Josef Koch

Stanovení polohy těžiště tuhých ploch a těles

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 20 (1891), No. 4, 183--202

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122571`

Mimo to podniknuty též pokusy, zdali by nebylo možno nahraditi při elektrometru tom váhy zařízením podobným Nicholsonovu hustoměru, jež by svou kompendiosností zajisté se doporučovalo; na ten čas však pro zevnější překážky od dalších pokusů bylo upustiti.

Na konec podávám malý diagram, který možná že mnohým bude vhod, znázorňující souvislosť rozdílu potenciálového v intervalech 10 jednotek elektrostatických (osa Y) s distancí explosivní elektrické jiskry (osa X) mezi dvěma kuličkami o průměru 1 *cm* od 1—22 *mm*, sestrojený dle číselných výsledků Bichata a Blondlota (obr. 2.).

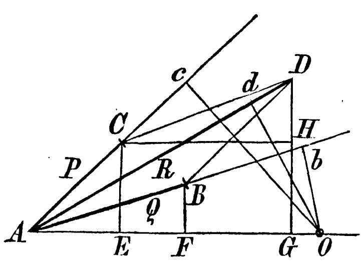
Stanovení polohy těžiště tuhých ploch a těles.

Žákům středních škol píše

Jos. Koch,

professor v Praze.

Nejkratší vzdálenosť směru síly od bodu mimo směr síly ležícího zove se ramenem síly, součin z velikosti síly a jejího ramene nazývá se statickým momentem neb momentem síly, a bod, s něhož kolmice na směr síly spuštěna slove „středem“.



Obr. 1.

Buďtež AC a AB poměrné velikosti sil P a Q, bod A společné jejich působiště a AD = R poměrná velikost výslednice sil těchto. Je-li bod O středem, ramena sil těchto: $Oc = p$, $Ob = q$ a $Od = r$ (obr. 1.) a promítají-li se síly tyto na směr přímky AO [$AE = p(P)$, $AF = p(Q)$ a $AG = p(R)$], jest:

$\triangle ACE \sim \triangle AOc$, $\triangle ABF \sim \triangle AOb$ a $\triangle ADG \sim \triangle AOd$.

Z podobnosti této jde:

$$P : OA = CE : p, \quad Q : OA = BF : q, \quad R : OA = DG : r$$

čili

$$Pp = OA \,.\, CE, \quad Qq = OA \,.\, BF, \quad Rr = OA \,.\, DG,$$

tedy

$$Pp + Qq = OA\,(CE + BF).$$

Spustí-li se s bodu C kolmice na DG ($CH \perp DG$), jest

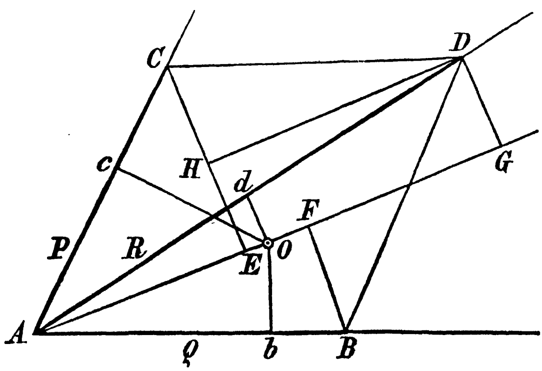
$$\triangle CDH \cong \triangle ABF,$$

proto

$$DH = BF, \text{ a } CE + BF = HG + DH = DG;$$

tím

$$Pp + Qq = OA \,.\, DG = Rr.$$



Obr. 2.

Leží-li střed O mezi složkami P a Q, obdržíme z těchže příčin (obr. 2.):

$$Pp = AO \,.\, CE, \quad Qq = AO \,.\, BF, \quad Rr = AO \,.\, DG$$

a proto

$$Pp - Qq = AO\,(CE - BF).$$

Spustí-li se s bodu D kolmice na CE ($DH \perp CE$), jest

$$\triangle CDH \cong \triangle ABF,$$

tím

$$CH = BF, \quad HE = DG.$$

I jest:

$$CE - BF = CE - CH = HE = DG$$

a proto

$$Pp - Qq = AO \,.\, DG = Rr$$

čili

$$Pp + (-Qq) = Rr.$$

Platí tedy pro každou polohu středu O, vyjímaje směr výslednice:

$$Pp \pm Qq = Rr.$$

Z rovnice této vysvítá, že statické momenty dvou sil jsou buď stejného buď protivného označení a sice dle souhlasného neb protivného směru otáčení sil těchto kolem středu.

Leží-li však střed ve směru výslednice, jest $r = 0$ a proto

$$Pp = Qq \quad \text{čili} \quad P : Q = q : p,$$

t. j. statické momenty složek jsou sobě rovny aneb složky jsou v nepřímém poměru svých ramen.

