Vincenc Jarolímek

O určité kongruenci paprskové [4.4]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 2, 152--156

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122410`

5.) Zbývá ještě promluviti o souvislosti vzorů zde podaných s analytickou geometrií *).

Je-li Π libovolná přímka soustavy pravoúhelných souřadnic a

$$\Pi \equiv \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0$$

rovnici té přímky. Vyhledáme-li nomografický bod veličin α a β, pak rovnice $\Pi = o$ čtena nomograficky praví nám, že přímka procházející tímto bodem protne obě osy U a V ve dvou bodech, vzdálených od bodů O_u a O_v o veličiny x a y, vyhovující rovnici

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0.$$

Nomografický bod jest tedy aequivalentem přímky.

Snadno přesvědčíme se nyní o platnosti následující věty:

Obalují-li přímky v analytické soustavě souřadnic křivku, leží i jich nomografické body na určité křivce.

Tím dospěli jsme k nadmíru důležité větě pro praktickou mathematiku již proto, poněvadž při badáních fysikálních často nalezáme diagramy mřížkové.

Abychom uvedli jen jeden všeobecně přístupný příklad, jmenujeme diagram v *Akustice prof. Strouhala* na str. 276. Čtenář nechť vyšetří přesný vzorek.

O určité kongruenci paprskové [4, 4].

Podává prof. **V. Jarolímek.**

1. Předpokládejme tři projektivné svazky paprskové $s_1 (A_1 B_1 C_1 \ldots) \barwedge s_2 (A_2 B_2 C_2 \ldots) \barwedge s_3 (A_3 B_3 C_3 \ldots)$ ležící ve třech různoběžných rovinách $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Veškeré paprsky, jež protínají homologické paprsky svazků, na př. $(A_1 A_2 A_3)$, $(B_1 B_2 B_3) \ldots$, vyplňují kongruenci [4, 4] t. j. čtvrtého řádu a čtvrté třídy, tudíž čtvrtého stupně **C.** Důkaz:

---

*) Čtenář nechť si laskavě přečte oddíl 84. známého díla: *Fiedler-Salmon*: »Analytische Geometrie der Kegelschnitte« (V. vyd.).

Z každého bodu v prostoru t promítají se svazky $\left\{\begin{matrix} s_1, s_2 \\ s_1, s_3 \end{matrix}\right.$ projektivnými svazky rovinovými, jichž osy $\left\{\begin{matrix} \overline{ts_1}, \overline{ts_2} \\ \overline{ts_1}, \overline{ts_3} \end{matrix}\right.$ se protínají, které tudíž vytvořují kuželové plochy 2. stupně $\left\{\begin{matrix} K_3 \\ K_2 \end{matrix}\right.$, jichž površky protínajíce vždy dva homologické paprsky svazků $\left\{\begin{matrix} s_1, s_2 \\ s_1, s_3 \end{matrix}\right.$, v kongruenci jsou obsaženy. Plochy kuželové $K_3\ K_2$ pronikají se ve čtyřech přímkách, jež bodem t procházejíce kongruenci náležejí; tato jest tudíž 4. řádu.

Je samozřejmo, že tytéž čtyři přímky leží i na ploše kuželové K_1, kterou vytvořují ony projektivné svazky rovinové, jimiž se svazky paprskové s_2, s_3 z bodu t promítají.

Každou rovinou v prostoru τ protínají se svazky $\left\{\begin{matrix} s_1, s_2 \\ s_1, s_3 \end{matrix}\right.$ projektivnými řadami bodovými, jichž spojnice $\left\{\begin{matrix} \overline{\tau\sigma_1}, \overline{\tau\sigma_2} \\ \overline{\tau\sigma_1}, \overline{\tau\sigma_3} \end{matrix}\right.$ se protínají, které tudíž vytvořují svazky 2. třídy, obalující kuželosečky $\left\{\begin{matrix} L_3 \\ L_2 \end{matrix}\right.$, jichž tečny protínajíce vždy dva homologické paprsky svazků $\left\{\begin{matrix} s_1, s_2 \\ s_1, s_3 \end{matrix}\right.$, v kongruenci jsou obsaženy. Kuželosečky L_3, L_2 mají společné čtyři tečny, jež v rovině τ ležíce kongruenci náležejí; tato jest tudíž 4. třídy.

Je samozřejmo, že tytéž čtyři tečny dotýkají se i kuželosečky L_1, kterou vytvořují ony projektivné řady bodové, v nichž se svazky paprskové s_2, s_3 rovinou τ protínají.

Anebo: Přímky, jež protínají homologické paprsky svazků s_1, s_2, resp. s_1, s_3 nebo s_2, s_3, vyplňují, jak povědomo, *kvadratický komplex* tetraedrální (Hirstův) $\mathbf{T}_3$, resp. $\mathbf{T}_2$ nebo $\mathbf{T}_1$; společným pronikem těchto tří komplexů je kongruence paprsková [4, 4]. K_1, K_2, K_3 jsou komplexové plochy kuželové, L_1, L_2, L_3 komplexové kuželosečky.

