 - x_3}{x_3 - x_1}.$$

Z těchto rovnic vychází bezprostředně, že

$$\frac{A_2P_1}{P_1A_3} \cdot \frac{A_3P_2}{P_2A_1} \cdot \frac{A_1P_3}{P_3A_2} = 1;$$

sekou se tudíž příčky A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3 v jediném bodě R. Souřadnice toho bodu r_1, r_2, r_3 vypočítáme dle (3a), položíme-li tu za $p_2:p_3$ hodnotu $(x_3-x_1):(x_1-x_2)$ a za $q_3:q_1$ hodnotu $(x_1-x_2):(x_2-x_3)$; tím dostaneme

$$r_1:r_2:r_3=(x_1-x_2)(x_3-x_1):(x_2-x_3)(x_1-x_2):(x_3-x_1)(x_2-x_3).$$

I jest rovnice bodu R

$$(21a)\qquad rR=\frac{1}{x_2-x_3}A_1+\frac{1}{x_3-x_1}A_2+\frac{1}{x_1-x_2}A_3$$
$$\left(r=\frac{1}{x_2-x_3}+\frac{1}{x_3-x_1}+\frac{1}{x_1-x_2}\right).$$

Body základními A_1, A_2, A_3 lze vésti rovnoběžky ještě k ostatním stranám trojúhelníka $B_1B_2B_3$; celkem procházejí tedy každým z těchto bodů tři rovnoběžky. Vzájemným průsekem jich vznikají kromě bodu R další body, z nichž vytkneme nejprve ty, které jsou jako bod R společným průsečíkem tří z těchto devíti rovnoběžek. Jsou to: bod S, který jest průsečíkem rovnoběžky vedené bodem A_1 ku straně B_1B_2, rovnoběžky vedené bodem A_2 ku B_2B_3 a rovnoběžky vedené bodem A_3 ku B_3B_1; pak bod T, který jest průsečíkem rovnoběžky sestrojené bodem A_1 ku B_3B_1, rovnoběžky sestrojené bodem A_2 ku B_1B_2 a rovnoběžky sestrojené bodem A_3 ku B_2B_3.

Rovnice těchto bodů S a T ustanovíme podobně, jako jsme právě vyhledali rovnici bodu R; i obdržíme:

$$(21b)\qquad rS=\frac{1}{x_3-x_1}A_1+\frac{1}{x_1-x_2}A_2+\frac{1}{x_2-x_3}A_3,$$

$$(21c)\qquad rT=\frac{1}{x_1-x_2}A_1+\frac{1}{x_2-x_3}A_2+\frac{1}{x_3-x_1}A_3.$$

Označíme-li X_∞ $(x_2-x_3,\ x_3-x_1,\ x_1-x_2)$ bod přidružený v nekonečnu k bodu X, jest patrně bod R jeho bod reciproký a body S a T jsou jeho body brocardské.

Srovnáme-li rovnice (21) bodů R, S a T v soustavě $A_1A_2A_3$ s rovnicemi (18) bodů X, Y, Z v soustavě $B_1B_2B_3$, poznáváme, že tyto dvě trojice bodů sobě přísluší v tom smyslu, v jakém jsou k sobě přidruženy obě skupiny bodů, vytčené ke konci oddílu 6. Tato souvislost bodů A_1, A_2, A_3, D_1, D_3, D_2, X, Y,

Z, G s body B_1, B_2, B_3, D_1, D_2, D_3, R, S, T, G dovoluje nám jisté věty, týkající se některých bodů jedné skupiny, tvrditi bezprostředně o příslušných bodech skupiny druhé; důkaz takové nové věty by byl úplně totožný s důkazem věty původní, jenom by bylo třeba nahraditi v něm souřadnice ξ_1, ξ_2, ξ_3 souřadnicemi x_1, x_2, x_3 nebo naopak.

Tak jsme na př. v oddíle 4. dokázali, že příčky A_iG $(i=1,2,3)$ procházejí středy úseček B_iX (obr. 3.); i můžeme dle toho tvrditi, že též příčky B_iG $(i=1, 2, 3)$ procházejí středy N_i úseček A_iR (obr. 6.).

Jiný příklad takové přiřaděnosti vět podáme v oddíle následujícím.

