Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vavřinec Jelínek

Zobecnění věty Pythagorovy pro každý trojúhelník

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 28 (1899), No. 1, 79--87

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122503

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1899

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

vedně a lze je u něho obdržeti a sice první za 10 zl., druhý za 12 zl.

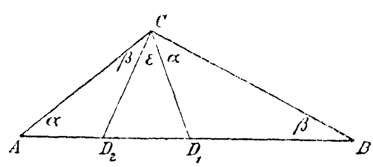
Zobecnění věty Pythagorovy pro každý trojúhelník.

Napsal

Vavřinec Jelínek,

professor v Novém Městě u Vídně.

I. Strany trojúhelníka ABC (obr. 1.) jmenujme, jak obyčejně, a, b, c a jim protilehlé úhly α, β, γ.



Obr. 1

Odečteme-li od úhlu γ směrem ku A úhel α, směrem ku B úhel β, a prodloužíme-li nová ramena až k průsečíkům D_1 a D_2 se stranou c, najdeme:

V trojúhelníku D_1CD_2 jsou úhly δ_1 ležící proti $CD_2 = d_2$, a δ_2 proti $CD_1 = d_1$ zevnějšími úhly sousedních trojúhelníků; tedy

$$\delta_1 = \alpha + \beta = 180^0 - \gamma, \quad \delta_2 = \alpha + \beta = 180^0 - \gamma,$$

pročež

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta$$

a tedy také příčky

$$(1) \qquad d_1 = d_2 = d.$$

Každý z obou trojúhelníků, omezených nerozdělenou stranou, přilehlým úsekem rozdělené strany a příslušnou příčkou d, jest pro rovnost úhlů podobèn danému trojúhelníku; jsou tedy oba i sobě podobny.

$$(2) \quad \triangle BCD_1 \sim \triangle ABC, \; \triangle ACD_2 \sim \triangle ABC, \; \triangle BCD_1 \sim \triangle ACD_2.$$

Nazveme-li úseky $BD_1 = c_1$ a $AD_2 = c_2$, najdeme z prvých dvou párů těchto podobných trojúhelníků úměry

$$(3) \qquad c : a = a : c_1, \quad c : b = b : c_2.$$

Jest tedy každá nerozdělená strana trojúhelníka střední měřickou úměrnou mezi celou rozdělenou stranou a jejím úsekem, přilehlým k nerozdělené straně.

Z třetí dvojice podobných trojúhelníků pak plyne

$$(4) \qquad c_1 : d_1 = d_2 : c_2$$

a poněvadž dle (1) jest $d_1 = d_2$, tvoří každá příčka d střední měřickou úměrnou obou úseků rozdělené strany.

Proměníme-li úměry (3) v rovnice:

$$a^2 = cc_1, \quad b^2 = cc_2,$$

najdeme součtem

$$(5) \qquad a^2 + b^2 = c(c_1 + c_2)$$

a součinem

$$ab = c\sqrt{c_1c_2};$$

tedy vzhledem ku (4)

$$(6) \qquad ab = cd,$$

kterýžto vztah také přímo vychází z prvních neb druhých dvou podobných trojúhelníků uvedených v (2).

Učiníme-li $D_1D_2 = e$, jest dle obr. 1.

$$(7) \qquad c = c_1 + c_2 + e.$$

Z rovnice této obdržíme, násobíme-li ji hodnotami c_1, c_2 neb c:

$$cc_1 = c_1^2 + c_1c_2 + c_1e,$$
$$cc_2 = c_2^2 + c_1c_2 + c_2e,$$
$$c^2 = cc_1 + cc_2 + ce$$

a vůči úměrám (3) a (4)

$$(8) \qquad \begin{aligned} a^2 &= c_1^2 + d^2 + c_1e, \\ b^2 &= c_2^2 + d^2 + c_2e, \\ c^2 &= a^2 + b^2 + ce. \end{aligned}$$

V prvních dvou rovnicích poznáváme hned na první pohled větu Carnotovu; jesti e dvojím průmětem strany d na c_1 i na c_2.

Smysl třetí rovnice (8) seznáme takto: Vyměnivše v součinu ce přímku c dle (6), obdržíme

$$(9) \qquad c^2 = a^2 + b^2 + ab \cdot \frac{e}{d}$$

a z trojúhelníka D_1CD_2, kde

$$\varepsilon = \gamma - (\alpha + \beta) = \gamma - (180^0 - \gamma) = 2(\gamma - 90^0),$$

najdeme

$$\frac{e}{d} = 2 \sin \frac{\varepsilon}{2} = -2 \cos \gamma,$$

takže ona rovnice zní

$$(10) \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Jest tedy i třetí rovnice v (8) větou Carnotovou. Hodnota posledního členu jejího jest v našem případě pro $\gamma > 90^0$ ovšem kladná.

