Alois Strnad

Drobné zprávy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 18 (1889), No. 1, 35--45

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122418

Drobné zprávy.

Napsal

A. Strnad,

professor v Hradci Králové.

Relace trigonometrické. Užitím polygonometrické věty, že průmět uzavřené lomené linie na jakékoli ose roven jest nulle, lze vyvoditi následující zajímavé vztahy, které uveřejnil *Laisant*,*) a ve kterých značí Θ hodnotu zcela libovolnou.

1. Je-li současně

$$\sum_1^n A_n \cos x_n = 0, \quad \sum_1^n A_n \cos (x_n + \alpha) = 0,$$

jest též
$$\sum_1^n A_n \cos (x_n + \Theta) = 0.$$

2. Je-li současně

$$\sum_1^n A_n \sin x_n = 0, \quad \sum_1^n A_n \sin (x_n + \alpha) = 0,$$

jest také
$$\sum_1^n A_n \sin (x_n + \Theta) = 0, \quad \sum_1^n A_n \cos (x_n + \Theta) = 0.$$

3. Je-li současně

$$\sum_1^n A_n \sin x_n = 0, \quad \sum_1^n A_n \cos x_n = 0,$$

jest též
$$\sum_1^n A_n \sin (x_n + \Theta) = 0, \quad \sum_1^n A_n \cos (x_n + \Theta) = 0.$$

Podobné vztahy lze dokázati o funkcích hyperbolických na př.:

Je-li současně

$$\sum_1^n (A_n \operatorname{Ch} x_n + B_n \operatorname{Sh} y_n) = 0,$$
$$\sum_1^n (A_n \operatorname{Sh} x_n + B_n \operatorname{Ch} y_n) = 0,$$

jest také
$$\sum_1^n (A_n \operatorname{Ch} (x_n + \Theta) + B_n \operatorname{Sh} (y_n + \Theta)) = 0,$$
$$\sum_1^n (A_n \operatorname{Sh} (x_n + \Theta) + B_n \operatorname{Ch} (y_n + \Theta)) = 0.$$

(Bulletin de la Société mathématique de France, tome XV. 1887, p. 198).

---

*) Předseda mathematické společnosti v Paříži, člen sněmovny francouzské, známý přívrženec gen. Boulangera.

Grafická a mechanická integrace. Úlohu o mechanickém stanovení hodnoty omezeného integrálu, který jest graficky dán ploským obsahem uzavřeného obrazce, řeší jak známo různé druhy tak zvaných planimetrů, z nichž nejrozšířenější jsou planimetr Amslerův, integrující v souřadnicích polárných a planimetr Wettliův, integrující v souřadnicích pravoúhlých. Přístroje tohoto druhu podávají konečný číselný výsledek integrace, neposkytují však názoru o postupu tohoto výkonu a zákonitosti jeho. Teprve v nejnovější době sestrojeny mechanismy, které i těmto podmínkám zadost činí. Jest pro nás zajisté zajímavo, že theoretický k tomu základ položil *prof. Šolín* a sice již r. 1872 v článku „Über graphische Integration", jejž v pojednáních král. české společnosti nauk uveřejnil.

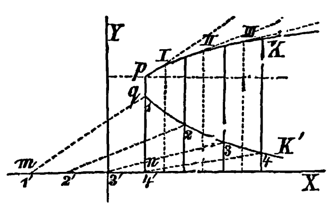
Dána-li jest křivka K′ rovnicí $y' = f'(x)$, lze z ní odvoditi křivku K dle rovnice

$$y = \int f'(x)\,dx = f(x) + c;$$

slove pak K *integrální křivkou* křivky K′, tato naopak *křivkou differenciální* oné. Tečna v libovolném bodě p (x, y) křivky K tvoří s osou úseček úhel φ daný rovnicí

$$tg\,\varphi = \frac{dy}{dx} = y',$$

t. j. úhel, jehož tangenta jest úměrna s pořadnicí bodu q (x, y') křivky K′.