8. O bodech B_1, B_2, B_3, D_2, D_3, X tvrdí Caspary, *že leží na kuželosečce.* Důkaz provedeme pomocí věty Pascalovy. Dle této věty musí se protější strany šestiúhelníka, jehož vrcholy jsou uvedené body, protínati ve třech bodech, ležících na téže přímce. Jsou to body: průsečík M_1 přímek B_1B_2 a D_2D_3; průsečík M_2 stran B_2B_3 a D_3X a průsečík M_3 stran B_3D_2 a XB_1. Barycentrické souřadnice těchto tří bodů v soustavě $B_1B_2B_3$ ustanovíme snadno jednak dle rovnic (5), jednak dle rovnice (4). Položíme-li v rovnici (5c) za x_1, x_2, x_3 po řadě $\frac{1}{\xi_2}$, $\frac{1}{\xi_3}$, $\frac{1}{\xi_1}$ a za x'_1, x'_2, x'_3 po řadě $\frac{1}{\xi_3}$, $\frac{1}{\xi_1}$ a $\frac{1}{\xi_2}$ a vyměníme-li za základní body A_1, A_2, A_3 body B_1, B_2, B_3, obdržíme rovnici bodu M_1, totiž

$$\mu'_1 M_1 = \left(\frac{1}{\xi_3\xi_1} - \frac{1}{\xi_2^2}\right) B_1 - \left(\frac{1}{\xi_2\xi_3} - \frac{1}{\xi_1^2}\right) B_2$$

aneb, provedeme-li v závorkách a násobíme-li $\xi_1\xi_2\xi_3$, též

$$\mu_1 M_1 = -\frac{\xi_3\xi_1 - \xi_2^2}{\xi_2} B_1 + \frac{\xi_2\xi_3 - \xi_1^2}{\xi_1} B_2,$$

kde $\mu_1 = \mu'_1\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3$.

Podobně vložme v rovnici (5a) za x_1, x_2, x_3 hodnoty $\frac{1}{\xi_3}$, $\frac{1}{\xi_1}$, $\frac{1}{\xi_2}$ a za x'_1, x'_2, x'_3 hodnoty $\frac{1}{\xi_2 - \xi_3}$, $\frac{1}{\xi_3 - \xi_1}$, $\frac{1}{\xi_1 - \xi_2}$;

rovnice bodu M_2 jest pak

$$\mu'_2 M_2 = \left(\frac{1}{\xi_3(\xi_3-\xi_1)} - \frac{1}{\xi_1(\xi_2-\xi_3)}\right) B_2 - \left(\frac{1}{\xi_2(\xi_2-\xi_3)} - \frac{1}{\xi_3(\xi_1-\xi_2)}\right) B_3.$$

Upravíme-li v závorkách a násobíme-li součinem $\xi_3(\xi_1-\xi_2)$ $(\xi_2-\xi_3)(\xi_3-\xi_1)$, dostaneme

$$\mu_2 M_2 = \frac{\xi_1\xi_2-\xi_3^2}{\xi_1}(\xi_1-\xi_2) B_2 - \frac{\xi_3\xi_1-\xi_2^2}{\xi_2}(\xi_3-\xi_1) B_3,$$

kde $\mu_2 = \mu'_2\,\xi_3(\xi_1-\xi_2)(\xi_2-\xi_3)(\xi_3-\xi_1)$.

Konečně položme v rovnici (4) za x_1, x_2, x_3 hodnoty 0, 0, 1, za x'_1, x'_2, x'_3 hodnoty $\frac{1}{\xi_2}$, $\frac{1}{\xi_3}$, $\frac{1}{\xi_1}$, za y_1, y_2, y_3 hodnoty $\frac{1}{\xi_2-\xi_3}$, $\frac{1}{\xi_3-\xi_1}$, $\frac{1}{\xi_1-\xi_2}$, za y'_1, y'_2, y'_3 hodnoty 1, 0, 0; tím nabudeme

$$\mu'_3 M_3 = \frac{1}{\xi_2(\xi_3-\xi_1)} B_1 + \frac{1}{\xi_3(\xi_3-\xi_1)} B_2 + \frac{1}{\xi_3(\xi_1-\xi_2)} B_3,$$

aneb násobíme-li $(\xi_3-\xi_1)(\xi_1-\xi_2)$, též

$$\mu_3 M_3 = \frac{\xi_1-\xi_2}{\xi_2} B_1 + \frac{\xi_1-\xi_2}{\xi_3} B_2 + \frac{\xi_3-\xi_1}{\xi_3} B_3,$$

kde $\mu_3 = \mu'_3(\xi_3-\xi_1)(\xi_1-\xi_2)$.

