Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Augustin Pánek
O mathematické a morální naději. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 6 (1877), No. 3, 122--130

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122490

Thalén R.: Messungen der Wellenlängen der Metalllinien, Nova Acta Reg. Soc. Sc. Upsala 1868.

Na základě prací Angströmových o spektru slunečném určil spisovatel délku vln spektralných čar pro 45 kovů.

Van der Willigen: Über das elektrische Spectrum. Pogg. Ann. sv. 106.

O mathematické a morální naději.

Sepsal

Augustin Pánek.

(Pokračování.)

Je-li v jednom z dvou osudí ν kuliček, označených číslicemi 1, 2,..., ν, v druhém pak μ kuliček, označených 1, 2,..., μ, a nazveme-li příznivé pravděpodobnosti, že vytáhneme kuličky z prvého osudí, jak po sobě jdou, $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$, s kterýmž výjevem jest spojena jedna z výher $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ násobných určité sumy, a podobně příznivé pravděpodobnosti, že vytáhneme kuličky z druhého osudí, jak po sobě jsou $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$, s kterýmiž jsou opět spojeny výhry $b_1, b_2, \ldots, b_\mu$ násobné téže určité sumy, vyhrajeme tolik, kolik obnáší součet obou čísel na kuličkách vyznačených, vytáhneme-li totiž napřed z prvého, pak z druhého osudí jednu kuličku aneb soudobně z obou po jedné. Jak velká jest mathematická naděje?

Vytáhneme-li z prvého, pak z druhého osudí jednu kuličku, jest naděje dle (10) §. 1.,

$$N_1 = \sum_{\nu=1}^{\nu} p_\nu a_\nu ,$$

pak

$$N_2 = \sum_{\mu=1}^{\mu} q_\mu b_\mu$$

a tedy hledaná naděje

$$N = N_1 + N_2 = \sum_{\nu=1}^{\nu} p_\nu a_\nu + \sum_{\mu=1}^{\mu} q_\mu b_\mu. \tag{4}$$

Máme-li vůbec τ osudí a vytáhneme-li z nich kuličky po sobě aneb současně najednou, obdržíme všeobecně

$$N = \sum_{\tau=1}^{\tau} N_\tau = \sum_{\nu=1}^{\nu} p_\nu a_\nu + \sum_{\mu=1}^{\mu} q_\mu b_\mu + \ldots + \sum_{\tau=1}^{\tau} m_\tau t_\tau. \tag{5}$$

Máme-li dvě osudí a vytáhneme-li jednu kuličku z jednoho a vyhrajeme-li dle svrchu uvedených podmínek sumu, která jest na téže kuličce číslicí vytknuta, jak velká jest hodnota očekávání?

Vytáhneme-li kuličku z prvého osudí, jest očekávání

$$N_1 = \sum_{\nu=1}^{\nu} p_\nu a_\nu,$$

a vytáhneme-li ji z druhého osudí,

$$N_2 = \sum_{\mu=1}^{\mu} q_\mu b_\mu.$$

Že vytáhneme kuličku z jednoho obou osudí, jest stejně možné, proto jest případ tento nejistý, tedy $\frac{1}{2}$, a tudíž hledaná hodnota očekávání

$$N = \frac{1}{2}(N_1 + N_2) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\nu} p_\nu a_\nu + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{\mu} q_\mu b_\mu. \tag{6}$$

Máme-li vůbec τ osudí, jest

$$N = \frac{1}{\tau} \left[\sum_{\nu=1}^{\nu} p_\nu a_\nu + \sum_{\mu=1}^{\mu} q_\mu b_\mu + \ldots + \sum_{\tau=1}^{\tau} m_\tau t_\tau \right]. \tag{7}$$

Máme-li opět dvě osudí a vytáhneme-li za týchže výminek, jak je vzorec (4) udává, z každého osudí jednu aneb současně z obou po jedné kuličce, vyhrajeme tolik, kolik činí součin čísel na kuličkách vytknutých. Jak velké jest očekávání?