Grafická integrace záleží v tom, abychom ku dané křivce K′ sestrojili příslušnou integrální křivku K. K tomu cíli veďme ku ose Y rovnoběžky, jichž vzájemná vzdálenost rovná se k-tému dílu zvolené jednotky délkové (na obrazci jest $\overline{mn} = 1$, $k = 6$), a které ob jednu vzaty křivku K′ v bodech 1, 2, 3 ... protínají. Body těmito sestrojme přímky 11′, 22′, 33′..., jichž průměty na X jsou vesměs rovny jednotce. Potom zvolme na prvé rovnoběžce kdekoli bod p a sestrojme

p I $\|$ 11′, I II $\|$ 22′, II III $\|$ 33′. . . ;
lomená čára p I II III . . . blíží se křivce integrální tím pře čím větší k zvoleno.

Na této *prof. Šolínem* udané methodě založen jest přístroj ku mechanickému sestrojení křivky integrální, tak nazvaný *integraf*. Poprve sestavil jej *Abdank-Abakanowicz* r. 1878 a od té doby zhotovil jej v několika vždy zdokonalených podobách. Theorii, zařízení i použití jeho vyložil ve spise: *Les intégraphes, la courbe intégrale et ses applications. Paris, Gauthier-Villars, 1886.* Kynematický princip těchto integrafů záleží ve zřízení, kterým by body m, n, p, q spojeny byly tak, aby pohybujíce se vyhověly těmto podmínkám: Body m, n opisují přímku — osu X, při čemž délka $\overline{mn} = 1$ zůstává stálá; bod q pohybuje se po dané křivce K′, pohyb bodu p děje se v každém okamžení v příslušném směru mq. Dráha bodu p jest pak křivka integrální K. Nemůžeme zde podrobně vypsati, jakým způsobem uskutečněn tento mechanismus a jakého užití dochází v technické praxi. Čtenáře, které by tato věc blíže zajímala, odkazujeme k spisu svrchu jmenovanému; v něm vysvětleny též integratory, které sestavili *Boys, Żmurko, Napoli* a *Mestre.*

Hyperbola Kiepertova. Křivku tuto důležitou v geometrii trojúhelníka vyšetřoval poprve *Kiepert (Nouvelles Annales, 1869)*, i bývá často jmenem jeho označována. Sestrojíme-li nad stranami trojúhelníka abc jakožto půdicemi rovnoramenné podobné trojúhelníky bca_1, cab_1, abc_1, protínají se spojnice aa_1, bb_1, cc_1 v bodě jediném p; měníce velikosť úhlu cba_1, obdržíme nekonečně mnoho bodů p a jich geometrickým místem jest pravoúhlá hyperbola. *Brocard*, který křivkou tou mnoho se zabýval (Journal de mathématiques spéciales, 1884. 1885), nazval ji *hyperbolou devíti bodů.* Hyperbola ta prochází vrcholy trojúhelníka abc, průsečíkem výšek jeho, těžištěm, bodem Tarryovým atd. Obsahuje též oba tak zvané stejnoúhlé středy trojúhelníka (centres isogones), průsečíky to přímek spojujících vrcholy trojúhelníka daného s vrcholy trojúhelníků rovnostranných, sestrojených vně neb vnitř nad stranami jeho. Spojnice těchto středů prochází bodem Lemoineovým, půlí vzdálenosť těžiště od průsečíku výšek a jest průměrem hyperboly Kiepertovy; průměrem této jest též přímka spojující průsečík výšek s bodem Tarryovým. Tečny sestrojené k hyperbole K. v těžišti trojúhelníka a v průsečíku výšek protínají se v bodě Lemoineově. Sestrojíme-li nad stranami trojúhelníka čtverce buď vně aneb vnitř, stanoví přímky spojující středy těchto čtverců s protějšími vrcholy trojúhelníka též dvé bodů hyperboly K.; body tyto leží na přímce jdoucí bodem Lemoineovým a tečny stanovené v nich ku hyperbole K. protínají se v středu kružnice opsané o základní trojúhelník.