Násobíme-li rovnici bodu M_1 rozdílem $\xi_1-\xi_2$, rovnici bodu M_2 zlomkem $\frac{\xi_2}{\xi_3}$ a rovnici bodu M_3 výrazem $\xi_3\xi_1-\xi_2^2$, a sečteme-li pak všechny tři rovnice, obdržíme, majíce na pravé straně při upravení součinitele u bodu B_2 zření ku třetí rovnici (17), rovnici

$$\mu_1(\xi_1-\xi_2) M_1 + \mu_2\frac{\xi_2}{\xi_3} M_2 + \mu_3(\xi_3\xi_1-\xi_2^2) M_3 = 0,$$

t. j. body M_1, M_2, M_3 leží na téže přímce Pascalově.

Podobně lze dokázati, že body B_1, B_2, B_3, D_2, D_1, Y leží na kuželosečce, jakož i že na jiné kuželosečce jsou položeny body B_1, B_2, B_3, D_3, D_1, Z.

Dle předcházejícího můžeme nyní bez důkazu vysloviti větu: *Body* A_1, A_2, A_3, D_3, D_2, R *leží na kuželosečce*; podobné věty platí o bodech A_1, A_2, A_3, D_3, D_1, S a o bodech A_1, A_2, A_3, D_2, D_1, T.

9. Zmíněnými v odd. 7. rovnoběžkami, sestrojenými body A_1, A_2, A_3 ke stranám trojúhelníka $B_1 B_2 B_3$ vznikají kromě bodů R, S, T ještě jiné body (obr. 6.); rozvrhněme je ve tři skupiny po třech. V první skupině buďtež:

průsečík U_1 přímek $A_2 T$ a $A_3 S$,
„ U_2 „ $A_3 S$ a $A_1 R$,
„ U_3 „ $A_1 R$ a $A_2 T$.

Souřadnice těchto bodů vyhledáme pomocí rovnice (4), položíme-li v ní za x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3 atd. jednou hodnoty souřadnic bodů A_2, T atd., po druhé hodnoty souřadnic bodů A_3, S atd., po třetí hodnoty souřadnic bodů A_1, R atd. Tak obdržíme na př. pro bod U_1 rovnici

$$u_1 U_1 = \begin{vmatrix} 0, & 0, & \dfrac{1}{x_3 - x_1} \\ \dfrac{1}{x_1 - x_2}, & 0, & \dfrac{1}{x_1 - x_2} \\ 0, & 1, & \dfrac{1}{x_2 - x_3} \end{vmatrix} A_1 - \begin{vmatrix} \dfrac{1}{x_1 - x_2}, & 0, & \dfrac{1}{x_3 - x_1} \\ 0, & 0, & \dfrac{1}{x_1 - x_2} \\ \dfrac{1}{x_3 - x_1}, & 0, & \dfrac{1}{x_2 - x_3} \end{vmatrix} A_2$$

$$+ \begin{vmatrix} 0, & 0, & \dfrac{1}{x_3 - x_1} \\ \dfrac{1}{x_3 - x_1}, & 0, & \dfrac{1}{x_1 - x_2} \\ 0, & 1, & \dfrac{1}{x_2 - x_3} \end{vmatrix} A_3$$

čili

$$u_1 U_1 = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_1)} A_1 + \frac{1}{(x_1 - x_2)^2} A_2 + \frac{1}{(x_3 - x_1)^2} A_3 .$$

Rovnici té lze dáti ještě jiný tvar, násobíme-li obě strany její součinem $(x_1 - x_2)^2 (x_3 - x_1)^2$, totiž:

$$(-\xi') U_1 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_1) A_1 + (x_3 - x_1)^2 A_2 + (x_1 - x_2)^2 A_3,$$

kde součinitel na levé straně má, jak se snadno přesvědčíme, záporně vzatou hodnotu determinantu ξ' [viz rovnici (12 a)].