Vytáhneme-li kuličku z prvého osudí, jest očekávání

$$N = \sum_{\nu=1}^{\nu} p_\nu a_\nu,$$

v kterémžto vzorci jest zahrnut každý možný případ. Po tom vytáhneme jednu z kuliček z druhého osudí, označených 1, 2, ..., μ, a tudíž jsou očekávání posloupně

$$N_1 = q_1 b_1 \sum_{\nu=1}^{\nu} p_\nu a_\nu$$

$$N_2 = q_2 b_2 \sum_{\nu=1}^{\nu} p_\nu a_\nu$$

$$\vdots$$

$$N_\mu = q_\mu b_\mu \sum_{\nu=1}^{\nu} p_\nu a_\nu .$$

Hledaná mathematická naděje

$$N = \sum_{\mu=1}^{\mu} N_\mu = \sum_{\nu=1}^{\nu} p_\nu a_\nu \sum_{\mu=1}^{\mu} q_\mu b_\mu . \tag{8}$$

Pro τ osudí jest pak vůbec

$$N = \sum_{\nu=1}^{\nu} p_\nu a_\nu \sum_{\mu=1}^{\mu} q_\mu b_\mu \ldots \sum_{\tau=1}^{\tau} m_\tau t_\tau . \tag{9}$$

§. 3.

Osoba, která vyhraje, obdrží tak zvanou *absolutní* (čistou) *výhru* V a tato se rovná rozdílu celkové čili úplné výhry a sázky,

$$V = v - s . \tag{1}$$

Jest zřejmo, že $V \gtreqless 0$, podlé toho ukazuje vzorec (1) buď výhodu neb ztrátu aneb ani jedno ani druhé.

Dosadíme-li za s hodnotu ze vzorce (2) §. 1. do (1), vznikne

$$V = v - pv = (1 - p)\, v,$$

kdež $1 - p = q = \frac{b}{m}$ značí pravděpodobnost opačnou (kontrarní), tak že

$$V = qv = \frac{b}{m} v , \tag{2}$$

t. j. absolutní výhra rovná se součinu z výhry úplné a pravděpodobnosti opačné, nepříznivé pro tuto výhru.

Výhodu dvou osob lze vyjádřiti absolutní výhrou. Je-li absolutní výhra osoby první r_1 násobné sázky s, a osoby druhé r_2 násobné téže sázky, a nazveme-li pravděpodobnosti výher těchto docíliti p_1 a p_2, pak jest dle (2) §. 1. výhra osoby první $p_1 r_1 s$ a osoby druhé $p_2 r_2 s$.

Výhoda osoby první vyjádří se vzorcem

$$T_1 = p_1 r_1 s - p_2 r_2 s \tag{3}$$

a výhoda osoby druhé vzorcem

$$T_2 = p_2 r_2 s - p_1 r_1 s\,; \tag{4}$$

a není-li konečně na žádné straně výhody, pak jest

$$p_1 r_1 s = p_2 r_2 s\,. \tag{5}$$

Ze vzorce (2) plyne dále

$$v = \frac{V}{q} = \frac{m}{b} \,.\, V\,, \tag{6}$$

t. j. úplná výhra rovná se poměru absolutní výhry a pravděpodobnosti nepříznivé pro tuže výhru.

Srovnáme-li dle (2) dvě absolutní výhry, pak se má

$$V_1 : V_2 = q_1 v_1 : q_2 v_2 = \frac{b_1}{m_1} v_1 \,;\, \frac{b_2}{m_2} v \tag{7}$$

t. j. absolutní výhry jsou v přímém poměru k úplným výhrám a příslušným pravděpodobnostem nepříznivým.