Správnost rovnic (1) až (6) není nijak podmíněna velikostí úhlu γ. Rovnice tyto platí tedy pro každý trojúhelník.

V rovnicích (7) až (9) jest však pro hodnotu přímky

$$e = -2d \cos \gamma$$

rozeznávati různé případy:

a) Je-li $\gamma > 90^0$, jako v našem obrazci, jest e kladné; úseky c_1 a c_2 souvisejí přímkou e. Pro tento případ platí horní rovnice.

b) Je-li $\gamma = 90^0$, jest $e = 0$; úseky c_1 a c_2 souvisejí jen svými konci, příčky d_1 a d_2 splývají v jedinou a to ve výšku na přeponu. Rovnice (7) až (9) znějí pak:

$$c = c_1 + c_2,$$
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

c) Je-li $\gamma < 90^0$, jest e záporné; úseky c_1 a c_2 částečně se kryjí a horní rovnice se mění na

$$c = c_1 + c_2 - e,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - ce,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - ab \frac{e}{d}.$$

Odvození Pythagorovy věty podmíněno je tím, lze-li jedinou příčkou odečísti dva úhly trojúhelníka od úhlu třetího. Neomezujeme-li toto odčítání počtem odčítacích příček, nýbrž odečteme-li vůbec, shledáme, že Pythagorova věta ve všech svých výrocích platí pro každý trojúhelník. I zdánlivě různící se věty

$$a^2 + b^2 = c^2,$$
$$a^2 + b^2 = c(c_1 + c_2)$$

jsou totožné, vyslovíme-li je takto:

„Součet čtverců nad dvěma stranami trojúhelníka se rovná obdélníku ze strany třetí a součtu obou jejích úseků.“

II. Ježto v předešlém uvedeno bylo několik posud neobvyklých úseček c_1, c_2, d, e, ukážeme ještě, jak lze jich použiti při řešení trojúhelníka.

$$\sin\gamma = \sin\left(\frac{\varepsilon}{2} + 90^0\right) = \cos\frac{\varepsilon}{2} = \frac{v}{d} = \frac{v}{\sqrt{c_1 c_2}}$$
$$= \frac{\sqrt{4d^2 - e^2}}{2d} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4c_1c_2 - e^2}{c_1c_2}},$$

kde v znamená výšku na c. Pak

$$\cos\gamma = \cos\left(\frac{\varepsilon}{2} + 90^0\right) = -\sin\frac{\varepsilon}{2} = -\frac{e}{2d}$$
$$= -\frac{e}{2\sqrt{c_1c_2}} = -\frac{c - c_1 - c_2}{2\sqrt{c_1c_2}},$$

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c = \sqrt{c_1} : \sqrt{c_2} : \sqrt{c},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tang}\frac{\alpha-\beta}{2} = \left(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}\right) : \left(\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2}\right);$$

plochy trojúhelníků $p = \mathrm{ABC}$, $p_1 = \mathrm{BCD_1}$, $p_2 = \mathrm{ACD_2}$, $p_3 = \mathrm{D_1CD_2}$ jsou v relaci

$$p : p_1 : p_2 : p_3 = c : c_1 : c_2 : e.$$

Příklad 1. Dány: c, c_1, c_2.

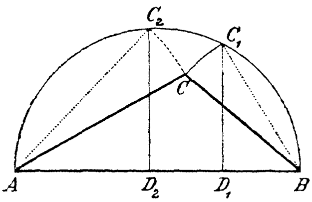
Najdeme

$$a = \sqrt{cc_1}, \quad b = \sqrt{cc_2}, \quad d = \sqrt{c_1 c_2}, \quad e = c - (c_1 + c_2),$$

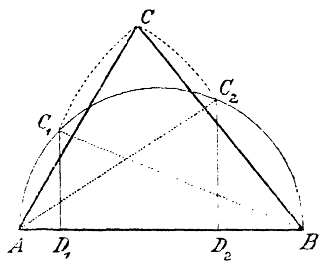
$$p = c\sqrt{s\,(s - \sqrt{c})\,(s - \sqrt{c_1})\,(s - \sqrt{c_2})}, \text{ kde } 2s = \sqrt{c} + \sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}.$$

Sestrojení. Odečteme od c = AB protivnými směry c_1 = BD_1 a c_2 = AD_2. Tu rozeznávati dlužno tyto případy:

a) Oba konce D_1 a D_2 úseků c_1 a c_2 vpadají do AB = c. (Obr. 2. a 3.) Sestrojíme nad AB = c jakožto průměrem polokružnici, pak $D_1C_1 \perp AB$ a $D_2C_2 \perp AB$ a shledáme, že $BC_1 = a$, $AC_2 = b$.