Přibeře-li se ku silám P a Q síla S, jejíž rameno délky s a spojí-li se síla tato s výslednicí R sil P a Q, obdrží se, je-li V výslednice sil R a S, a rameno její délky v, dle předcházejícího:

$$Rr + Ss = Vv$$

čili

$$Pp + Qq + Ss = Vv \text{ atd.}$$

a proto: jsou-li dány síly: $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$ se svými rameny $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$ a je-li výslednice těchto sil V a rameno její délky v, jest

$$P_1p_1 + P_2p_2 + P_3p_3 + P_4p_4 + \ldots = Vv$$

čili

$$Vv = \Sigma Pp,$$

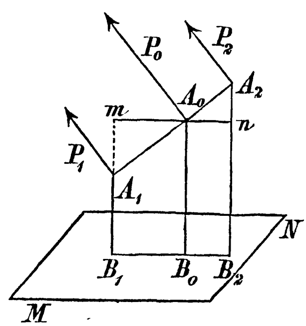
t. j. pro každý bod (střed), jenž leží v rovině sil, jest statický moment výslednice dvou aneb několika sil roven algebraickému součtu statických momentů složek a je-li střed ve směru výslednice, jest $\Sigma Pp = 0$. (Poučka Varignonova).

Z toho vysvítá:

1. Statický moment síly vyjadřuje velikostí svou rovnomocnou sílu, jejíž rameno jest rovno jedničce a jest mírou otáčení síly kolem pevného bodu (středu).

2. Těleso kolem pevného bodu otáčivé jest v rovnováze, je-li algebraický součet statických momentů všech složek, hledíc k tomuto středu, roven nule.

I při silách rovnoběžných, jejichž výslednice se rovná algebraickému součtu neb rozdílu složek, zove se nejkratší vzdálenosť působiště síly od pevné roviny ramenem síly a součin z velikosti síly a jejího ramene statickým momentem — rovina, od níž se měří vzdálenosť tato „rovinou momentů".



Obr. 3.

Jsou-li P_1, P_2 dvě síly rovnoběžné a stejnosměrné, Po jejich výslednicí, $A_1B_1 = p_1$, $A_2B_2 = p_2$ a $A_0B_0 = p_0$ ramena těchto sil hledíc ku rovině momentů MN (obr. 3.), jest

$$(1) \qquad P_1 : P_2 = A_0A_2 : A_0A_1.$$

Vede-li se bodem A_0 přímka $mn \parallel B_1B_2$, jest

$$\triangle A_1A_0m \sim \triangle A_2A_0n$$

a proto

$$(2) \qquad A_0A_2 : A_0A_1 = A_2n : A_1m = (p_2 - p_0) : (p_0 - p_1).$$

Z prvé a druhé úměry pak plyne:

$$P_1 : P_2 = (p_2 - p_0) : (p_0 - p_1)$$

čili
$$P_1 (p_0 - p_1) = P_2 (p_2 - p_0)$$

neb
$$(P_1 + P_2) p_0 = P_1 p_1 + P_2 p_2, \text{ a ježto } P_1 + P_2 = P_0,$$
$$P_0 p_0 = P_1 p_1 + P_2 p_2.$$

Je-li P_0 výslednicí sil P_1, P_2, P_3 a jsou-li ramena sil těchto p_0, p_1, p_2, p_3, platí obdobně:

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 = P_0 p_0 \text{ a t. d,}$$

tedy obecně: Pro každou rovinu momentů jest statický moment výslednice dvou aneb několika sil rovnoběžných a stejnosměrných roven algebraickému součtu statických momentů všech složek — tedy $P_0 p_0 = \Sigma Pp$.

Leží-li střed rovnoběžných sil v rovině momentů, jest $p_0 = 0$ a proto $P_0 p_0 = \Sigma Pp = 0$ t. j. součet statických momentů všech složek $= 0$.

Jsou-li dvě síly rovnoběžné avšak směru protivného, jest výslednice jejich rovna algebraickému rozdílu obou složek a moment výslednice roven algebraickému rozdílu statických momentů obou složek.

Každá molekula toho kterého tělesa přitahována jest všemi molekulami země. Síla, kterouž molekula tato zemí jest přitahována, jest tedy výslednice všech sil, jimiž jednotlivé molekuly země molekulu tělesa přitahují. Je-li naše země stejnorodou koulí, leží molekuly země souměrně kolem průměru, vedeného bodem přitahovaným — má proto výslednice směr tohoto průměru. Co platí o jedné molekule tělesa, platí též o molekulách ostatních, i jest tedy působiště výslednice všech sil těžných čili působiště síly těžné průsečík dvou průměrů, totiž střed země. Z toho i jasno, že lze hmotu země si mysliti soustředěnou ve středu jejím.

Těleso každé složeno jest z neskonale velikého množství molekul, z nichž jedna každá směrem svislým a to stejnou silou zemí jest přitahována — jest tedy prostá váha tělesa výslednice neskonale velikého množství rovnoběžných sil svislých a proto rovna jich algebraickému součtu. Střed těchto rovnoběžných sil čili působiště výslednice rovnoběžných sil těžných zove se těžiště. Každá přímka těžištěm vedená slove těžná přímka a každá rovina těžištěm položena „těžná rovina“ — svislá přímka těžná nazývá se čára řídící či direkční.