Pro $m_1 = m_2$ platí pak

$$V_1 : V_2 = b_1 v_1 : b_2 v_2\,. \tag{7'}$$

Podobným způsobem lze si zde zjednati srovnalost, jakou vzorec (5) §. 1. naznačuje, totiž

$$V_\lambda : \sum_{n=1}^{n} V_n = q_\lambda v_\lambda : \sum_{n=1}^{n} q_n v_n\,, \tag{8}$$

a je-li $m_1 = m_2$,

$$V_\lambda : \sum_{n=1}^{n} V_n = b_\lambda v_\lambda : \sum_{n=1}^{n} b_n v_n\,. \tag{8'}$$

Ze vzorce (2) plyne dále

$$V : v = q : 1 = b : m\,, \tag{9}$$

t. j. absolutní výhra má se k úplné výhře, jako příslušná, nepříznivá pravděpodobnost k symbolu jistoty aneb jako počet případů nepříznivých ke všem možným.

Ze vzorce (1) dle (7) §. 1. obdržíme

$$V = \frac{s}{p} - s = \frac{1 - \mathrm{p}}{p} s = \frac{q}{p} s = \frac{b}{a} s\,, \tag{10}$$

t. j. absolutní výhra rovná se poměru nepříznivých případů ku příznivým, násobenému hodnotou sázky.

Vzorci (10) můžeme uděliti též tvar

$$V : s = q : p = b : a, \qquad (11)$$

t. j. absolutní výhra má se k sázce, jako nepříznivá pravděpodobnost ku příznivé, aneb jako počet případů nepříznivých ku počtu příznivých.

Z rovnice (10) dostaneme hodnotu sázky

$$s = \frac{p}{q} V = \frac{a}{b} V. \qquad (12)$$

Loterie a herny vyplácejí v případě výhry určitou sumu S za jistou sázku s.

Porovnáme-li výhru uvedenou ve vzorci (7) §. 1. s vyplacenou sumou S, jest

$$T = \frac{s}{p} - S. \qquad (13)$$

Je-li $\frac{s}{p} > S$, má podnikatel hry výhodu, jejíž hodnota budiž R; a tu obdržíme, porovnáme-li vzorce (13) a (7 §. 1.) čili dělíme-li oba tyto vzorce, tak že bude

$$R = 1 - \frac{p}{s} S = 1 - \frac{a}{ms} S. \qquad (14)$$

Vyjádříme-li tuto hodnotu v procentech, jest

$$R' = 100\left(1 - \frac{p}{s} S\right) = 100\left(1 - \frac{a}{ms} S\right). \qquad (15)$$

Považujeme-li sázku za jednotku, pak jest

$$R = 1 - pS = 1 - \frac{a}{m} S, \qquad (16)$$

a

$$R' = 100\,(1 - pS) = 100\left(1 - \frac{a}{m} S\right). \qquad (17)$$

Podnikatel hry, jak jsme pravili, má na své straně výhodu, která jest často velmi značná. Na doklad toho podáváme zařízení *loterie číslové* (malé) — *lotto.*

Bavorská loterie číslová vyplácela hráči, jak uvádí *Oettinger* [1]) dle král. Bavorského kalendáře loterního z roku 1839, v případě výhry sázku

[1]) *Crelle's,* Journal für d. reine und angewandte Mathematik. 36. Band. Pag. 249.

při extratu	15	tinásobně
„ nominatu	75	„
„ neurčitém ambu	270	„
„ určitém ambu	5100	„
„ ternu	5400	„
„ kvaternu	60.000	„ .

Pravděpodobnosti pro výhry v loterii vůbec jsou, jak snadno jest vypočítati,

pro extrato	$\frac{1}{18}$	$= 0{\cdot}0555\ldots$
„ nominato	$\frac{1}{90}$	$= 0{\cdot}01111\ldots$
„ neurčité ambo	$\frac{2}{801}$	$= 0{\cdot}002497\ldots$
„ určité ambo	$\frac{1}{8010}$	$= 0{\cdot}0001248\ldots$
„ terno	$\frac{1}{11748}$	$= 0{\cdot}000085\ldots$
„ kvaterno	$\frac{1}{511038}$	$= 0{\cdot}000001957\ldots$
„ kvinterno	$\frac{1}{43949268}$	$= 0{\cdot}000000023\ldots$ [1]).