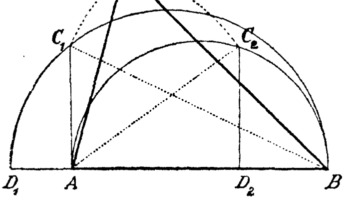


Obr. 2.

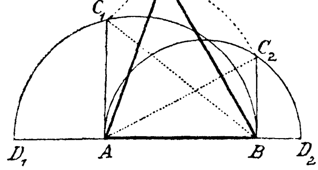


Obr. 3.

b) Jeden neb oba konce D_1 a D_2 úseků padají na prodlouženou AB = c. (Obr. 4. a 5.) Sestrojíme polokružnice nad každou



Obr. 4.



Obr. 5.

delší přímkou c, c_1, c_2 jakožto průměrem (nejkratší z nich jest již obsažena v každé delší) a pokračujeme jako v případě prvém.

Příklad 2. Dány: c_1, c_2, $\pm e$.

Vypočteme:

$$c = c_1 + c_2 \pm e, \quad a = \sqrt{c_1 (c_1 + c_2 \pm e)}, \quad b = \sqrt{c_2 (c_1 + c_2 \pm e)},$$
$$d = \sqrt{c_1 c_2}, \quad p = \frac{1}{4} (c_1 + c_2 \pm e) \sqrt{4 c_1 c_2 - e^2}.$$

Sestrojení. Je-li $e = D_2D_1$ kladné, přičteme ku e (obr. 2.), je-li záporné $e = D_1D_2$, odečteme od e (obr. 3.) protivnými směry úsek $c_1 = D_1B$ a úsek $c_2 = D_2A$. Pokaždé obdržíme $c = AB$ a pokračujeme jako v příkladě 1.

Podmínka: $c_1 c_2 > \left(\frac{e}{2}\right)^2$.

Příklad 3. Dány: a, c_1, d.

Vypočteme:

$$c_2 = \frac{d^2}{c_1}, \quad c = \frac{a^2}{c_1}, \quad b = \frac{ad}{c_1}, \quad e = \frac{a^2 - c_1{}^2 - d^2}{c_1},$$
$$p = \left(\frac{a}{c_1}\right)^2 \sqrt{s (s-a)(s-c_1)(s-d)}, \text{ kde } 2s = a + c_1 + d.$$

Sestrojení. Sestrojíme trojúhelník o stranách $a = BC$, $c_1 = BD_1$ a $d = CD_1$ (obr. 1.). Jeho úhel ležící proti a se rovná úhlu γ hledaného trojúhelníka; přeneseme jej tedy do C ku straně a.

Příklad 4. Dány: a, c_2, d.

Najdeme:

$$c_1 = \frac{d^2}{c_2}, \quad b = \frac{a}{d} c_2, \quad c = \left(\frac{a}{d}\right)^2 c_2,$$
$$p = \left(\frac{a}{d}\right)^2 \sqrt{s (s-b)(s-c_2)(s-d)},$$

kde $b = \frac{a}{d} c_2$ a $2s = b + c_2 + d$.

Sestrojení. Sestrojivše b dle úměry $d : a = c_2 : b$ neb c_1 dle $c_1 : d = d : c_2$, pokračujeme podobně jako v příkl. 3.

Příklad 5. Dány: c_1, c_2, a.

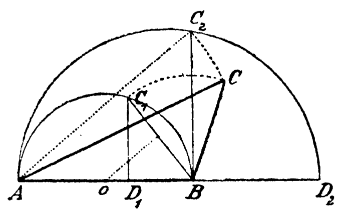
Najdeme:

$$d = \sqrt{c_1 c_2}, \quad b = a \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}, \quad c = \frac{a^2}{c_1},$$
$$p = \left(\frac{a}{c_1}\right)^2 \sqrt{s (s-a)(s-c_1)(s-d)},$$

vypočítáme-li napřed d a klademe-li pak

$$2s = a + c_1 + d.$$

Sestrojení. Sestrojme pravoúhlý trojúhelník BC_1D_1 (obr. 6.) o odvěsně $BD_1 = c_1$ a přeponě $BC_1 = a$, opíšeme polokružnici, jejíž střed o leží v (prodloužené) odvěsně c_1 a obvod prochází



Obr. 6.

body B a C_1. Kružnice tato protne prodlouženou odvěsnu ještě v A. Jest $AB = c$. Nanesme pak úsek $c_2 = AD_2$ na AB a pokračujme jako v příkl. 1. b.