Jelikož těžiště střed rovnoběžných sil těžných, jest zřejmo, že věty o statických momentech rovnoběžných a stejnosměrných sil platí i zde a to:

1. Je-li stejnoměrné těleso souměrné vzhledem ku přímce aneb rovině, leží těžiště jeho buď na přímce buď na rovině této, ježto součet statických momentů všech rovnoběžných sil těžných hledíc ku této přímce neb rovině roven jest nule.

2. Složeno-li těleso, jehož prostá váha P_0, z několika částí, jejichž prosté váhy jsou P_1, P_2, P_3, P_4 ... a jsou-li vzdálenosti těžiště tělesa a jeho částí od roviny momentů: p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 ..., platí

$$P_0 p_0 = P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + P_4 p_4 + \ldots;$$

$P = O\,.\,m$, když O objem a m měrná váha, proto

$$O_0 m_0 = O_1 m_1 + O_2 m_2 + O_3 m_3 + O_4 m_4 + \ldots;$$

tím jest

$$p_0 [O_1 m_1 + O_2 m_2 + O_3 m_3 + \ldots] = O_1 m_1 p_1 + O_2 m_2 p_2 + O_3 m_3 p_3 + \ldots$$

a ježto těleso stejnoměrné, jest $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = \ldots$ a tím

$$p_0 [O_1 + O_2 + O_3 + O_4 + \ldots] = O_1 p_1 + O_2 p_2 + O_3 p_3 + P_4 p_4 + \ldots$$

Poněvadž však $O_1 + O_2 + O_3 + O_4 + \ldots = O_0$, jest

$$O_0 p_0 = O_1 p_1 + O_2 p_2 + O_3 p_3 + O_4 p_4 + \ldots = \Sigma O p\,,$$

t. j. u těles stejnoměrných lze za prosté váhy substituovati jejich objemy a ježto tenké hmotné tyče t. j. tělesa, při nichž šířka i tlouštka nepatrna vzhledem ku délce, lze pokládati za přímky a tenké desky t. j. tělesa, při nichž tlouštka u srovnání s délkou i šířkou nepatrna, lze míti za plochy, jest patrno, že lze za váhy hmotných ploch a přímek substituovati buď plochy buď délky jejich a proto stanoviti polohu těžiště tuhých ploch a přímek.

Po krátkém tomto avšak důležitém úvodu, přistoupíme ku stanovení polohy tuhých ploch a těles.

1. Těžiště přímky.

Rozdělí-li se přímka, jejíž délka a, na n částí neskonale malých délky δ, jsou vzdálenosti částí těchto od počátečního bodu přímky $\frac{a}{n}$, $\frac{2a}{n}$, $\frac{3a}{n}$, $\frac{4a}{n}\ldots$ a proto, je-li vzdálenosť těžiště přímky od téhož bodu x, jest:

$$ax = \delta \, . \, \frac{a}{n} + \delta \, . \, \frac{2a}{n} + \delta \, . \, \frac{3a}{n} + \delta \, . \, \frac{4a}{n} + \ldots,$$

t. j. moment výslednice rovná se algebraickému součtu momentů všech složek.

Vyjme-li se $\frac{a\delta}{n}$ jakožto společný činitel výrazu po pravé straně rovnice a dělí-li se tato veličinou a, obdržíme:

$$x = \frac{\delta}{n}(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n) = \frac{\delta(n+1)}{2},$$

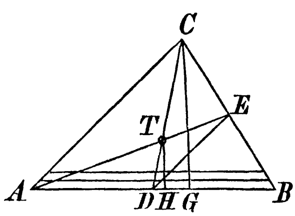
a ježto n neskonale veliké, lze za $1 + n$ položiti n a tím jest

$$x = \frac{\delta n}{2} = \frac{a}{2},$$

t. j. těžiště přímky délky a jest od počátečního bodu přímky této u vzdálenosti $\frac{a}{2}$ čili těžiště přímky jest ve středu jejím.

2. Těžiště trojúhelníka.

Rozdělí-li se $\triangle$ ABC (obr. 4.) přímkami ku AB rovnoběžnými na neskonale veliké množství rovnoběžných lichoběžníků



Obr. 4.

o výšce neskonale malé, lze proužky tyto míti za přímky. Těžiště každé přímky této jest ve středu jejím a proto těžiště všech a tím i těžiště trojúhelníka jest na přímce CD, jež spojuje vrchol trojúhelníka C se středem strany AB — jest tedy CD těžná přímka (mediana) trojúhelníka ABC.

Rozpolí-li se strana BC a rozdělí-li se trojúhelník též přímkami ku BC rovnoběžnými na neskonale veliké množství lichoběžníků o neskonale malé výšce, jest i AE těžná přímka a proto průsečík obou těžných přímek CD a AE — bod T — jest těžištěm trojúhelníka.