2. Je-li $t \equiv s_1$, náleží kuželová plocha 2. stupně K_1 kongruenci $\mathbf{C}$ celá; neboť každý paprsek, který jda bodem s_1 seče dva homologické paprsky, na př. A_2, A_3 svazků s_2, s_3, seče také paprsek A_1 v bodě s_1; to-

Je-li $\tau \equiv \sigma_1$, náleží paprskový svazek 2. třídy L_1 kongruenci $\mathbf{C}$ celý; neboť každý paprsek, který leže v rovině σ_1 seče dva homologické paprsky, na př. A_2, A_3 svazků s_2, s_3, seče také paprsek A_1, ležící s ním v též platí pro $t \equiv s_2$ nebo s_3. Jsou tedy s_1, s_2, s_3 *singulární body* kongruence, jakožto středy tří ploch kuželových 2. stupně, v kongruenci obsažených.

téže rovině σ_1; totéž platí pro $\tau \equiv \sigma_2$ nebo σ_3. Jsou tedy σ_1, σ_2, σ_3 *singulární roviny* kongruence, jakožto roviny tří svazků 2. třídy, v kongruenci obsažených.

3. Veškeré paprsky, jež protínají tři homologické paprsky svazků, na př. A_1, A_2, A_3, tvoří sborcený svazek paprskový 2. stupně, jenž vyplňuje obecně hyperboloid jednodílný. Obsahuje tedy kongruence **C** ∞^1 *hyperboloidů* sborcených. Výjimkou jest tato plocha *hyperbolickým paraboloidem HP*, jsou-li totiž homologické paprsky na př. Q_1, Q_2, Q_3 rovnoběžny s jednou rovinou.

Plochu HP sestrojíme takto. Bodem s_1 proložme rovinu ϱ_A tak, aby $A_2 \parallel \varrho_A \parallel A_3$, a sestrojme průsečnici $\overline{\sigma_1 \varrho_A} \equiv A'$. Obecně A' nebude $\equiv A_1$, v kterémžto případě náhodném byly by již A_1, A_2, A_3 řídícími přímkami paraboloidu. Opakujme tedy konstrukci s dalšími trojinami homologických paprsků B_1, B_2, B_3 a C_1, C_2, C_3. Proložme bodem s_1 rovinu ϱ_B tak, aby $B_2 \parallel \varrho_B \parallel B_3$, bodem s_1 rovinu ϱ_C, aby $C_2 \parallel \varrho_C \parallel C_3$, a stanovme průsečnice $\overline{\sigma_1 \varrho_B} \equiv B'$, $\overline{\sigma_1 \varrho_C} \equiv C'$. Tím určeny jsou v rovině σ_1 svazky $s_1\,(A'B'C'\ldots) \barwedge s_1\,(A_1 B_1 C_1 \ldots)$. Tyto dva soumístné svazky projektivné mají dva paprsky samodružné $Q' \equiv Q_1$, $R' \equiv R_1$, reálné či imaginárné. Jsou-li Q_2, Q_3; R_2, R_3 paprsky svazků s_2, s_3 homologické ku Q_1; R_1, budou $(Q_1 Q_2 Q_3)$, $(R_1 R_2 R_3)$ řídící přímky dvou hyperbolických paraboloidů v kongruenci **C** obsažených — pro případ reality paprsků Q', R'.

K řešení úlohy dospějeme i touto úvahou. Svazky s_1, s_2, s_3 vytínají na úběžných přímkách U^{σ_1}, U^{σ_2}, U^{σ_3} svých rovin σ_1, σ_2, σ_3 tři řady projektivné $(a_1, b_1, c_1 \ldots) \barwedge (a_2\, b_2\, c_2 \ldots) \barwedge (a_3, b_3, c_3 \ldots)$. Jde o sestrojení trojiny homologických bodů q_1, q_2, q_3, které by ležely na jedné přímce, jež bude totožna s jednou úběžnou přímkou plochy HP. Paprsky $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{b_1 b_2}$, $\overline{c_1 c_2} \ldots$ vytínají na přímce U^{σ_1} řadu $(a'b'c' \ldots) \barwedge (a_1 b_1 c_1 \ldots)$; jsou-li samodružné body těchto soumístných řad q_1, r_1 reálné, stačí stanoviti na U^{σ_2} body q_2, r_2 homologické ku q_1, r_1, načež $\overline{q_1 q_2}$, $\overline{r_1 r_2}$ jsou úběžné přímky dvou HP v **C** obsažených. Promítneme-li uvažované úběžné útvary z bodu s_1 centrálně, obdržíme řešení prvé.

