Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Simandl

Vyčíslení zvláštního determinantu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 1, 43--46

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122384

Vyčíslení zvláštního determinantu.

Napsal Dr. **Václav Simandl**, assistent české techniky v Brně.

Provedeme zde vyčíslení jednoho zvláštního determinantu té vlastnosti, že hodnota jeho se rovná součinu lineárných faktorů. Determinant ten, který označíme si D_k, jest stupně $2(k+1)$ a má obecně tvar:

$$\begin{vmatrix}
a & (2k+1)b & kc & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b & a & 2kb & kc & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c & 2b & a & (2k-1)b & (k-1)c & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & c & 3b & a & (2k-2)b & (k-1)c & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2c & 4b & a & (2k-3)b & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2c & 5b & a & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & a & 3b & c & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & (2k-1)b & a & 2b & c \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & kc & 2kb & a & b \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & kc & (2k+1)b & a
\end{vmatrix}$$

Abychom dostali hodnotu tohoto determinantu, přeměníme jeho quadratickou matici v jinou matici určitými transformacemi řádků a sloupců, při kterých se hodnota determinantu D_k nezmění. A z matice této nové bude hodnota determinantu pak přímo patrna. K vůli snadnějšímu přehledu provedeme tyto transformace nejdříve na speciálním případě determinantu D_3. Determinant ten má tvar:

$$D_3 = \begin{vmatrix}
a & 7b & 3c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b & a & 6b & 3c & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c & 2b & a & 5b & 2c & 0 & 0 & 0 \\
0 & c & 3b & a & 4b & 2c & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2c & 4b & a & 3b & c & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2c & 5b & a & 2b & c \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3c & 6b & a & b \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3c & 7b & a
\end{vmatrix}$$

Mysleme si nyní tento determinant D_3 rozdělen na čtyři skupiny řádků a na čtyři skupiny sloupců vždy po dvou řádcích resp. vždy po dvou sloupcích. Přičítejme pak ku prvkům první skupiny řádků homologicky položené prvky následujících skupin řádků, jejichž všecky prvky postupně při druhé, třetí a čtvrté skupině jsou znásobeny čísly $-3, 3, -1$. Podobně přičítejme ke druhé skupině řádků následující dvě skupiny násobené čísly $-2, 1$. A posléze odečítejme od třetí skupiny řádků skupinu čtvrtou. Dostane potom náš determinant quadratickou matici tvaru:

$$\begin{vmatrix} a-3c & b & -3a+9c & -36 & 3a-9c & 3b & -a+3c & -b \\ b & a-3c & -3b & -3a+9c & 3b & 3a-9c & -b & -a+3c \\ c & 2b & a-4c & -3b & -2a+5c & 0 & a-2c & b \\ 0 & c & 3b & a-4c & -6b & -2a+5c & 3b & a-2c \\ 0 & 0 & 2c & 4b & a-3c & -3b & -a+c & -b \\ 0 & 0 & 0 & 2c & 5b & a-3c & -5b & -a+c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3c & 6b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3c & 7b & a \end{vmatrix}$$

Nyní odečítejme první skupinu sloupců od druhé, třetí a čtvrté skupiny sloupců násobíce její prvky postupně zase čísly $-3, 3, -1$. Dále odečítejme druhou skupinu sloupců od třetí a čtvrté skupiny, když jsme byli její prvky znásobili postupně čísly $-2, 1$. Posléze přičítejme prvky skupiny třetí sloupců ku prvkům čtvrté skupiny sloupců. Matice našeho determinantu D_3 nabývá potom tvaru:

$$\begin{vmatrix} a-3c & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a-3c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 2b & a-c & 3b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 3b & a-c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c & 4b & a+c & 5b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2c & 5b & a+c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3c & 6b & a+3c & 7b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3c & 7b & a+3c \end{vmatrix}$$

Z matice této vyplývá ihned, že determinant náš se rovná součinu lineárných faktorů, a že hodnota jeho jest:

$$D_3 = (a-3c+b)(a-3c-b)(a-c+3b)(a-c-3b)$$
$$(a+c+5b)(a+c-5b)(a+3c+7b)(a+3c-7b).$$