Spojí-li se středy stran AB a CB totiž body D a E vespolek, jest $\triangle ACT \sim \triangle DET$ a proto:

$$DT : DE = CT : AC$$

avšak

$$ED = \frac{AC}{2}, \text{ neboť } ED : AC = DB : AB = 1 : 2$$

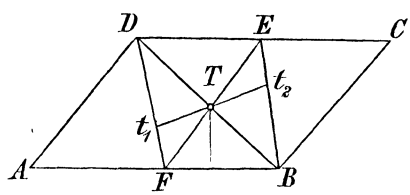
tím

$$DT = \frac{CT}{2} \text{ t. j. } DT = \frac{CD}{3}.$$

Jeli výška trojúhelníka $CG = v$, jest pak $TH = \frac{v}{3}$, t j. těžiště trojúhelníka jest na přímce spojující střed podstavy s protějším vrcholem trojúhelníka a vzdálenosť jeho od podstavy rovná se třetině výšky.

3. Těžiště rovnoběžníka.

Přímka EF spojující středy rovnoběžných podstav rovnoběžníka ABCD (obr. 5.) jest těžná přímka.



Obr. 5.

Rozdělí-li se rovnoběžník úhlopříčkou BD ve dva trojúhelníky a spojí-li se těžiště jejich t_1 a t_2 vespolek, jest i přímka $t_1 t_2$ těžnou přímkou a proto průsečík obou, bod T jest těžiště rovnoběžníka.

Jsou-li P_0, P_1 a P_2 plochy rovnoběžníka a obou trojúhelníků —, x, p_1 a p_2 vzdálenosti těžišť jejich od podstavy $AB = a$, jest:

$$P_0 x = P_1 p_1 + P_2 p_2 \quad \text{a proto} \quad x = \frac{P_1 p_1 + P_2 p_2}{P_0}.$$

Nyní jest

$$P_0 = av, \quad P_1 = \frac{av}{2} = P_2,$$

když v výška rovnoběžníka a

$$p_1 = \frac{v}{3}, \quad p_2 = \frac{2v}{3};$$

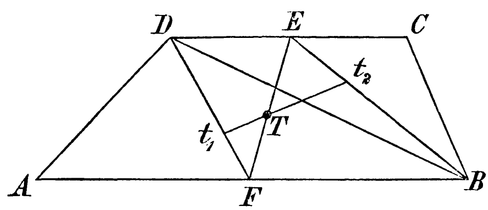
tím

$$x = \frac{\frac{av}{2}\left[\frac{v}{3} + \frac{2v}{3}\right]}{av} = \frac{v}{2},$$

t. j. těžiště rovnoběžníka jest na přímce spojující středy dvou protilehlých stran rovnoběžných a vzdálenosť jeho od podstavy rovná se polovině výšky.

4. Těžiště lichoběžníka.

Přímka EF spojující středy rovnoběžných stran lichoběžníka ABCD (obr. 6.) jest těžná přímka. Vede-li se úhlopříčka



Obr. 6.

DB a stanoví-li se těžiště trojúhelníků ABD a BCD, jest i přímka $t_1 t_2$ spojující těžiště trojúhelníků těchto těžnou přímkou a proto průsečík obou — bod T — jest těžiště lichoběžníka.

Jsou-li P_0, P_1 a P_2 plochy lichoběžníka a obou trojúhelníků, — x, p_1 a p_2 vzdálenosti těžišť jejich od podstavy $AB = a$, jest

$$P_0 x = P_1 p_1 + P_2 p_2$$

a tím

$$x = \frac{P_1 p_1 + P_2 p_2}{P_0}.$$

Nyní jest

$$P_0 = \frac{a+b}{2} v, \quad P_1 = \frac{av}{2}, \quad P_2 = \frac{bv}{2}, \quad p_1 = \frac{v}{3}, \quad p_2 = \frac{2v}{3},$$

když v výška lichoběžníka a $CD = b$; tím

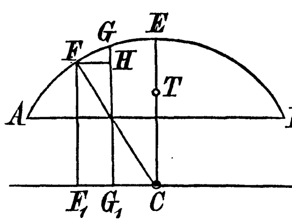
$$x = \frac{\frac{av}{2} \cdot \frac{v}{3} + \frac{bv}{2} \cdot \frac{2v}{3}}{\frac{a+b}{2} \cdot v} = \frac{v}{3} \frac{a+2b}{a+b},$$

t. j. těžiště lichoběžníka jest na přímce spojující středy rovnoběžných stran a vzdálenost jeho od podstavy AB rovná se

$$\frac{v}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b}.$$

5. Těžiště oblouku kruhového.

Budiž oblouk $AEB = a$ a tětiva jeho $AB = t$, $CE = r$ poloměr kruhu a vzdálenosť těžiště T od středu kruhu C rovná x (obr. 7.).



Obr. 7.