4. V odstavci 2. bylo dotčeno singularity bodů s_1, s_2, s_3 a rovin σ_1, σ_2, σ_3. K dalším prvkům singulárním dospějeme touto

úvahou. Svazky s_1, s_2 vytínají z průsečnice rovin $\overline{\sigma_1\sigma_2} \equiv P_3$ dvě projektivné řady; mají-li tyto dva samodružné body reálné, na př. x_{12}, y_{12}, protínají se v nich homologické paprsky $\overline{s_1x_1} \equiv X_1$, $\overline{s_2x_2} \equiv X_2$; $\overline{s_1y_1} \equiv Y_1$, $\overline{s_2y_2} \equiv Y_2$. Hlavní čtyřstěn $s_1s_2x_{12}y_{12}$ komplexu T_3 jest v tomto případě reálný. Jsou-li pak X_3, Y_3 paprsky svazku s_3, homologické ku X_1X_2, Y_1Y_2, náležejí patrně kongruenci veškeré paprsky svazku x_{12}, obsaženého v rovině $(x_{12}X_3)$, i paprsky svazku y_{12}, ležícího v rovině $(y_{12}Y_3)$. Je-li dále $\begin{cases}\xi_3\\ \eta_3\end{cases}$ průsečík paprsku $\begin{cases}X_3\\ Y_3\end{cases}$ s rovinou $\begin{matrix}(X_1X_2)\\(Y_1Y_2)\end{matrix}$, náleží ke kongruenci také svazek $\begin{cases}\xi_3\\ \eta_3\end{cases}$, ležící v rovině $\begin{matrix}(X_1X_2)\\(Y_1Y_2)\end{matrix}$.

Tím nalezeny jsou další čtyři body singulární x_{12}, y_{12}, ξ_3, η_3 a další čtyři roviny singulární $(x_{12}X_3)$, $(y_{12}Y_3)$, (X_1X_2), (Y_1Y_2). A mají-li posléze i komplexy T_2, T_1 reálné hlavní čtyřstěny, dostaneme v nich dalších 8 bodův a 8 rovin singulárních:

Kongruence **C** *má obecně patnáct bodův a tolikéž rovin singulárních.*

5. Předpokládejme *čtyři* vespolek projektivné svazky paprskové $s_1 \overline{\wedge}\, s_2 \overline{\wedge}\, s_3 \overline{\wedge}\, s_4$ v různých rovinách $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$. Prvé tři svazky určují příčkami homologických paprsků kongruenci **C** [4, 4] a svazky $s_3 \overline{\wedge}\, s_4$ komplex T_4. Společné paprsky čili „pronik“ kongruence [4, 4] a komplexu kvadratického vyplňují sborcenou plochu stupně $(4 + 4)\, 2 = 16$ (Sturm, Liniengeometrie I, p. 43.), tedy:

Transversály homologických paprsků čtyř projektivných svazků, jež leží v různých rovinách, vyplňují sborcenou plochu stupně šestnáctého.

K témuž číslu dospějeme také úvahou: svazky $s_1 \overline{\wedge}\, s_2$ určují komplex Hirstův T_{12}, svazky $s_2 \overline{\wedge}\, s_3$ komplex T_{23}, svazky $s_3 \overline{\wedge}\, s_4$, komplex T_{34}, a společným pronikem tří komplexů kvadratických je sborcená plocha stupně $2 \,.\, 2^3 = 16$.

6. Dáno-li posléze pět proj. svazků v různých rovinách, připojíme ke komplexům právě uvažovaným ještě čtvrtý T_{45}, vytvořený svazky $s_4 \overline{\wedge}\, s_5$, načež pronik čtyř komplexů, jichž stupně jsou p_i $(i = 1, \ldots 4)$, skládá se ze $2p_1p_2p_3p_4$ společných paprsků, v našem případě tedy ze 32. Ježto pak čtyřem mimo-

běžkám příslušejí dvě společné příčky, reálné či imaginárné, vyplývá z úvahy naší věta:

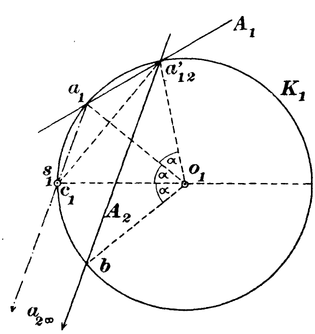
Leží-li pět projektivních svazků paprskových v různých rovinách, obsahuje každý z nich obecně šestnáct paprsků, z nichž každý je přeťat oběma transversálami homologických paprskův ostatních čtyř svazků, nebo jinak řečeno: existuje obecně 32 přímek, z nichž každá seče pět homologických paprsků daných svazků projektivných.

O zvláštní ploše sborcené.

Frant. Kadeřávek, assistent české techniky v Praze.

(Dokončení.)

Podobně z obrazce 6., v němž sestrojen půdorys A_1 libovolné površky dané plochy, jakož i centrálný obraz A_2 téže přímky na rovinu π pro střed promítání c (viz též znázor.



Obr. 6.

obr. 1[a]), vidno, že body a'_2 a $b \equiv A_2 \times K_1$ pohybují se v K_1 úhlovými rychlostmi 2α a α směrů opačných; i obaluje A_2 tentokráte známou hypocykloidu Steinerovu o třech úvratech, dotýkající se kružnice K_1 *).

Důležitý však pro naše vyšetřování jest obrys dané plochy na rovinu souměrnosti (Os) pro paprsky kolmé k této rovině.

---

*) Wieleitner: Sp. eb. K. p. 207 a 242.