Josef Klobouček

Poloha dvou sdružených polár v lineárním komplexu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 1, 30--38

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122392

Tak na př. harmonická funkce $u(x, y)$ nabývá ve středu kružnice hodnoty, která se rovná arithmetickému středu hodnot na obvodě kružnice; ale $log\ u$ není harmonickou funkcí proměnných x a y, a jeho hodnota ve středu kružnice nerovná se arithmetickému středu hodnot na obvodě.

Poloha dvou sdružených polár v linearním komplexu.

Napsal Dr. **Jos. Klobouček.**

Sturm ve známém díle svém [1]) stanoví četné metrické vztahy, které váží polohu dvou sdružených polár k základním útvarům linearního komplexu. Některé z těchto vztahů dají se ještě určitěji vymeziti a i zjednodušiti; poněvadž pak i Zindler [2]) podobným způsobem o poloze dvou polár v lin. komplexu se zmiňuje, pokusil jsem se o to polohu tuto blíže vyšetřiti a výsledek v krátkosti uvádím.

Jmenujme h paprsek kolmo protínající dvě sdružené poláry l, l' a osu komplexu a a budiž dále u nekonečně vzdálená přímka roviny kolmé k a. Všecky přímky povrchové, soustavy l, l', pravoúhlého paraboloidu P obsahujícího přímky $aull'$ jsou sdruženými polárami v daném komplexu, jsou-li též korrespondujícími přímkami v involuci (au, ll'). Přímky druhé soustavy paraboloidu P jsou paprsky komplexu protínající kolmo osu a [3]), k nimž náleží i paprsek h.

Buďtež dále p, φ délka nejkratší příčky mezi osou a a kteroukoliv přímkou a úhel této přímky s osou a.

Vzhledem na základní vlastnost linearního komplexu, že translačním a rotačním pohybem kolem osy a dá se sám v sebe převáděti, omezme se jen na pozorování paprsků resp. polár, jež kolmo protínají paprsek h. Délku p lze potom měřiti na paprsku h od bodu $A \equiv (ha)$ kladně a záporně v mezích

---

1) R. Sturm: Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie etc. I. 1892.

2) K. Zindler: Liniengeometrie mit Anwendungen I. 1902.

3) Sturm: Die Gebilde 1. pg. 83.

$-\infty, +\infty$; úhel φ v mezích $-90^0, +90^0$ na rovině jdoucí osou a kolmo k paprsku h a sice od osy a k orthog. průmětu uvažovaného paprsku na tuto rovinu kladně v opačném smyslu točení rafie u hodin, záporně ve smyslu opačném.

Jest patrno a známo, hledíme-li nejprve k paprskům g, které přísluší komplexu, že jest součin $r tg\delta = \varkappa$ stálý a téhož znamení pro kterýkoliv paprsek q, při čemž r, δ mají význam veličin p, φ a jsou také tak měřeny. Pro levotočivý komplex jest tento součin, který jmenujeme parametrem komplexu, záporný, pro pravotočivý kladný. Levotočivý komplex točí, jak známo, k levé ruce pozorovatele nacházejícího se v ose komplexu lhostejno v kteroukoliv stranu, hořejší neb dolejší, hlavou obráceného. Pravo točivý komplex točí k pravé ruce.

Pro paprsky náležející komplexu lze se omeziti jen na hodnoty $r > 0$, volíme-li směr paprsku h od bodu A na př. vpřed za kladný, a uvažovati takto vlastně délky r absolutně, jak činí Dr. Sturm v citovaném díle. Nelze toho však činiti již u dvou konjugovaných polár l, l'; pro ně platí, jak známo, vztah

$$p \; tg \; \varphi' = \varkappa, \quad p' \; tg \; \varphi = \varkappa,$$

neboť pak nutno, jak skutečně také Sturm[4]) činí, měniti znamení parametru $\varkappa$.