Tyto a mnohé jiné vlastnosti hyperboly K. ze společného principu vyvodil nejnověji *M'Cay (Mathesis, tome VII. 1887. p. 208)*; způsobem analytickým pojednal o ní *Cesáro (Nouvelles Annales, 1887. p. 231.).*

Racionálné křivky. Z geometrie polohy známa jest věta: Pohybují-li se vrcholy n-úhelníka po n paprscích téhož svazku a otáčí-li se $n-1$ strana jeho kolem $n-1$ pevných bodů, otáčejí se zbývající strana mnohoúhelníka i veškeré úhlopříčny jeho též kolem stálých bodů. *Weill*, tajemník mathematické společnosti v Paříži, ukázal jednoduchou úvahou, že bod středních vzdáleností (centre des moyennes distances) ve mnohoúhelníku onom vytvořuje při tom nejobecnější racionálnou křivku n-ho tupně. *(Nouvelles Annales, 1877. p. 205).*

Zvláštní druh ploch. Známo, že existují spojité funkce nemající určité derivace. (Časopis, ročník XVII., str. 233. (2)). První příklad toho druhu podal *Weierstrass (Crelle, Journal, 1874)*; spojitá totiž funkce realné proměnné x

$$fx = \sum_{0}^{\infty} b^n \cos a^n \pi x,$$

kde a jest číslo celé liché, b číslo kladné větší než 1, nemá pro žádnou hodnotu x určité derivace, je-li $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

Zajímavé geometrické užití funkcí tohoto rázu podává *Wiener* ve svém spise: Lehrbuch der darstellenden Geometrie, II. Bd. 1887, jednaje o tak zvaných plochách rozvinutelných (str. 32). Analyse učí, že každá taková plocha jest plochou přímkovou a že každá rovina tečná dotýká se jí podél přímky. Důkaz vlastností těchto založen jest na podmínce, že každá křivka má v každém svém bodě tečnu a každá plocha v každém svém bodě rovinu tečnou. Myslíme-li si však křivku danou rovnicí $y = fx$, v níž fx značí funkci Weierstrassovou (aneb jinou téhož druhu), nemá tato křivka v obecných bodech svých žádných určitých tečen. Rovněž tak plocha, která obsahuje dvě soustavy shodných takových křivek, nemá obecně rovin tečných. Ukázav, že plochu obsahující dvě soustavy křivek daných funkcí Weierstrassovou lze míti za limitu neuzavřeného mnohostěnu vznikajícího posuvným pohybem lomené linie (Zickzackfläche), podal tím Wiener prvý *příklad plochy rozvinutelné ale ne přímkové.*

Pan prof. *J. Hron* z Hradce Králové zaslal redakci nový a jednoduchý důkaz věty:

Čtverec výšky pravoúhelného trojúhelníka roven jest pravoúhelníku z obou úseček přepony.

Důkaz ten jest následující: *) V pravoúhlém trojúhelníku ABC spustíme s vrcholu C kolmici CD na přeponu AB; na této kolmici sestrojme čtverec CDEF, jehož vrchol E leží na AD. Vedeme-li bodem E přímku EG || AC, kteráž CD protíná v bodě G, jest $\triangle GED \cong \triangle BCD$ a proto $DG = BD$. Mimo to jest $\triangle CDE = \triangle ADG$ a tudíž čtverec CDEF roven jest pravoúhelníku ADGH.

Napsal

Vilém Šťastný,

assistent fysikálního ústavu v Praze.

O proměnlivosti kruhů Saturnových. (*Comptes Rendus*, t. CVI., p. 464.)

Jak známo, jeví se kruh Saturnův pozorovaný silnými dalekohledy sestávajícím ze tří kruhů: z vnějšího, podobného jemu vnitřního, ležícího blíže k planetě, a konečně z nejbližšího k planetě mlhovitého, kterýžto zdá se býti temnějším, než ostatní dva.

Na všech třech kruzích pak pozorují se při bedlivějším vyšetření kruhové pruhy, které je rozdělují na tenčí pásy; pruhům těm

*) Obrazec račiž si čtenář sám sestrojiti.

dána i zvláštní jména: rozstup Enke-ho, Cassini-ho a t. p. (V dalším budeme označovati vždy písmenem *A* vnější, *B* vnitřní a *C* mlhovitý kruh.)

Nejpravděpodobnější hypothesou vnitřní úpravy Saturnových kruhů jeví se náhled vyslovený v minulém století *Cassini-m* a v době nynější rozvinutý *Maxwellem,* podle kterého kruhy ty nesestávají ze souvislé hmoty tuhé neb kapalné, nýbrž z celého roje družic planety; družice ty však, jakož i mezery mezi nimi jsou tak malé, že nemohou býti rozeznány dalekohledem. V kruhu vnějším a vnitřním skupeny jsou družice těsněji, v mlhovitém naopak jsou značně vzdáleny jedna od druhé, čímž se i temnější barva kruhu posledního vysvětluje.