Zcela týmže způsobem, kterým jsme transformovali matici determinantu D_3, můžeme transformovati matici našeho na počátku uvedeného obecného determinantu D_k. Rozdělíme pak quadratickou matici tohoto determinantu na $(k+1)$ skupin po dvou řádcích a na tolikéž skupin po dvou sloupcích. Přičítáme pak postupně k prvkům první, druhé, třetí atd. až $(k-1)$ a k-té skupině řádků vždy všecky následující skupiny řádků, které postupně jsou vždy násobeny čísly:

$$
\begin{array}{llllll}
-\binom{k}{1}, & \binom{k}{2}, & -\binom{k}{3}, & \ldots (-1)^{k-1} \cdot \binom{k}{k-1}, & (-1)^{k} \binom{k}{k} & \\
 & -\binom{k-1}{1}, & \binom{k-1}{2} \ldots & (-1)^{k-2} \binom{k-1}{k-2}, & (-1)^{k-1} \binom{k-1}{k-1} & \\
 & & -\binom{k-2}{1} \ldots & (-1)^{k-3} \binom{k-2}{k-3}, & (-1)^{k-2} \binom{k-2}{k-2} & \\
 & & \ddots & \vdots & \vdots & \\
 & & & -2, & 1 & \\
 & & & & -1. &
\end{array}
$$

Po té odečítejme postupně prvky první, druhé, třetí atd. až k-té skupiny sloupců, které jsme byli postupně znásobili čísly uvedeného schematu, vždy od všech následujících skupin sloupcových. I nabývá potom matice našeho determinantu D_k tvaru:

$$
\left|
\begin{array}{ccccccccccc}
a-kc & b & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b & a-kc & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c & 2b & a-(k-2)c & 3b & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & c & 3b & a-(k-2)c & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2c & 4b & a-(k-4)c & 5b & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2c & 5b & a-(k-4)c & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a+(k-2)c & (2k-1)b & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2k-1)b & a+(k-2)c & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & kc & 2kb & a+kc & (2k+1)b \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & kc & (2k+1)b & a+kc
\end{array}
\right|
$$

Jest pak hodnota determinantu D_k:

$$
\begin{aligned}
D_k = {} & [a - kc + b]\,[a - kc - b]\,[a - (k-2)\,c + 3b] \\
& [a - (k-2)\,c - 3b]\,[a - (k-4)\,c + 5b] \\
& [a - (k-4)\,c - 5b] \ldots [a + (k-2)\,c + (2k-1)\,b] \\
& [a + (k-2)\,c - (2k-1)\,b]\,[a + kc + (2k+1)\,b] \\
& [a + kc - (2k+1)\,b].
\end{aligned}
$$

Symbolicky to můžeme psáti ve tvaru následujícím:

$$D_k = \prod_{n=0}^{k} \{[a + (k - 2n)\, c]^2 - (2k + 1 - 2n)^2\, b^2\}$$

Ku konci dlužno podotknouti, že způsobem, kterým jsme dospěli ku vyčíslení determinantu D_k, bychom mohli dospěti ku vyčíslení determinantů složitějších, které by se rovnaly též součinu lineárných faktorů. To by bylo v tom případě, kdybychom prvky a, b, c determinantu D_k považovali opět za quadratické matice stejného typu a téhož typu jako quadratické matice determinantu D_k. Výraz pa má ten význam, že všecky prvky matice a jsou násobeny číslem p. Úvahy naše by pak byly zcela analogické úvahám, které jsme provedli v článku: „O zvláštních determinantech , uveřejněném v XLII. ročníku tohoto časopisu (p. 534).

Polní rovnice obou gravitačních vektorů.

Prof. Dr. **Arnošt Dittrich** v Třeboni.

Označení. Na okraji rovnic připojím stenografický zápis jejich myšlenkového obsahu v symbolech vektorového kalkulu. V pozdějším textu se pak rovnice onou vektoriellní poznámkou citují. Aby differentiální rovnice nezaujímaly mnoho místa, označíme derivace indexy. Důsledně budiž

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Vektorové složky se pak arci indexy označovati nesmí. Proto stanovím: Vektor x má složky X, Y, Z; vektor l má složky L, M, N; vektor A bude míti složky a, b, c; vektor a složky A, B, C atd.

Klassická mechanika o gravitačním poli. Hustota hmoty budiž

$$\varrho \; \frac{g}{cm^3}.$$

Značíme intensitu gravitačního pole jako vektor x, kde

$$|\, x \,| \; \frac{cm}{sec^2}$$