V obraze 1. znázorněn případ levotočivého komplexu. Dvěma bodům P, P' na paprsku h, jenž kolmo seče osu a v bodě A, přísluší roviny nullové α, α'. Rovina $\alpha_0 \perp a$ v bodě A přísluší tomuto bodu jakožto rovina nullová, rovina α_∞ vedená osou a přísluší bodu nekonečně vzdálenému paprsku h. Položíme-li jednu z konjug. polár l do roviny α kolmo k h, jde, jak známo, l' polem P roviny α a leží v rovině α' nullové k bodu $(lh) \equiv P'$ a jest kolma k h. Odtud snadno plyne, je-li l určeno veličinami $(p\varphi)$, l' veličinami (p', φ) hořejší vztah

$$p' \,.\, tg \; \varphi = p \,.\, tg \; \varphi' = \varkappa < 0.$$

Sledujeme-li znaménka jednotlivých veličin, seznáme, že součiny tyto jsou záporné, což odpovídá též záporné hodnotě parametru levotočivého komplexu.

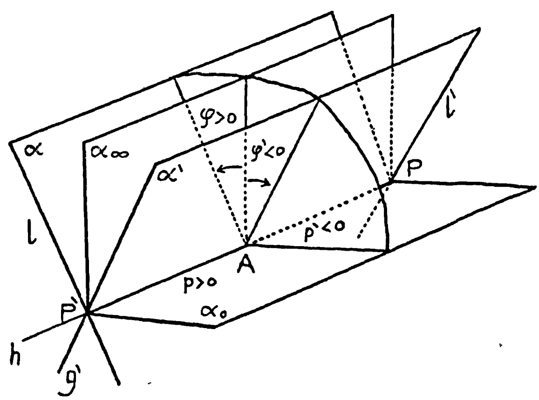
---

[4]) Ibidem pg. 96.

Vytkneme-li jednu z polár l libovolně, jest tím již celý pravoúhlý paraboloid P určen, ježto i jeho další přímky a a přímka nekonečně vzdálená u jsou dány. Tím také stanoven jest i distribuční parametr λ paprsku h a tudíž platí

$$p \; cotg \; \varphi = p' \; cotg \; \varphi' = \lambda,$$

při čemž λ měří vzdálenost tečné roviny odchýlené od roviny centrálné (ha) o úhel $\pm 45^0$. dle toho, jaké znaménko má dle předchozích sjednání λ. Je-li tedy smysl šroubového točení zvolené poláry l kolem osy a záporný (levotočivý), jest $\lambda < 0$, jinak $\lambda > 0$.



Obr. 1.

Z obou vztahů vyplývá:

$$p \, . \, p' = \varkappa \lambda$$

$$tg \; \varphi \, . \, tg \; \varphi' = \frac{\varkappa}{\lambda}$$

jednak pro involuci bodů (lh), $(l'h)$ jednak pro involuci rovin (lh), $(l'h)$ na paprsku h. Obě involuce jsou současně hyperbolické nebo obě elliptické; prvý případ nastává, jsou-li $\varkappa$, λ téhož znamení, druhý jsou-li $\varkappa$, λ opačných znamení. Je-li tedy l v levo(pravo)točivém komplexu levo(pravo)točivá, jest její konjug. polára l' levo(pravo)točivá a jest na téže straně jako l vzhledem k ose komplexu. Je-li l v levo(pravo)točivém komplexu pravo(levo)točivá, jest její polára l' též pravo(levo)točivá, avšak na opačné straně vzhledem k ose komplexu. Formulace Zindlerova[5]) opírá se předem o projekci obou polár l, l' na rovinu jdoucí osou a a kolmo k h a pak teprve z polohy této projekce vzhledem k ose a soudí na polohu bodů (hl), (hl') vzhledem k bodu (ha).

Můžeme tedy říci: dvě sdružené poláry lin. komplexu zůstávají vzhledem k ose komplexu na téže straně, točí-li stejně s komplexem (kolem jeho osy); jsou na opačných stranách osy, jsou-li s komplexem opačného točení. K tomu ovšem stačí, aby předem zvolená z polár byla s komplexem buď téhož nebo opačného točení.

Povšimněme si nyní parametru, jenž přísluší libovolnému průměru komplexu; příslušný vztah lze odvoditi také touto zcela jednoduchou cestou.