V této hypothese a v rotaci kruhů dlužno hledati objasnění pozorování Trouvelot-ových, o nichž chceme promluviti.

V r. 1884 pronesl se *Trouvelot* na základě svých pozorování kruhů Saturnových, že „kruhy planety té nejsou nijak trvalé, podrobeny jsouce podstatným a stálým změnám.“

Od té doby věnovali astronomové více pozornosti tomuto zjevu, a nyní máme již značný počet pozorování potvrzujících úsudek amerického astronoma.

Ve zprávě této míníme naznačiti povahu změn těch na základě posledních pozorování Trouvelot-ových z let 1885, 1886 a 1887.

Kruh A. 20. listopadu 1885 byla úzká a velmi jasná zona tohoto kruhu sousedící s rozstupem Cassini-ho jasnější na západním oblouku (anse). 18. února 1886 táž zona byla širší na východním oblouku (anse).

Rozstup Enkeho. Tento rozstup, který obyčejně je spíše podoben mírnému prohloubení — žlábku — než rozstupu v plném toho slova smyslu, byl 20. listopadu 1885 neviditelným na západním oblouku (anse); na protilehlém oblouku bylo jej viděti toliko místy a jevil se tu ve tvaru nepravidelné tečkované čáry. 1. a 6. února 1886 bylo jej viděti, ač velmi slabě, na obou obloucích (anses), kdežto 9. a 18. téhož měsíce jen na oblouku východním, kde jevil se tenkou našedivělou črtou na krajích odstíněnou. 30. prosince 1886 a 26. ledna 1887 byl, ač slabě, pozorován na obou obloucích, při čemž se nalézal blíže k rozstupu Cassiniho, než ku vnějšímu okraji kruhu *A.*

Kruh B. Změny pozorované na tomto kruhu vztahují se hlavně ku vnitřní jeho zoně sousedící s kruhem *C.* Při pozorování jeví se zona ta tmavší a ostřeji omezenou na vnějším svém okraji; čím více se však blíží k temnému kruhu (*C*), tím více tetiva její se zmenšuje.

20. listopadu 1885, jakož i 1. a 6. dubna 1886 byla tato zona, zcela jasně jsouc viditelnou na obou obloucích, více odstíněnou na západní než na východní části. 18. února bylo ji viděti stejně na obou obloucích. 11. března a 30. prosince téhož roku poskytoval kruh *B* týž pohled jako v r. 1884: jeho viditelná zona byla úzkou i jasnou, vnitřní pak zřetelně ohraničená jevila se o stejných tetivách na obou obloucích. 26. ledna změnilo se vzezření zony posledně jmenované, objevila se totiž tmavší na východním, než na západním oblouku.

Kruh C. Změny tohoto kruhu jsou neméně význačny. 20. listopadu 1885 bylo jej jasněji viděti na východním oblouku, kde měl barvu šedé břidlice, kdežto na západním jevil se temně červeným.

21. listopadu bylo téměř totéž pozorováno. Právě tak 1. a 30. prosince vystupoval mlhový kruh jasněji na východě, kde byl barvy namodralé, než na západě, kde byl zabarven do červena. Naproti tomu bylo jej 1., 6. a 9. února 1886 jasněji viděti na západním oblouku, než na východním. 30. listopadu konečně jevil se kruh *C* ostře odděleným od kruhu *B* temným pruhem, který možno bylo považovati za rozstup Struve-ho.

O kosmickém původu některých druhů prachu v naší atmosfeře. (*Comptes Rendus,* t. CVI., p. 964.)

Dávno již dospěli učenci ku přesvědčení, že část prachu v atmosfeře země naší se vznášejícího vniká do ní z prostoru světového. Prach takový nalezen byl v padajícím na zem sněhu a dešti, na sněžném pokrovu alpských vršin a konečně Nordenskjöldem ve sněhu severních krajin polárních, kterého se asi do té doby noha lidská nikdy nedotkla.

