Pravděpodobnost, že m-letá osoba bude ještě dalších r let živa.

Napsal

Ant. Sýkora,
professor v Rakovníku.

Znamená-li $A_m = \mu$ počet živých v m letech (z jistého počtu současně narozených), $A_n = \nu$ počet živých v $n = m + r$ letech, jest rovně možno, že kterákoli skupina ν osob z μ osob m-letých dosáhne věku n let; těchto skupin, t. j. počet *možných* případů jest

$$\binom{\mu}{\nu} = \frac{\mu(\mu - 1)\ldots(\mu - \nu + 1)}{1 . 2 \ldots \nu}.$$

Pro určitou m-letou osobu O jsou *příznivy* případy, kdy ona osoba sama s kterýmikoli $(\nu - 1)$ z ostatních $(\mu - 1)$ osob jest ve skupině, jež dožije věku n-tého; takových skupin jest

$$\binom{\mu - 1}{\nu - 1} = \frac{(\mu - 1)(\mu - 2)\ldots(\mu - \nu + 1)}{1 . 2 . 3 \ldots (\nu - 1)},$$

toto jest tedy počet případů *příznivých*, pročež hledaná pravděpodobnost

$$p = \binom{\mu - 1}{\nu - 1} : \binom{\mu}{\nu}$$

a poněvadž

$$\binom{\mu}{\nu} = \frac{\mu}{\nu}\binom{\mu - 1}{\nu - 1},$$

$$p = \frac{\nu}{\mu}$$

čili

(I) $$p = \frac{A_n}{A_m} = \frac{A_{m+r}}{A_m}.$$

Právě tak najdeme pravděpodobnost, že m-letá osoba během r let zemře,

$$\text{(II)} \qquad p' = \frac{A_m - A_{m+r}}{A_m} = 1 - p.$$

Poznámka. Obyčejně odvozuje se vzorec (I) *kratčeji* tím, že považuje se počet osob m-letých (A_m) za počet případů možných, $A_n = A_{m+r}$ za počet případů příznivých, a tedy

$$p = \frac{A_{m+r}}{A_n};$$

ale odvození toto není správné.

Hodnota, jíž blíží se výraz $\frac{x - \sin x}{x^3}$, ubývá-li $|x|$ bez konce.*)

Napsal

Antonín Sýkora,
professor v Rakovníku.

Vyjádříme-li oblouk x (úhel v míře přirozené, obloukové) obloukem polovičním, nabudeme

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{x - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{x^3}$$

a obdobně dále

*) Stanovení mezné hodnoty tohoto výrazu pomocí řady sinusové najde čtenář ve Studničkově a počtem differencialným ve Weyrově vyšší mathematice.

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{x - 2\sin\frac{x}{2}\,.\,(1 - 2\sin^2\frac{x}{4})}{x^3}$$

$$= \frac{x - 2\sin\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{4}}{x^3}$$

$$= 2\,.\,\frac{\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{x^3} + 4\,.\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\,.\,\frac{\sin^2\frac{x}{4}}{x^2}$$

$$= \frac{1}{4}\,.\,\frac{\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^3} + \frac{1}{8}\,.\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\,.\left(\frac{\sin\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}}\right)^2$$

anebo, kladouce $\frac{x}{2} = \xi$, $\frac{x}{4} = \xi'$,

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{4}\,.\,\frac{\xi - \sin\xi}{\xi^3} + \frac{1}{8}\,.\,\frac{\sin\xi}{\xi}\,.\left(\frac{\sin\xi'}{\xi'}\right)^2.$$

Jelikož ξ a ξ' zmizí současně s x, dále pak $\frac{\sin\xi}{\xi}$ a $\frac{\sin\xi'}{\xi'}$ při nekonečně ubývajícím ξ a ξ' blíží se hodnotě 1, a konečně za téže výminky $\frac{\xi - \sin\xi}{\xi^3}$ má tutéž mez jako $\frac{x - \sin x}{x^3}$, máme, označíme-li tuto meznou hodnotu písmenem u,

$$u = \frac{1}{4}u + \frac{1}{8},$$

odkudž plyne

$$u = \frac{1}{6}.$$

Poznámka. Že při nekonečně ubývajícím x blíží se poměr $\frac{\sin x}{x}$ jednotce, ukázal poprvé Cotes.