Uvažujme pravoúhlý paraboloid Ω, který tvoří paprsky komplexu kolmo protínající přímku h. Osa komplexu jest jeho osou; bod $A \equiv (ha)$ vrcholem a buďtež g, g' jeho dvě povrchové přímky protínající h v bodech $(gh) \equiv D$, $(g'h) \equiv D'$, průměr procházející bodem D jmenujeme d. Roviny $(gh) \equiv \Delta$, $(g'h) \equiv \Delta'$ jsou nullové roviny bodů D, D'. Přímky druhé soustavy tohoto paraboloidu tvoří parabolickou involuci konjug. polár, jejímž dvojným elementem jest přímka h a nekonečně vzdálená přímka roviny kolmé k h jdoucí osou a. Pro tečné roviny tohoto paraboloidu v bodech přímky h platí:

$$(D \infty D'A) = (\Delta\alpha_\infty\Delta'\alpha_0),$$

je-li rovina $(ha) \equiv \alpha_\infty$ a je-li α_0 rovina paprskem h kolmá k a.

Vyvineme-li tedy, máme

$$\frac{\overline{DD'}}{\overline{DA}} = \frac{\sin \widehat{\Delta\Delta'}}{\sin \widehat{\alpha_\infty\Delta'}} : \frac{\sin \widehat{\Delta\alpha_0}}{\sin \widehat{\alpha_\infty\alpha_0}}$$

a uvážíme-li, že

$$\widehat{\alpha_\infty\Delta'} = \widehat{d\Delta'}, \quad \widehat{\Delta\alpha_0} = -(90^\circ + \widehat{d\Delta}), \quad \widehat{\alpha_\infty\alpha_0} = \widehat{d\alpha_0} = -90^\circ$$

[5]) K. Zindler: Liniengeometrie I. pg. 19.

měřice od pravé, resp. k pravé části roviny α_0, jest

$$\overline{DD'}\,\frac{\sin \widehat{d\Delta'}}{\sin \Delta\Delta'} = -\frac{\overline{AD}}{\cos \widehat{d\Delta}}$$

nebo značíme-li délku DD' symbolem (dg'),

$$\varkappa_d = (dg')\,\frac{\sin \widehat{dg'}}{\sin \widehat{\Delta g'}} = -\frac{r}{\cos \delta}.$$

Veličinu

$$-\frac{r}{\cos \delta} = \varkappa_d$$

jmenujeme, jak známo, parametrem průměru d; r jest jeho vzdálenost od osy a a δ úhel

$$\widehat{a\Delta} = \widehat{ag} = \widehat{dg}.$$

Poněvadž pro paprsky komplexu platí

$$r\, tg\, \delta = \varkappa,$$

plyne

$$\varkappa_d = -\frac{\varkappa}{\sin \delta}.$$

Vztah právě odvozený má obecnou platnost, ježto kterýkoliv paprsek komplexu lze translací a rotací kolem osy a převésti na paraboloid Ω. Omezíme-li se vzhledem k povaze komplexu na to, že uvažujíce jistý průměr d, otočíme celý komplex a s ním i průměr d tak, že kladný směr paprsku h směřuje od bodu A na ose a přes bod (D) k nám, jest veličina $\varkappa_d$ stále téhož znamení jak pro levotočivý tak i pravotočivý komplex.

Sturm nedává veličinám (dg') a $\widehat{\Delta g'}$ znaménka, veličině $\widehat{dg'}$ doporučuje však dáti totéž znaménko jako veličině $\widehat{ag'} = \widehat{dg'}$, tedy kladné nebo záporné dle toho, je-li komplex pravo- nebo levotočivý[6]). Vymezení toto není dosti odůvodněno vzhledem k tomu, že veličiny (dg'), $\widehat{dg'}$, $\widehat{\Delta g'}$ jsou ve vzorci pro $\varkappa_d$ stejně oprávněny. Neshoda tata patrna jest také v tom, že ve vztahu,

[6]) Sturm: Die Gebilde I. pg. 98.

který pojí polohu dvou konjug. polár k libovolnému průměru, nutno změniti případně znaménko veličiny $\varkappa_d$ [7]).