Bytnosť kosmického prachu v atmosfeře naší pochopitelna a priori: k nám stále zalétají meteory; největší z nich dostihují povrchu zemského, většina promění se však v atmosfeře naší v prach, který později buď sám dopadá na zem aneb bývá k ní stržen srážkami atmosferickými.

Jisté množství prachu, které způsobem posledně vytknutým na zem spadlo, prozkoumal *Démoulin,* schytav (na Pobřeží Zlata v Guinei) za měsíc červenec a srpen 1887 dostatečně vody dešťové prach ten obsahující. Ve vodě té konstatován dvojí druh prachu: magnetického a takového, na který magnet nepůsobil; prozkoumán byl toliko první, a to proto, že prozkoumání druhého jest příliš nesnadným. Pozorováním mikroskopickým prvého druhu prachu objeveno, že sestává z mikro-aerolitů, kteréž dle barvy, tvaru a citlivosti magnetické dělí autor na tři skupiny totožné s 3 skupinami klassifikace Daubrée-ovy: holosidères, sissidères a sporadosidères.

K prvnímu typu (holosidères) náležejí kulovitá tělíska — vyskytnuvší se velmi často při pozorováních mikroskopických — drsného neb hladkého povrchu, vždy černě zbarvená a silně magnetická; někdy jeví se na povrchu jich malé kruhovité prohlubiny. Odpovídají úplně železným kuličkám při kalení povstávajícím.

K téže skupině řadí autor i jiná tělíska magnetická lišící se od předchozích tvarem a někdy i barvou: jsou to buď černá zrnka s ostrými neb zaokrouhlenými obrysy, aneb i hranaté plíšky žluto-zelené silně magnetické, které mají obyčejně černý okraj bud spojitý, buď přetržitý.

Mikroaërolity tvořící druhou skupinu (sissidères) lze snadno poznati po jejich houbovité struktuře. Při počátečním pozorování zdály se býti velice podobnými dendritům, později se však shledalo, že jsou tvarem svým shodny s korály. Zajímavou jest tu ještě okolnosť, že jich rozvětvení končí se vždy kuličkami. Tělíska ta jsou taktéž černá a silně magnetická.

Třetí skupinu (sporadosidères) konečně tvoří železité částice pomíšené s kamenitými různých barev: zelené, hnědé, žluto-červené, šedé a j. Tělíska tato jsou většinou málo magnetická.

Galvanická vodivosť prázdnoty. (*A. Föppl*, Wied. Ann. 33, p. 492., 1888.)

Prázdnoty v plném toho slova smyslu — rozumí se samo sebou — nikdy obdržeti nemůžeme, neboť vyčerpáme-li z daného prostoru všechen plyn, nalézá se v něm přece ještě ether; možno však nynějšími prostředky dosíci velmi přibližně toho, aby určitý prostor neobsahoval než ether.

Z různých stran, zejména pak Edlundem a Goldsteinem, bylo tvrzeno, že prázdnota jest dobrým vodičem, že však tato vlastnosť její nepřichází k platnosti z té příčiny, že nastává polarisace elektrod, aneb že zředěné plyny — v Geisslerových rourkách — kladou odpor vedení proudu.

Vyšetření vodivosti jakéhokoliv ústředí bude nejspolehlivějším, praví autor, zřídíme-li z dané látky rovnoměrný, uzavřený kruh a pozorujeme-li pak v něm proud indukcí vzbuzený.

Posud nebylo tohoto způsobu vyšetření netoliko nikdy užito, ale i návrh methody té se posud nikde nevyskytl. Autor jest přesvědčen, že bychom obdrželi, užívajíce methody té, mnohé závažné výsledky v různých případech.

Aby se obdržel uzavřený i rovnoměrný kruh z prázdnoty, užito bylo dvou spirál ze skleněných rourek, ze kterých byl vzduch tak dalece vyčerpán vývěvou rtuťovou, že se v nich nalézaly jen páry rtuťové.

Povstání proudu indukovaného v kruhu z prázdnoty může býti dokázáno jednak na základě účinků magnetických, jednak thermických aneb i světelných.

Autor užil při svém vyšetření prostředku prvého a posledního; promluvíme toliko o prvém.