Příklad 6. Dány: a, b, d.

Vypočteme:

$$c = \frac{ab}{d}, \quad c_1 = \frac{ad}{b}, \quad c_2 = \frac{bd}{a},$$

$$p = (ab)^2 \sqrt{s\left(s - \frac{1}{a}\right)\left(s - \frac{1}{b}\right)\left(s - \frac{1}{d}\right)},$$

znamená-li

$$2s = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{d}.$$

Sestrojení. Potřebí jen c, které dle úměry $d : a = b : c$ snadno sestrojíme.

Příklad 7. Dány: a, b, $\pm e$.

Najdeme z rovnice (8)

$$c = \frac{1}{2}\left[\pm e + \sqrt{e^2 + 4(a^2 + b^2)}\right],$$

pak

$$c_1 = \frac{2a^2}{\pm e + \sqrt{e^2 + 4(a^2 + b^2)}},$$
$$c_2 = \frac{2b^2}{\pm e + \sqrt{e^2 + 4(a^2 + b^2)}},$$
$$d = \frac{2ab}{\pm e + \sqrt{e^2 + 4(a^2 + b^2)}}.$$

Vypočítavše stranu c, použijeme pro plochu vzorce Heronova

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Sestrojení. Jedná se jen o stranu c, kterou sestrojíme dle

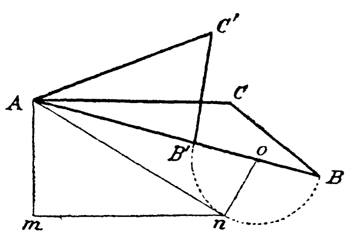
$$c = \sqrt{(a^2 + b^2) + \left(\frac{e}{2}\right)^2} \pm \frac{e}{2}.$$

V obr. 7. jest $Am = a$, $mn = b$, $Am \perp mn$, tedy

$$An = \sqrt{a^2 + b^2};$$

pak $no \perp An$, $no = \frac{e}{2}$, tedy

$$Ao = \sqrt{a^2 + b^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2}.$$



Obr. 7.

Opíšeme-li ještě kolem o kružnici o poloměru $\frac{e}{2}$, dostaneme obě strany: delší $c = AB$, kratší $c' = AB'$.

Příklad 8. Dány: c, d, e.

Strany a a b obdržíme řešením rovnic (6) a (8):

$$a = \frac{1}{2}\left[\sqrt{c(c+2d-e)} \pm \sqrt{c(c-2d-e)}\right] = b;$$

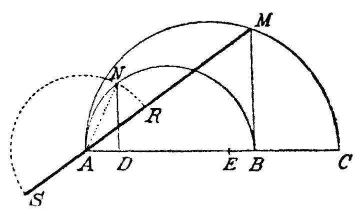
$$p = \frac{c}{4}\sqrt{(2d+e)(2d-e)}.$$

Sestrojení stran a a b provedeme dle vzorce

$$\sqrt{\frac{c}{2}\left(\frac{c}{2}-\frac{e}{2}+d\right)} \pm \sqrt{\frac{c}{2}\left(\frac{c}{2}-\frac{e}{2}-d\right)}.$$

V obr. 8. jest $AB = \frac{c}{2}$, $BE = \frac{e}{2}$, $CE = DE = d$; tedy

$$AC = \frac{c}{2} - \frac{e}{2} + d, \quad AD = \frac{c}{2} - \frac{e}{2} - d.$$



Obr. 8.

Sestrojíme-li polokružnice o průměrech AC a AB a protneme-li je kolmicemi BM ⊥ AC a DN ⊥ AB, bude tětiva

$$AM = \sqrt{\frac{c}{2}\left(\frac{c}{2}-\frac{e}{2}+d\right)}$$

a tětiva

$$AN = \sqrt{\frac{c}{2}\left(\frac{c}{2}-\frac{e}{2}-d\right)},$$

pročež MS jest delší, MR kratší stranou z obou a a b.

Podmínky: $2d > e$, $c > (2d+e)$.

Kdyby byla přímka e záporná, změnil by se ovšem obvod, nikoliv však plocha p trojúhelníka.