Rozdělí-li se oblouk na neskonale malé části α_1, α_2, α_3 α_4 ..,., a jsou-li vzdálenosti částí těchto od roviny momentů procházející středem kruhu C a kolmé ku CE: b_1, b_2, b_3, b_4 ..., jest

$$ax = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \alpha_4 b_4 + \ldots = \Sigma \alpha b.$$

Je-li $FG = \alpha$ libovolná část oblouku toho a průmět části této $F_1 G_1 = FH = p$, jest $\triangle FGH \sim \triangle FF_1C$ a proto

$$\alpha : p = r : b, \text{ když } FF_1 = b$$

t. j. $$ab = r \cdot p \text{ a tím } ax = \Sigma rp = r\Sigma p$$

a ježto $$\Sigma p = t, \text{ jest } ax = rt \text{ a } x = \frac{rt}{a},$$

t. j. těžiště oblouku kruhového jest na poloměru středním, t. j. na poloměru spojujícím střed oblouku se středem kruhu a vzdálenosť jeho od středu kruhu jest čtvrtá geometricky úměrná ku oblouku, poloměru a tětivě.

U polokruhu jest $t = 2r$, $a = \pi r$ a proto

$$x = \frac{2r^2}{\pi r} = \frac{2r}{\pi};$$

u kruhu jest $t = 0$, neboť průmět obrazce uzavřeného rovná se nule a tím $x = 0$, t. j. těžiště kruhu jest ve středu jeho.

6. Těžiště výseku kruhového.

Rozdělí-li se výsek na neskonale mnoho malých výseků, lze každý výsek tento míti za trojúhelník o výšce rovné poloměru kruhu r; těžiště každého z těchto trojúhelníků jest u vzdálenosti $\frac{2}{3}r$ (obr. 8.) od středu kruhu a proto těžiště všech vyplňují oblouk soustředního kruhu o poloměru $\frac{2}{3}r$. I jest dle předcházejícího

$$x = \frac{\frac{2}{3}r \cdot \frac{2}{3}t}{\frac{2}{3}a} = \frac{2}{3}\frac{rt}{a},$$

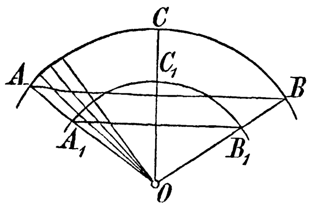
t. j. těžiště výseku kruhového jest na středním poloměru a vzdálenosť jeho od středu kruhu rovná se dvěma třetinám vzdálenosti těžiště oblouku výsekového od téhož středu.

7. Těžiště rozdílu dvou soustředních výseků kruhových o společném úhlu středovém.

Je-li plocha výseku $OABC = P_0$, plocha výseku $OA_1B_1C_1 = P_2$, jest plocha rozdílu obou výseků

$$OABC - OA_1B_1C_1 = P_0 - P_2 = P_1 \text{ (obr. 8.)}.$$

Jsou-li p_1, p_2 a p_0 vzdálenosti těžišť ploch těchto od středu kruhu, jest



Obr. 8.

$$P_1 p_1 = P_0 p_0 - P_2 p_2 \quad \text{a} \quad p_1 = \frac{P_0 p_0 - P_2 p_2}{P_1},$$

$$P_0 = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360}, \quad P_2 = \pi r_1^2 \cdot \frac{\alpha}{360}, \quad \text{když } OC = r \text{ a } OC_1 = r_1;$$

proto

$$P_1 = P_0 - P_2 = \frac{\pi\alpha}{360}(r^2 - r_1^2).$$

Mimo to jest

$$p_0 = \frac{2}{3}\,\frac{rt}{a} \quad \text{a} \quad p_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{r_1 t_1}{a_1}$$

a tím

$$p_1 = \frac{\pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360} \cdot \frac{2}{3}\,\frac{rt}{a} - \pi r_1^2 \cdot \frac{\alpha}{360} \cdot \frac{2}{3}\,\frac{r_1 t_1}{a_1}}{\frac{\pi\alpha}{360}(r^2 - r_1^2)} = \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{tr^3}{a} - \frac{t_1 r_1^3}{a_1}\right)}{r^2 - r_1^2}$$

a ježto

$$\frac{t}{a} = \frac{t_1}{a_1},$$

jest

$$p_1 = \frac{2}{3}\,\frac{t}{a}\,\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2},$$

t. j. těžiště rozdílu dvou soustředních výseků kruhových jest na středním poloměru a jeho vzdálenosť od středu kruhu rovná se $\frac{2}{3}\,\frac{t}{a}\,\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2}$.

8. Těžiště pláště válce.

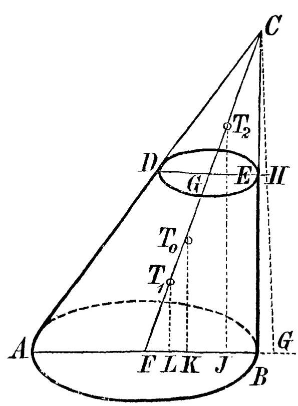
Rozdělí-li se plášť válce přímkami s osou rovnoběžnými ve proužky neskonale úzké, lze proužky tyto míti za přímky; těžiste každé přímky této jest ve středu jejím a proto těžiště všech proužků těchto jsou na obvodě kruhu středního; těžiště kruhu toho jest těžiště pláště válce a tím těžiště jeho ve středu osy, neboť střed osy jest těžištěm středního kruhu. —

9. Těžiště pláště kužele.

Rozdělí-li se plášť kužele přímkami vrcholem ku obvodu podstavy vedenými na neskonalé množství nekonečně malých proužků trojhraných, lze proužky tyto míti za trojúhelníky a ježto těžiště každého trojúhelníka takového jest na přímce spojující vrchol kužele s bodem podstavným a to ve vzdálenosti jedné třetiny výšky od podstavy kužele, vyplňují těžiště všech trojúhelníků těchto obvod kruhu, jenž veden jest u vzdálenosti třetiny výšky rovnoběžně ku podstavě. Těžiště kruhu toho a tím i těžiště pláště kužele jest proto na ose kužele a to u vzdálenosti třetiny výšky od podstavy.