Spirála z měděného drátu (A) 7·1 *cm* vnitřního průměru byla spojena s póly galvanické baterie 6—8 článků Bunsenových. Do této spirály vložena byla druhá (B) ze skleněné rourky obsahující dva závity; vnitřní průměr spirály té byl 3·3 *cm*, při některých pokusech naplněna byla dutina válce — na jehož obvodu si spirálu můžeme mysliti vinutou — měkkými železnými dráty.

Společná osa obou spirál stála vertikalně. Bylo-li třeba pozorovati indukovaný proud z účinku jeho na magnetku, vedena byla od toho konce spirály B, kde se nalézalo hrdélko, spojovací rourka k hrdélku třetí menší spirály (C), zhotovené právě tak, jako B; osa její byla horizontalná a splývala se směrem od východu k západu; uvnitř spirály té umístěno bylo magnetické zrcádko, jehož kyvy mohly pak býti pozorovány. Od rourek spojujících obě spirály vedeny byly mimo to větve ku vývěvě rtuťové opatřené kohoutem.

Hlavní proud spirály A nesměl jeviti žádného účinku na magnetku, což při pokusech bylo i konstatováno.

Všechny pokusy provedené s kruhem z prázdnoty utvořeným daly výsledky záporné, ani jednou nepodařilo se dokázati indukovaný proud, který by se byl musel přece objeviti při přerušování hlavního proudu, kdyby prázdnota byla dobrým vodičem.

Záporné výsledky obdržely se i tehdy, když vzato bylo ku pokusu 25 akkumulátorů. Na základě těchto svých pokusů tvrdí autor, že náhled Goldsteinův a Edlundův o prázdnotě, jakoby tato dobrým vodičem byla, jest bezpodstatným.

Vliv světla na tepelnou vodivosť krystallického selenu.

(*Bellati e Lusanna*, Beibl. z. Wied. Ann. 11, p. 818, 1887.)

Autoři vytkli si cílem svých pozorování vyšetřiti, existuje-li vliv světla na tepelnou vodivosť selenu a našli skutečně vliv takový. Za tím účelem připraveny byly z krystallického selenu okrouhlé lístky tloušťky od 0·3—0·4 *mm* a 25 *mm* průměru, kteréž byly pokryty tenkou vrstvou dvojné soli $Cu_2\ J_2$, $Hg\ J_2$. Při obyčejné temperatuře jest tato sůl barvy sytě červené, zahřeje-li se však do 70°, nabývá barvy temně čokoládové.

Jeden bod selenového lístku byl silně zahřát v oblouk sehnutým platinovým drátem, jenž rozžhaven byl proudem elektrickým. Jakmile nastalo vyrovnání temperatury, šířilo se temně čokoládové zbarvení v kruhu určitého poloměru.

Pokus byl proveden jak v temnotě, tak i při osvětlení. Zdrojem světla bylo světlo sluneční procházející temně lazurovým roztokem CuO v ammoniaku.

Ve všech případech určen byl přesně poloměr kruhu, až ku kterému se šířilo temné zbarvení výše uvedené sloučeniny.

Za příklad uvedeme výsledek několika pozorování, kde udán poloměr vyjádřený v jakýchsi jedničkách:

	Bez světla:	V modrém světle:
	116	126
	116	126
	115	126
Průměrná hodnota	115·7	126.

Z toho plyne, že poměr vodivosti tepelné při osvětlení a bez něho rovná se průměrně 1·13; usnadňuje tudíž světlo velmi patrně tepelnou vodivosť selenu.

Úlohy.

Úloha 1.

Řešiti rovnici

$$\sqrt[5]{x+a}+\sqrt[5]{x-a}=\sqrt[5]{2x}.$$

Prof. A. Strnad.

Úloha 2.

Dokázati, že příčka půlící úhel dvou stran trojúhelníka jest menší jich harmonického, a tedy též jak geometrického tak arithmetického jich průměru. *Týž.*

Úloha 3.

Ze stran lichoběžníka vypočítati jeho úhlopříčny. *Týž.*

Úloha 4.

Jsou-li α, β, γ úhly, ve kterých jest zříti osy pravidelného osmistěnu z kteréhokoli bodu vepsané plochy kulové, jest

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma=6.$$

Týž.