Podobně jest

$$(22)\quad \begin{aligned} -\xi' U_2 &= (x_1 - x_2)^2 A_1 + (x_3 - x_1)(x_1 - x_2) A_2 \\ &\quad + (x_3 - x_1)^2 A_3 \\ \text{a} \qquad -\xi' U_3 &= (x_3 - x_1)^2 A_1 + (x_1 - x_2) A_2 \\ &\quad + (x_1 - x_2)(x_3 - x_1) A_3 . \end{aligned}$$

Ve druhé skupině nalézají se body:

průsečík V_1 přímek $A_2 R$ a $A_3 T$,
„ V_2 „ $A_3 T$ a $A_1 S$,
„ V_3 „ $A_1 S$ a $A_2 R$;

rovnice jejich jsou:

$$(23)\quad \begin{aligned} -\xi' V_1 &= (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) A_1 + (x_1 - x_2)^2 A_2 \\ &\quad + (x_2 - x_3)^2 A_3 , \\ -\xi' V_2 &= (x_2 - x_3)^2 A_1 + (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) A_2 \\ &\quad + (x_1 - x_2)^2 A_3 , \\ -\xi' V_3 &= (x_1 - x_2)^2 A_1 + (x_2 - x_3)^2 A_2 \\ &\quad + (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) A_3 . \end{aligned}$$

Konečně zbývají ve třetí skupině body:

průsečík W_1 přímek $A_2 S$ a $A_3 R$,
„ W_2 „ $A_3 R$ a $A_1 T$,
„ W_3 „ $A_1 T$ a $A_2 S$;

rovnice těchto bodů jsou:

$$(24)\quad \begin{aligned} -\xi' W_1 &= (x_2 - x_3)(x_3 - x_1) A_1 + (x_2 - x_3)^2 A_2 \\ &\quad + (x_3 - x_1)^2 A_3 , \\ -\xi' W_2 &= (x_3 - x_1)^2 A_1 + (x_3 - x_1)(x_2 - x_3) A_2 \\ &\quad + (x_2 - x_3)^2 A_3 , \\ -\xi' W_3 &= (x_2 - x_3)^2 A_1 + (x_3 - x_1)^2 A_2 \\ &\quad + (x_3 - x_1)(x_2 - x_3) A_3 . \end{aligned}$$

Z rovnic (22), (23) a (24) jde, že

$$U_1 + U_2 + U_3 = V_1 + V_2 + V_3 = W_1 + W_2 + W_3 = A_1 + A_2 + A_3 ,$$

t. j. trojúhelníky $U_1 U_2 U_3$, $V_1 V_2 V_3$ a $W_1 W_2 W_3$ mají s trojúhelníkem základním týž střed hmotný G.

Trojúhelníky ty mají, jak ze sestrojení jejich vysvítá, strany vzájemně i se stranami trojúhelníka $B_1 B_2 B_3$ rovnoběžné; na př.: $U_2 U_3 \parallel V_2 V_1 \parallel W_1 W_3 \parallel B_3 B_2$ atd. Musí tedy i mediany jejich býti navzájem rovnoběžny; poněvadž pak všechny tyto mediany procházejí týmž středem hmotným G, splývají vždy příslušné čtyři z nich v jedinou přímku. Jednou z těchto přímek jest $U_1 V_3$, druhou $V_2 U_3$, třetí $U_2 V_1$. Leží tedy na př. bod U_1, střed strany $V_2 V_1$, bod B_1, střed strany $W_1 W_3$, střed strany $B_3 B_2$, bod W_2, střed strany $U_2 U_3$ i bod V_3 vesměs na téže přímce $U_1 V_3$; můžeme též snadno dokázati, že prochází tato přímka též průsečíkem stran $A_2 A_3$ a ST jakož i průsečíkem stran $A_1 A_2$ a SR. (Dokončení.)

Jak třeba zvoliti vazby a síly, aby soustava jimi daná dala se realisovati.

Napsal

Arnošt Dittrich v Praze.

(Pokračování.)

§ 3. *Věta druhá.* Věta druhá praví, že síly zevní závisí pouze na souřadnicích. Síla X_ν, Y_ν, Z_ν na ν-tý bod působící závisí na souřadnicích x, y, z všech bodů soustavy.

Tuto větu uvedeme ve spojení s tím, že vazby dle věty prvé nezávisí na čase. Další úvahy provedeny nejprve v souřadnicích Descartesových, pak v Lagrange-ových.

1. *v souřadnicích Descartesových.* Z d'Alembertova principu plyne, že differencialním rovnicím pohyb soustavy určujícím lze dáti tvar

$$\begin{aligned} m_\nu x_\nu'' &= X_\nu + \sum_1^p {}^\pi \lambda_\pi \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial x_\nu}, \\ m_\nu y_\nu'' &= Y_\nu + \sum_1^p {}^\pi \lambda_\pi \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial y_\nu}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n. \qquad (8) \\ m_\nu z_\nu'' &= Z_\nu + \sum_1^p {}^\pi \lambda_\pi \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial z_\nu}. \end{aligned}$$