10. Těžiště pláště zkomoleného kužele.

Je-li plášť kužele ABC $= P_0$, těžiště jeho T_0 a vzdálenosť těžiště od podstavy spodní p_0, je-li plášť kužele CDE $= P_2$ tě-



Obr. 9.

žiště jeho T_2 a vzdálenosť těžiště od podstavy spodní p_2, (obr. 9.) jest plášť zkomoleného kužele ABED $= P_0 - P_2 = P_1$ a je-li těžiště jeho T_1 a vzdálenosť těžiště od spodní podstavy x, jest

$$P_1 x = P_0 p_0 - P_2 p_2 \quad \text{a} \quad x = \frac{P_0 p_0 - P_2 p_2}{P_1}.$$

Nyní jest

$$P_0 : P_2 = R^2 : r^2 \quad \text{a proto} \quad P_0 = P_2 \cdot \frac{R^2}{r^2};$$

mimo to

$$(P_0 - P_2) : P_2 = (R^2 - r^2) : r^2,$$

čili

$$P_1 : P_2 = (R^2 - r^2) : r^2, \quad \text{z čehož} \quad P_1 = P_2 \cdot \frac{R^2 - r^2}{r^2};$$

současně patrno, je-li výška zkomoleného kužele $HG = v$ a výška doplňkového kužele $CH = y$, že

$$(y + v) : y = R : r,$$

proto

$$(y + v - y) : y = (R - r) : r, \quad \text{t. j.} \quad y = \frac{vr}{R - r}.$$

Ježto

$$p_0 = \frac{v + y}{3} \quad \text{a} \quad p_2 = v + \frac{y}{3} = \frac{3v + y}{3},$$

jest

$$x = \frac{P_2 \cdot \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{v + y}{3} - P_2 \cdot \frac{3v + y}{3}}{P_2 \cdot \frac{R^2 - r^2}{r^2}} = \frac{v(R^2 - 3r^2) + y(R^2 - r^2)}{3(R^2 - r^2)}$$

$$= \frac{v(R^2 - 3r^2) + \frac{vr}{R - r}(R^2 - r^2)}{3(R^2 - r^2)} = \frac{v}{3} \cdot \frac{R + 2r}{R + r},$$

t. j. těžiště pláště zkomoleného kužele leží na ose u vzdálenosti $\frac{v}{3} \frac{R + 2r}{R + r}$ od podstavy spodní.

11. Těžiště vrchlíku.

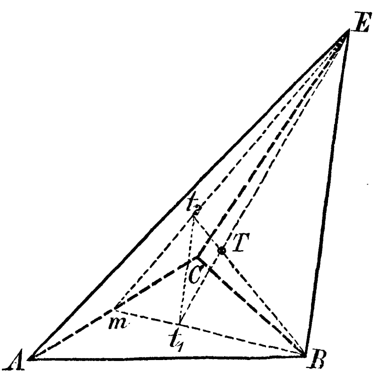
Rozdělí-li se vrchlík na neskonale mnoho proužků o stejné výšce, lze proužky tyto míti za stejné a těžiště stejným proužkům těmto příslušná vyplňují výšku vrchlíku — i jest proto střed výšky vrchlíku těžiště vrchlíku a vzdálenosť jeho od středu koule $x = r - \frac{v}{2} = \frac{2r - v}{2}$.

12. Těžiště hranolu neb válce.

Rozdělí-li se hranol neb válec rovinami ku podstavě rovnoběžnými na neskonalé množství nekonečně malých a vespolek shodných částí, jsou těžiště částí těchto na přímce, která těžiště obou podstav vespolek spojuje; těžiště přímky této jest ve středu jejím a proto jest těžiště hranolu neb válce ve středu přímky, kteráž těžiště obou podstav vespolek spojuje.

13. Těžiště trojbokého jehlanu.

Rozdělí-li se jehlan rovinami ku podstavě rovnoběžnými na neskonale mnoho komolých jehlanů trojbokých o výšce nepatrné avšak stejné, lze komolé jehlany tyto míti za trojúhelníky a ježto těžiště každého trojúhelníka takového jest v prvé třetině přímky, která střed jedné strany spojuje s protějším vrcholem, jsou těžiště všech trojúhelníků a proto i těžiště jehlanu na přímce, jež těžiště podstavy spojuje s vrcholem jehlanu.



Obr. 10.