Dle vzorce (7) §. 1. mělo by se z této loterie vyhráti

na extrato	18	tinásobně
„ nominato	90	„
„ neurčité ambo	400·5	„
„ určité ambo	8010	„
„ terno	11748	„
„ kvaterno	511038	„ [2]).

Tato loterie měla tedy dle vzorce (16), pokládáme-li sázky za jednotku, následující srážky:

---

[1]) *Laplace* (Théorie analytique des probabilités p. 191—201) a *Euler* (Opuscula analytica T. II. p. 333) určují, a to každý jiným způsobem pravděpodobnost, že všechna čísla vytažena budou v k tazích z loterie mající n čísel, když v každém tahu r čísel vytaženo jest. Všeobecnější rozřešení této úlohy podal *Laplace.*

[2]) Žádná loterie, vyjmouc francouzskou, nevyplacela kvinterna. Bavorská loterie byla po mnohaletém vyjednávání mezi sněmovnami a vládou zrušena roku 1862.

při extratu $1 - \frac{15}{18} = 0{\cdot}1666\ldots$ neb $16{\cdot}67\%$

„ nominatu $1 - \frac{75}{90} = 0{\cdot}1666\ldots$ „ $16{\cdot}67$ „

„ neurčitém ambu $1 - \frac{2.270}{801} = 0{\cdot}32584\ldots$ „ $32{\cdot}58$ „

„ určitém ambu $1 - \frac{5100}{8010} = 0{\cdot}36329\ldots$ „ $36{\cdot}33$ „

„ ternu $1 - \frac{5400}{11748} = 0{\cdot}54034\ldots$ „ $54{\cdot}03$ „

„ kvaternu $1 - \frac{60000}{511038} = 0{\cdot}88259\ldots$ „ $88{\cdot}26$ „ .

Dle *Lacroix**) vyplácela „*loterie de France*“ (Lotto di Genova) sázku

15	tinásobně	při extratu
70	„	„ nominatu
270	„	„ neurčitém ambu
5100	„	„ určitém ambu
5500	„	„ ternu
75000	„	„ kvaternu
1000000	„	„ kvinternu.

Tato loterie měla tedy dle (16) srážky

při extratu $1 - \frac{15}{18} = 0{\cdot}1666\ldots$ neb $16{\cdot}67\%$

„ nominatu $1 - \frac{70}{90} = 0{\cdot}2222\ldots$ „ $22{\cdot}22$ „

„ neurčitém ambu $1 - \frac{2.270}{801} = 0{\cdot}32584\ldots$ „ $32{\cdot}58$ „

„ určitém ambu $1 - \frac{5100}{8010} = 0{\cdot}36329\ldots$ „ $36{\cdot}33$ „

„ ternu $1 - \frac{5500}{11748} = 0{\cdot}53183\ldots$ „ $53{\cdot}18$ „

„ kvaternu $1 - \frac{7500}{511038} = 0{\cdot}85323\ldots$ „ $85{\cdot}32$ „

„ kvinternu $1 - \frac{1000000}{43949268} = 0{\cdot}97724\ldots$ „ $97{\cdot}72$ „ .

---

*) Traité élémentaire du Calcul de probabilités. 1806.

Z toho vidíme, jak velké jsou srážky a tedy jak ohromný příjem má stát z loterie takové [5]).