Jest rozhodně správnější dáti všem třem veličinám přiměřené znaménko. Měříme-li veličiny tyto správným způsobem, podají všecky tři výrazy pro parametr $\varkappa_d$, totiž

$$\varkappa_d = (dg') \frac{\sin \widehat{dg'}}{\sin \widehat{\Delta g'}} = -\frac{r}{\cos \delta} = -\frac{\varkappa}{\sin \delta},$$

totéž znamení pro kterýkoliv paprsek g' komplexu.

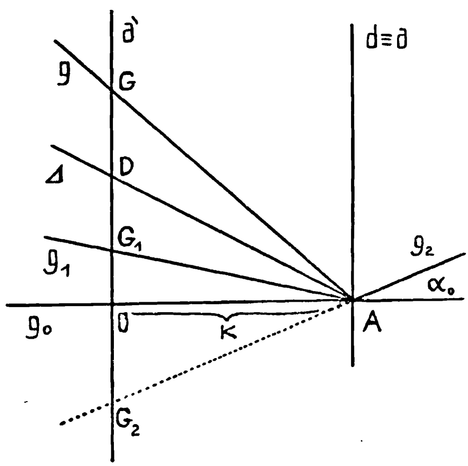
Ve shodě s předchozími sjednáními měřme úsečku (dg) od bodu D na paprsku h právě tak jako úsečky r nebo p, mající týž význam; úhel $\widehat{dg'}$ právě tak jako úhel δ nebo φ, tedy od d, resp. a kladně v opačném točení rafie u hodin od 0^0 do $+90^0$, opačně od d resp. a z 0^0 do -90^0. Úhel nullové roviny Δ bodu D, v němž průměr d seče paprsek h, měřme od roviny Δ či lépe od paprsku komplexového g, jenž obsahuje bod D a jest kolmý k h, kladně opět v opačném smyslu točení rafie u hodin, záporně ve smyslu opačném tomuto. Avšak jak z měření úhlů δ, resp. φ patrno, měří se ostré úhly hořejších polopaprsků jednotlivých přímek. Učiňme tak i nyní a měřme úhel $\widehat{\Delta g'} = \widehat{gg'}$ jen mezi hořejšími polopaprsky g, g', ne však ve stejných mezích jako dříve, nýbrž v mezích ostrého a tupého úhlu rovin Δ, α_0 čili g, g_0, je-li g_0 paprsek komplexu bodem A v rovině α_0 kolmý k h.

Zaujme-li rovina Δ polohu roviny α_0, tedy přejde-li průměr D do osy a, obdržíme z předešlých vzorců, vloživše za δ úhel $\widehat{d\alpha_0} = -90^0$ a měříce od pravé resp. k pravé části roviny α_0, hlavní parametr komplexu i s příslušným znamením vzhledem k točení komplexu.

Veličina $\varkappa_d$ má stálé záporné znamení, volíme-li směr od bodu A k bodu D za kladný, což lze pro libovolný průměr d učiniti. Kdybychom volili směr AD za kladný a uvažovali průměry na opačné straně osy a protínající paprsek h, změní $\varkappa_d$ znamení, což také formule ve všech třech případech podávají.

[7]) Ibidem I. pg. 100.

Vývody předchozí můžeme snadno sledovati graficky. Položme osu a komplexu do nákresny a paprsek h kolmo k nákresně v bodě A na přímce a. Úhly δ, φ atd. můžeme měřiti ve shora uvedeném smyslu na orthog. průmětech jednotlivých přímek nebo rovin na tuto nákresnu. Délky r, p atd. lze měřiti od bodu $O \equiv (ag_0)$ na rovnoběžce a' ve vzdálenosti $\varkappa$ pro pravotočivý komplex na levo, pro levotočivý na pravo od osy a vedené; ježto úseky jednotlivých paprsků g svazku A na přímce a' hovíce vztahu $\varkappa = r\, tg\, \delta$ stanoví přímo vzdálenost paprsku g od osy, je-li úhel $\widehat{ag}$ jeho odchylkou od osy komplexu. Mě-



Obr. 2.

říme-li veličiny předchozí vzhledem k průměru d, jest jeho orthog. průmět totožný s a a tedy úhly $\widehat{dg} = \widehat{ag}$ počátek délek (dg) jest bod D na a', v němž průmět nullové roviny Δ bodu (dh) seče přímku a'.

