Karel Zahradník

O řešení kvadratických rovnic logarithmy Gaussovými

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 18 (1889), No. 1, 9--17

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122422`

číslici připojíme tolik null, kolik ještě za ní spolehlivých míst následuje.

Na př. $2{\cdot}354, \quad \Delta = \frac{1}{2000}$.

8. Z mezné hodnoty Δ chyby relativní lze naopak souditi na meznou hodnotu δ chyby absolutní. Jestliže dané číslo mezi n spolehlivými místy obsahuje n' míst celistvých, tudíž $n - n'$ míst desetinných, jest

$$\delta = \frac{\alpha}{10^{n-n'+1}},$$

$$\Delta = \frac{\alpha}{a \,.\, 10^{n}},$$

tedy

$$\delta = a\Delta \,.\, 10^{n'-1}.$$

Je-li na př. první platná číslice 4, počet celistvých míst 2 a mez relativní chyby $\frac{1}{1000}$, jest

$$\delta = \frac{4 \,.\, 10}{1000} = 0{\cdot}04,$$

pročež obsahuje dané číslo 3 spolehlivá místa.

Nemá-li dané číslo žádných platných číslic před desetinnou tečkou, posuneme prvé desetinnou tečku v pravo až za první platnou číslici. Na př. 0·0048346 buď spojeno s meznou chybou relativní $\frac{1}{1000}$. Táž relativní chyba přísluší číslu 4·8346, v němž

$$a = 4, \quad \Delta = \frac{1}{1000}, \quad n' = 1, \text{ a tudíž } \delta = \frac{4}{1000} = 0{\cdot}004.$$

Absolutní chyba původního čísla je tedy 0·000004.

(Dokončení.)

O řešení kvadratických rovnic logarithmy Gaussovými.

Podává

Dr. K. Zahradník,

professor při universitě Františka Josefa v Záhřebě.

Jak lze s prospěchem upotřebiti logarithmů Gaussových při řešení rovnic kvadratických v případě, že jsou dány logarithmy součinitelů rovnice a jde-li o logarithmy obou kořenů aneb jen jednoho kořene, ukázal bez důkazu *Gauss*.*)

V následujícím podávám jednoduchý důkaz jím stanovených předpisů.

2. Z logarithmů Gaussových najdeme přímo logarithmy $B = \lg\left(1+\frac{1}{m}\right)$, $C = \lg(1+m)$ příslušné ku $A = \lg m$, totiž ku logarithmu argumentu $m > 1$. Zde platí jak známo relace

$$A + B = C. \tag{1}$$

Spojíme-li podvojně sčítáním neb odčítáním logarithmy sloupců A, B, C, obdržíme tři nové v absolutních hodnotách lišící se sloupce

$$\begin{aligned} B + C &= D \\ A + C &= E \\ B - A &= F. \end{aligned} \tag{2}$$

Zmíněné sloupce D, E, F nacházíme v tabulkách *Vegy* a *Hülse-a***); můžeme však, majíce po ruce obyčejné logarithmy Gaussovy, tyto snadně doplniti v každém jednotlivém případě, jakož z uvedeného příkladu seznáme.

3. Dána budiž rovnice druhého stupně

$$px^2 + qx + r = 0. \tag{3}$$

Kořeny této rovnice mají oba stejná neb opačná znaménka dle toho, jsou-li p i r téhož neb opačného znaménka.

Budiž

$$pr > 0;$$

kořeny jsou tudíž téhož znaménka, a to:

α) realné, když

$$q^2 \geqq 4pr,$$

β) imaginarné, když

$$q^2 < 4pr.$$

Obmezíme se na případ prvý. Kdybychom znali podíl m kořenů rovnice (3), totiž

$$\frac{x_1}{x_2} = m, \tag{4}$$

(kde jsme označili x_1 absolutně větší kořen t. j. $|x_1| > |x_2|$) byla by naše úloha řešena, neb z rovnice (4) plyne

*) *F. Gauss* „Werke" III. díl pg. 255.