Je-li těžiště podstavy ABC bod t_1, jest Et_1 těžná přímka a je-li těžiště boku ACE bod t_2, jest i Bt_2 těžná přímka a proto průsečík obou — bod T — jest těžiště jehlanu. (obr. 10.)

Spojí-li se t_1 a t_2 vespolek přímkou, jest

$$\triangle Tt_1t_2 \sim \triangle BET$$

a proto

$$Tt_1 : ET = t_1t_2 : EB$$

a ježto

$$t_1t_2 : EB = mt_1 : Bm = 1 : 3,$$

jest

$$Tt_1 : ET = 1 : 3, \quad \text{t. j.} \quad Tt_1 = \frac{1}{3} ET,$$

aneb

$$Tt_1 = \frac{1}{4} Et_1.$$

Je-li výška jehlanu v a vzdálenosť těžiště jehlanu od podstavy x, jest $x = \frac{v}{4}$, t. j. těžiště jehlanu trojbokého jest na přímce spojující těžiště podstavy s vrcholem a vzdálenosť jeho od podstavy rovná se čtvrtině výšky jehlanu.

Ježto lze n boký jehlan rozložiti na samé jehlany trojboké, jest rovina u vzdálenosti prvé čtvrtiny výšky rovnoběžně ku podstavě n-bokého jehlanu vedená těžnou rovinou a proto jest i těžiště n bokého jehlanu u vzdálenosti čtvrtiny výšky od podstavy.

Ježto lze kužel míti za jehlan o neskonale velikém množství nekonečně malých stran podstavných, jest i těžiště kužele na ose jeho u vzdálenosti čtvrtiny výšky od podstavy.

14. Těžiště komolého jehlanu.

Je-li krychlový obsah celého jehlanu P_0 a těžiště jeho u vzdálenosti p_0 od podstavy spodní, obsah doplňkového jehlanu P_2 a těžiště jeho u vzdálenosti p_2 od téže podstavy, obsah zkomoleného jehlanu P_1 a vzdálenosť těžiště jeho od podstavy spodní x, jest

$$P_1 x = P_0 p_0 - P_2 p_2 \quad \text{a} \quad x = \frac{P_0 p_0 - P_2 p_2}{P_1}.$$

Budiž plocha podstavy $ABC = P$ a plocha podstavy $abc = p$ (obr. 11.), i jest

$$P : p = (y + v)^2 : y^2,$$

je-li výška zkomoleného jehlanu $dD = v$ a výška doplňkového jehlanu $Od = y$.

Z úměry té plyne

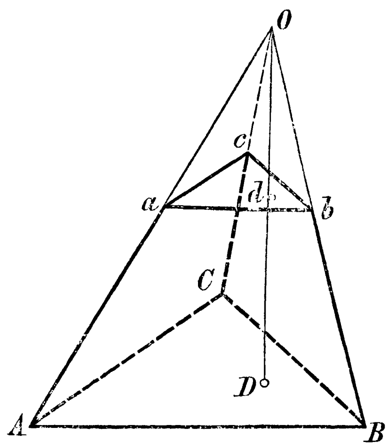
$$(y+v):y = \sqrt{P}:\sqrt{p},$$
$$y:v = \sqrt{p}:(\sqrt{P}-\sqrt{p}),$$

a proto

$$y = \frac{v\sqrt{p}}{\sqrt{P}-\sqrt{p}},$$

tím jest

$$y+v = v+v\,\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{P}-\sqrt{p}} = \frac{v\sqrt{P}}{\sqrt{P}-\sqrt{p}}.$$



Obr. 11.

Ježto

$$p_0 = \frac{y+v}{4} \quad \text{a} \quad p_2 = v + \frac{y}{4} = \frac{4v+y}{4},$$

jest

$$p_0 = \frac{v\sqrt{P}}{4(\sqrt{P}-\sqrt{p})} \quad \text{a} \quad p_2 = \frac{v}{4}\,\frac{4\sqrt{P}-3\sqrt{p}}{\sqrt{P}-\sqrt{p}};$$

mimo to

$$P_0 : P_2 = P(y+v) : py = P\sqrt{P} : p\sqrt{p},$$

a proto

$$(P_0 - P_2) : P_2 = (P\sqrt{P} - p\sqrt{p}) : p\sqrt{p}$$

čili

$$P_1 : P_2 = (P\sqrt{P} - p\sqrt{p}) : p\sqrt{p}, \text{ t. j. } P_1 = P_2 \frac{P\sqrt{P} - p\sqrt{p}}{p\sqrt{p}}$$

a ježto

$$P_0 = P_2 \frac{P\sqrt{P}}{p\sqrt{p}},$$

jest:

$$x = \frac{P_2 \frac{P\sqrt{P}}{p\sqrt{p}} \cdot \frac{v\sqrt{P}}{4(\sqrt{P} - \sqrt{p})} - P_2 \frac{v(4\sqrt{P} - 3\sqrt{p})}{4(\sqrt{P} - \sqrt{p})}}{P_2 \frac{P\sqrt{P} - p\sqrt{p}}{p\sqrt{p}}}$$