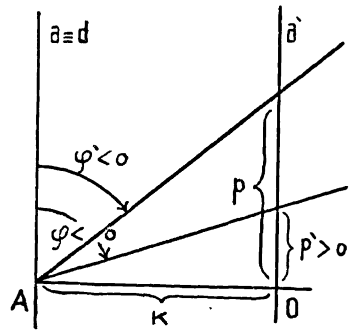
V obr. 2. vyznačena poloha tří paprsků pravotočivého komplexu gg_1g_2. Jest tedy na př.

$$(dg) = DG > 0,\ (dg_1) = DG_1 < 0,\ (dg_2) = DG_2 < 0;$$

$$\widehat{dg} > 0,\ \widehat{dg_1} > 0,\ \widehat{dg_2} < 0;\ \widehat{\Delta g} < 0,\ \widehat{\Delta g_1} > 0,\ \widehat{\Delta g_2} < 0;$$

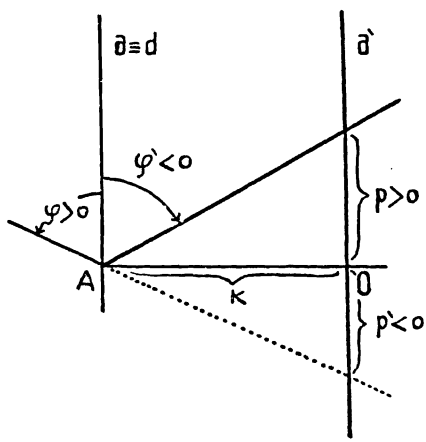
podobně i ve všech ostatních případech.

Jsou-li l, l' dvě sdružené poláry komplexu kolmo protínající paprsek h jsou kordináty jejich $(p\varphi)$, $(p'\varphi')$ v tomto grafickém znázornění dány kterýmkoliv párem paprsků svazku A,



Obr. 3.

jak obr. 3. (pro levotočivý komplex) znázorňuje; poloha polár těchto v obrazci není vyznačena. Jak patrno z obrazců těchto, točí v prvém případě obr. 3. poláry s komplexem stejně —



Obr. 4.

v levo a jsou na téže straně osy, v druhém obr. 4. opačně; tedy poláry v pravo komplex v levo, a jsou na různých stranách osy.

Podobně pro polohu polár k libovolnému průměru d platí:

$$(dl)\frac{\sin \widehat{dl'}}{\sin \widehat{\Delta l'}} = (dl')\frac{\sin \widehat{dl}}{\sin \widehat{\Delta l}} = \varkappa_d,$$

jelikož veličiny (dl), $\widehat{dl'}$, $\widehat{\Delta l'}$ resp. (dl'), $\widehat{dl}$, $\widehat{\Delta l}$ jsou vyjádřeny kterýmkoliv párem paprsků svazku A, jenž stanoví souřadnice $(r\delta)$ a současně polohu paprsků komplexu, které kolmo protínají paprsek h.

V posledním vzorci zachovává $\varkappa_d$ vždy totéž znamení za týchž podmínek, jak bylo ukázáno; nezávisí však, jak Sturm uvádí, na tom, je-li involuce mimoběžek (dd'_∞, ll') elliptická nebo hyperbolická.

Vztah mezi počtem prvočísel v daných mezích a větou Wilsonovou.

Napsal **M. Kössler.**

Pro určení počtu prvočísel v daných mezích sestavena byla řada vzorců buď jen empirických (Gauss, Legendre, atd.) nebo s různou přesností analyticky odvozených. Tyto opírají se většinou o práci *Riemannovu*, spočívající na vlastnostech ζ funkce, jiné opět užívají vztahů mezi součtem přirozených logarithmů všech celých čísel $\leqq A$ a podobným součtem všech prvočísel $\leqq A$.*)

Postup, jímž se v těchto pracích k výsledku dospívá, jest jedním z nejsložitějších a nejobtížnějších v dějinách vědy.

Úlohu možno pokládati za zvláštní případ problemu Polignacova**), který zní:

---

*) Viz přehledný referát v Enzyk. der Math. Wiss. Riemannova theorie jest podrobně vyložena ve dvou svazcích díla: Ed. Landau: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Teubner. 1909.

**) Compt. rend. 1859. II.