Opakuje-li se tato hra jen jednou za měsíc, vzrostou uvedená procenta 12tinásobně a výhoda státu v ročních procentech vyjádřená jest

při extratu $\frac{1200}{6} = 200\,\%$,

„ nominatu $\frac{15.100.12}{90} = 200\,\%$

„ neurčitém ambu $\frac{261.1200}{801} = 391{\cdot}011\ldots\%$

„ určitém ambu $\frac{291.1200}{801} = 435{\cdot}95\ldots\%$

„ ternu $\frac{6348{\cdot}1200}{11748} = 648{\cdot}41\ldots\%$

„ kvaternu $\frac{451038.1200}{511038} = 1059{\cdot}14\ldots\%$.

Ještě neprospěšnější než loterie číselná byla veřejná hra v Paříži, zvaná „*trente et quarante*“, při které zisk bankérův v jedné hře jest nepatrný a sice o něco menší než $\frac{11}{1000}$ každé sázky [6]). Ale že v několika hodinách velmi mnoho partií se sehrálo, byl zisk bankerův zajisté náramně velký, což již z toho souditi lze, že platil za tento monopol ročních pět až šest milionů franků.

Celkový kapitál v této hře prosázený činil ročně více než sto milionů franků a převyšoval sumu, kteráž vsazena byla do celé loterie de France [7]).

Že se takové hry nemohou schvalovati, netřeba ani podotýkati, neboť dostatečně známo, k jakým žalostným koncům vášnivé sázení do loterie mnohého přivedlo. To bylo také příčinou, proč vláda francouzská, opovrhnuvši ziskem z loterie plynoucím,

[5]) V Rusku a ve Velké Britanii není *žádné* loterie.

[6]) Viz *Poisson,* Journal de Mathématiques par Gergonne, tom XVI., 1826 Pag. 173. Výňatek z tohoto pojednání viz „*Baumgartners's* Zeitschrift für Physik und Mathem. 1. Bd. p. 228—253.

[7]) Srovnej „*Poisson,* Recherches sur la probabilité de jugements en matière criminelle et en matière civile, Paris, 1837.

finančním zákonem ze dne 1. ledna 1838 loterii číslovou na dobro zrušila.

Když stát pokládá loterii za zřídlo příjmů, činí to vždy na ujmu národního hospodářství. Jednotlivci prospívá zisk jen z poctivé práce a majetek jsouc výsledkem práce jest základem všeobecného blaha [8].

Jinou hru nazvanou „*Trente un Roulette*" popisuje pěkně *Bleibtreu*, profesor na polytechnice v Karlsruhe [9].

V Rakousku sází se do loterie na paterý spůsob: extrato, nominato, ambo solo, ambo terno a terno secco. Místo kvaterna a kvinterna vyplácí se 4 a 10 teren [10].

Výhra obnáší

	v Rakousku		v Italii		místo	
na extrato	14	krát	15	krát	18	krát
„ nominato	67	„	70	„	90	„
„ ambo	240	„	270	„	400·5	„
„ terno	4800	„	5500	„	11748	„
„ kvaterno	19200	„	75000	„	511038	„
„ kvinterno	48000	„	1,100000	„	43,949268	„ .

[8]) Prof. *Jonák*, Základové hospodářství. Matice lidu V. čís. 2. str. 60. V Praze 1871.

[9]) *Bleibtreu*, Politische Arithmetik. Heidelberg, 1845. pag. 212.

[10]) Do Rakouska byla loterie uvedena za panování císařovny *Marie Terezie* r. 1751 a od té doby jest podnes zakázáno, sázeti do loterií cizozemských. Statistický přehled Rakouské loterie číslové viz: Statistische Monatschrift. Herausgegeben von Bureau der statistischen Central-Commission. II. Jahrg. VI. Heft. Wien 1876. Ergebnisse des Lotto-Gefälls u. Verhältnisse der Spieleinlagen zu den darauf entfallenden Gewinnsten, für die im Reichsrathe vertretenen Länder, vom J. 1828 bis einschliesslich des J. 1874.

(Pokračování.)