**) Sammlung mathematischer Tafeln 1840.

$$\frac{x_1}{x_1+x_2}=\frac{m}{m+1},$$

tudíž

$$x_1=-\frac{q}{p}\frac{1}{1+\frac{1}{m}},$$

(5)

$$x_2=-\frac{q}{p}\cdot\frac{1}{1+m}.$$

Píšeme-li dle *Gaussa*

(6) $$\frac{q}{p}=h,\quad \frac{r}{q}=g,$$

a označíme-li malým písmenem číslo, jehož logarithmus jsme označili velikým písmenem (na př. $\lg n=\mathrm{N}$), můžeme rovnice (5) psáti

(7) $$x_1=-\frac{h}{b},\quad x_2=-\frac{h}{c}.$$

Dle toho je-li $h \gtrless 0$, jsou kořeny rovnice positivné neb negativné; je-li $h<0$ máme*)

(8) $$\lg x_1=\lg(-h)-\mathrm{B},$$
$$\lg x_2=\lg(-h)-\mathrm{C}.$$

4. Nyní je nám ukázati, kterak najdeme logarithmy B, C příslušné k argumentu m. Pomocí rovnice (4) najdeme**)

(9) $$\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=\frac{(m+1)^2}{m}=\frac{q^2}{pr}=\frac{h}{g},$$

tudíž je

(10) $$\frac{h}{g}=\left(1+\frac{1}{m}\right)(1+m)=b\,c=d.$$

Kdybychom měli sloupec D, pro který platí

$$\mathrm{D}=\mathrm{B}+\mathrm{C},$$

hledali bychom rozdíl $\lg h-\lg g$ ve sloupci D a v téže vodorovné čáře ve sloupcích B, C našli bychom příslušné logarithmy B, C ku hledanému argumentu m.

Z rovnice (10) lze vyjádřiti h pomocí g, pro (7) obdržíme

---

*) Pro $h>0$ bylo by

(8′) $$lg(-x_1)=lg\,h-\mathrm{B}$$
$$lg(-x_2)=lgh-\mathrm{C}.$$

**) Patrně je v tomto případě h i g téhož znaménka, což vychází již z rovnice (9) neb z rovnice (6).

druhý tvar řešení, jež s prvým spojivše, vyjádříme následujícím schematem

$$\frac{h}{g} > 4, \quad \begin{aligned} x_1 &= -\frac{h}{b} = -gc, \\ x_2 &= -gb = -\frac{h}{c}.\text{*)} \end{aligned}$$

Příklad. Dáno-li

$$\lg p = 0, \quad \lg(-q) = 0{,}90309, \quad \lg r = 1{,}13640,$$

je

$$\lg(-h) = 0{,}90309, \quad \lg(-q) = 0{,}23331, \quad \lg\frac{h}{g} = 0{,}66978.$$

Z tabulek**) třeba zde znáti

B	C	B + C = D
0,16130	0,50830	0,66960
0,16099	0,50899	0,66998.

Hledajíce 0,66978 ve sloupci D vezmeme nejblíže vyšší logarithmus, a odečtením obdržíme rozdíl 20. Rozdíl logarithmů ve sloupci D, mezi kterými daný logarithmus leží, je $r_d = 38$; příslušné rozdíly u B a C jsou $r_b = 31$, $r_c = 69$, je tudíž $r_c - r_b = r_d$.

Označíme-li ϱ_b, ϱ_c partes proportionales pro sloupce B a C, je

$$\varrho_b = 20 \,.\, \frac{r_b}{r_d} = 16, \quad \varrho_c = 20 \,.\, \frac{r_c}{r_d} = 36,$$

tudíž příslušné

$$\begin{aligned} B &= 0{,}16099 + \varrho_b = 0{,}16115 \\ C &= 0{,}50899 - \varrho_c = 0{,}50863, \end{aligned}$$

tím

$$\lg x_1 = 0{,}74194, \quad \lg x_2 = 0{,}39446.$$

5. Budiž nyní $pr < 0$; v případě tomto jsou kořeny rovnice opačného znaménka; je-li opět $|x_1| > |x_2|$, je znaménko kořene x_1 opačné znaménku hodnoty $h = \frac{q}{p}$. Budiž větší kořen x_1 positivný, i položme

---

*) Mohli jsme i relace

$$x_1 x_2 = \frac{r}{p} = hg$$

rovněž jako rovnice (10) upotřebiti.