$$= \frac{v}{4} \frac{P^2 - 4p\sqrt{Pp} + 3p^2}{P^2 - (P+p)\sqrt{Pp} + p^2}$$

$$= \frac{v}{4} \frac{(P - 2\sqrt{Pp} + p)(P + 2\sqrt{Pp} + 3p)}{(P + \sqrt{Pp} + p)(P - 2\sqrt{Pp} + p)}$$

$$= \frac{v}{4} \frac{P + 2\sqrt{Pp} + 3p}{P + \sqrt{Pp} + p},$$

t. j. těžiště zkomoleného jehlanu jest na přímce, jež spojuje těžiště obou podstav jeho vespolek a vzdálenosť jeho od podstavy spodní $= \frac{v}{4} \frac{P + 2\sqrt{Pp} + 3p}{P + \sqrt{Pp} + p}$.

Dle toho jest i těžiště zkomoleného kužele na ose a to u vzdálenosti

$$x = \frac{v}{4} \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$$

od podstavy spodní, jsou-li R a r poloměry podstav a v výška komolého kužele.

15. Těžistě kulového výseku.

Rozdělí-li se výsek kulový na neskonalé množství malých výseků, lze tyto míti za jehlany o výšce rovné poloměru koule a ježto těžiště každého jehlanu takového jest u vzdálenosti $\frac{3}{4} r$ od středu koule, vyplňují těžiště všech těchto jehlanců vrchlík o poloměru $r_1 = \frac{3}{4} r$ a výšce $v_1 = \frac{3}{4} v$.

I jest tedy těžiště vrchlíku toho těžiště výseku a proto vzdálenosť jeho od středu koule

$$x = \frac{2r_1 - v_1}{2} = \frac{1}{2}\left(2 \cdot \frac{3r}{4} - \frac{3v}{4}\right) = \frac{3}{8}(2r - v),$$

t. j. těžiště kulového výseku jest na středním poloměru a je-li poloměr koule r a výška úseku v, jest vzdálenosť jeho od středu koule $= \frac{3}{8}(2r - v)$.

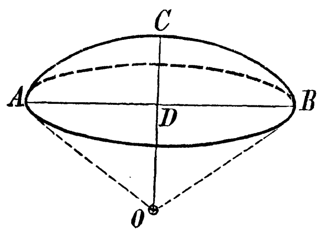
U polokoule jest $v = r$ a proto

$$x = \frac{3}{8}(2r - r) = \frac{3r}{8}.$$

U koule jest $v = 2r$ a proto $x = 0$, t. j. střed koule jest i těžiště její.

16. Těžiště kulového úseku.

Je-li poloměr koule r, výška úseku v a poloměr podstavy jeho ϱ, jest krychlový obsah



Obr. 12.

výseku $OABC = P_0 = \frac{2}{3}\pi r^2 . v$,

kužele $OAB = P_2 = \frac{1}{3} r\varrho^2 (r - v) = \frac{1}{3}\pi v (2r - v)(r - v)$,

a proto krychlový obsah úseku ABCD

$$P_0 - P_2 = P_1 = \frac{2}{3}\pi r^2 v - \frac{\pi v}{3}(2r - v)(r - v)$$

$$= \frac{\pi v^2}{3}(3r - v), \quad \text{(obr. 12.).}$$

Vzdálenosť těžiště výseku od středu koule $p_0 = \frac{3}{8}(2r - v)$,

vzdálenosť těžiště kužele od středu koule $p_2 = \frac{3}{4}(r - v)$;

je-li vzdálenosť těžiště úseku kulového od středu koule x, jest

$$x = \frac{P_0 p_0 - P_2 p_2}{P_1}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\pi r^2 v \, . \, \frac{3}{8}(2r - v) - \frac{\pi v}{3}(2r - v)(r - v) \, . \, \frac{3}{4}(r - v)}{\frac{\pi v^2}{3}(3r - v)}$$

$$= \frac{3}{4}\frac{(2r - v)^2}{3r - v},$$

t. j. těžiště kulového úseku jest na středním poloměru a to u vzdálenosti $= \frac{3}{4}\frac{(2r - v)^2}{3r - v}$ od středu koule.

Kterak přikročiti ku řešení pravidelného dvacítistěna, nejsou-li známy číselné vztahy částek pravidelného pětiúhelníka?

Napsal

Antonín Jeřábek,

professor akademického gymnasia v Praze.

Značiž a hranu pravidelného dvacítistěna, r poloměr koule témuž vepsané, R poloměr koule opsané, ϱ pak poloměr kruhu opsaného kolem pravidelného pětiúhelníka, jehož strana se rovná a, a konečně d úhlopříčku tohoto pětiúhelníka.

Promítneme-li dva vrcholy pravidelného dvacítistěna, jež neleží na společné hraně a nejsou protějšími na př. A a H (viz obr.) na rovinu položenou koncovými body hran z A vybíhajících, jest pravoúhlý průmět bodu jednoho středem S a bodu druhého vrcholem Q pravidelného desítiúhelníka, s nímž má pravidelný pětiúhelník $BCDEF$ vrcholy své společné; i leží