**) Počítám zde dle tabulek logarithmických od Köhlera, 1860.

(11) $$\frac{x_1}{-x_2} = 1 + \frac{1}{\mu},$$

kdež je $\mu > 0$. Z této rovnice plyne

(12) $$\begin{aligned} x_1 &= -h(1+\mu), \\ x_2 &= h\mu. \end{aligned}$$

Argument μ, na kterém závisí řešení (12), není nám znám, avšak můžeme jej určiti ze známého vztahu kořenů rovnice (3)

(13) $$x_1 x_2 = \frac{r}{p} = gh,$$

z níž vzhledem k rovnicím (12) plyne

(14) $$-\frac{g}{h} = \mu(1+\mu).$$

Avšak μ může býti buď větší neb menší než jedna, dle toho třeba rozeznávati dva případy,

(15) $$\gamma)\quad \mu = m > 1, \qquad \delta)\quad \mu = \frac{1}{m} < 1.$$

6. *V případě* γ) přechází rovnice (14) ve tvar

(16) $$-\frac{g}{h} = m(1+m) = ac,$$

z níž najdeme logarithmy A, C příslušné ku argumentu m tím, že hledáme logarithmus čísla $-\frac{g}{h}$ ve sloupci E; ve sloupcích A, C v témž řádku našli bychom logarithmy A*), C příslušné ku argumentu hledanému m. Pro sloupec E platí relace

$$\mathrm{E} = \mathrm{A} + \mathrm{C}.$$

Z rovnic (16) a (15γ) můžeme opět h vyjádřiti pomocí g a tím řešení (12) psáti ve tvaru

(17) $$\begin{aligned} x_1 &= -hc = \frac{g}{a} \\ x_2 &= -\frac{g}{c} = ha, \end{aligned}$$

při čemž z rovnice (15γ) plyne podmínka

(18) $$-\frac{g}{h} > 2.$$

7. *V případě* δ) přechází rovnice (14) ve

---

*) Patrně je $a = m$, neboť $lga = \mathrm{A} = lgm$.

$$(19) \qquad -\frac{g}{h} = \frac{1+\frac{1}{m}}{m} = \frac{b}{a},$$

a řešení (12) nabývá tvaru

$$(20) \qquad \begin{aligned} x_1 &= -h\left(1+\frac{1}{m}\right) = -hb, \\ x_2 &= \frac{h}{m} = \frac{h}{a}. \end{aligned}$$

Pomocí sloupce

$$F = B - A,$$

v němž bychom hledali logarithmus čísla $-\frac{g}{h}$, najdeme logarithmy A, B příslušné k témuž argumentu m spůsobem již dříve vytčeným.

Jelikož dle (19) můžeme h vyjádřiti pomocí g, obdržíme tím opět druhé řešení, jež spojeno s prvým podává nám následující schema

$$(21) \qquad \begin{aligned} x_1 &= -hb = ag, \\ x_2 &= -\frac{g}{b} = \frac{h}{a}, \end{aligned}$$

kdež platí [za příčinou rovnic (19) i (15δ)] podmínka

$$(22) \qquad -\frac{g}{h} < 2.$$

Dodatek.

8. Touže cestou můžeme postupovati, chceme-li obdržeti trigonometrické řešení kvadratické rovnice, máme-li logarithmy součinitelů a nemáme-li při ruce logarithmy Gaussovy. V případě α) položili bychom

$$(23) \qquad \frac{x_1}{x_2} = m = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}.$$

Z rovnice této plyne vzhledem ku dané kvadratické rovnici (3)

$$(24) \qquad \begin{aligned} x_1 &= -\frac{q}{p}\sin^2\frac{\varphi}{2}, \\ x_2 &= -\frac{q}{p}\cos^2\frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Úhel pomocný φ určíme z relace

$$x_1 x_2 = \frac{r}{p},$$

z níž obdržíme

(25) $$\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{pr}{q^2}$$

aneb

(26) $$\sin^2\varphi = \frac{4pr}{q^2},$$

což jest známá substituce pro trigonometrické řešení.

Z rovnice (26) určíme pomocný úhel φ, načež z rovnic (24) kořeny x_1, x_2.

Je patrno, že jsme mohli v odstavci 4. upotřebiti substituce $\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} = m$, čímž bychom ihned k cíli došli. Že realnost úhlu φ vyžaduje, by p i r byla téhož znaménka, mimo to $\frac{q^2}{pr} \geqq 4$, vychází již z rovnice (26), což arci se s podmínkami případu (α) shoduje.

Ježto

$$\sin^2\frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{pr}{q^2}},$$

můžeme řešení (24) psáti též ve tvaru

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{r}{p}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

a podobně

$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{r}{p}} \cdot \cot\frac{\varphi}{2},$$

kdež platí znaménko horní neb dolní, dle toho jsou-li p i q různého aneb stejného znaménka.

Upotřebíme-li nyní zkrácenin h i g, můžeme řešení (24) vzhledem k rovnici (25) totiž

$$\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{g}{h}$$

psáti

$$(28)\qquad \begin{aligned} x_1 &= -h\sin^2\frac{\varphi}{2} = -\frac{g}{\cos^2\frac{\varphi}{2}},\\ x_2 &= -\frac{g}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} = -h\cos^2\frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

V případě γ) neb δ) položme

$$(29)\qquad \frac{x_1}{-x_2} = \cot^2\frac{\varphi}{2},$$

z čehož plyne

$$(30)\qquad \begin{aligned} x_1 &= -\frac{q}{p}\,\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi} = -h\,\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi},\\ x_2 &= \frac{q}{p}\,\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi} = h\,\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}. \end{aligned}$$

Znásobíme-li tyto rovnice, obdržíme

$$x_1 x_2 = \frac{r}{p} = -\frac{q^2}{p^2}\,\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\varphi},$$

z kteréžto rovnice plyne

$$(31)\qquad \operatorname{tg}^2\varphi = -\frac{4pr}{q^2} = -\frac{4g}{h}.$$

Z rovnice této*) snadně určíme pomocný úhel φ a dáti řešení (30) tvar

$$\begin{aligned} x_1 &= \pm\sqrt{-\frac{r}{p}}\cot\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{-hg}\cot\frac{\varphi}{2},\\ x_2 &= \mp\sqrt{-\frac{r}{p}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \mp\sqrt{-hg}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \end{aligned}$$

aneb též

$$x_1 = g\,\frac{\cos\varphi}{\sin^2\frac{\varphi}{2}},$$

*) Kdybychom upotřebili zde substituce $\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} = m$, neobdrželi bychom příhodný tvar rovnice (31); zmíněná substituce není tudíž dobře potřebnou, třebas bychom tím rovnice (30) obdrželi v jednodušším tvaru.

$$x_2 = -g \frac{\cos\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Je-li $\frac{q}{p} = h < 0$, je znaménko absolutně většího kořene kladné, opačně v případě $\frac{q}{p} > 0$. Realnost pomocného úhlu vyžaduje v souhlasu s odstavcem 6. a 7., by p a r byla opačného znaménka.

Uvedené řešení plyne též z odstavců 6. a 7. jednoduchou substitucí za

$$m = \frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi} \text{ v případě } \gamma) \text{ a } m = \frac{\cos\varphi}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} \text{ v případě } \delta).$$

Dle toho, je-li

$$\cot^2\frac{\varphi}{2} \lesseqgtr 2,$$

máme buď případ γ) neb δ).

Příspěvek ku zkrácenému počítání.

Sepsal

Otakar Ježek,

s. professor real. gymnasia na Smíchově.

I.

Účelem této stati jest řešiti úlohu:

„Stanovme druhou a třetí mocnosť desetinného čísla buď úplného buď neúplného až na jednu jednotku daného řádu přesně buď nadbytkem neb nedostatkem."

Úloha tato po mém vědomí dosud řešena nebyla a sice nejspíše z důvodů dvou. Učebnice pro školy střední, kde předem by byla na místě, jí neobsahují, ježto instrukce z příčin didaktických nepřejí zkrácenému počítání, pokud by přesahovalo dělení; praktický počtář pak, maje mocniti, zajisté sáhne k tabulkám logarithmickým. Přece však myslím, že řešení této úlohy není