

Vincenc Jarolímek

Několik konstrukcí kuželoseček. [II.]

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 47 (1918), No. 2-3, 130--139

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122337>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1918

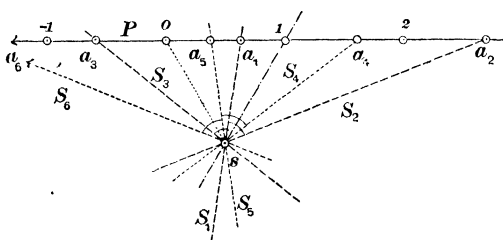
Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Vytkněme za tím účelem na přímce  $P$  řadu číselnou  $\dots -1, 0, 1, 2 \dots$  (obr. 3.); nad délkou  $\overline{oI}$  sestrojme rovnostranný trojúhelník  $oIs$ .

Vytkněme v přímce  $P$  bod  $a_1$  tak, aby  $\overline{oa_1} = \lambda$  a označme  $\overline{sa_1} \equiv S_1$ . Potom paprsky  $S_2 \equiv \overline{oa_2}$ ,  $S_3 \equiv \overline{oa_3}$  svírající s  $S_1$  úhly  $60^\circ$ , vytínají na  $P$  body  $a_2, a_3$ , jichž vzdálenosti od bodu  $o$  jsou, jak jednoduchý počet ukazuje,  $\frac{1}{1-\lambda}$  resp.  $\frac{\lambda-1}{\lambda}$ .



Obr. 3.

Sestrojíme-li dále paprsky  $S_4 S_5 S_6$ , symmetrické dle osy  $\overline{sI}$  k paprskům  $S_1 S_2 S_3$ , vytínají tyto na ose  $P$  body  $a_4 a_5 a_6$ , jichž vzdálenosti od bodu  $o$  jsou  $\frac{1}{\lambda}$ ,  $1-\lambda$ ,  $\frac{\lambda}{\lambda-1}$ , tudíž každá trojina bodem  $s$  vedených paprsků  $S_1 S_2 S_3$  svírajících úhly  $60^\circ$  spolu s trojinou  $S_4 S_5 S_6$  souměrnou dle přímky  $\overline{sI}$  (nebo dle přímky  $\overline{os}$ , nebo dle kolmice s bodu  $s$  ku  $P$  spuštěné atd.) vytíná na ose  $P$  šest bodů  $a_1 \dots a_6$ , jichž vzdálenosti od počátku  $o$  jsou rovny 6 hodnotám dvojpoměrů téže čtveřiny elementů.

## Několik konstrukcí kuželoseček.

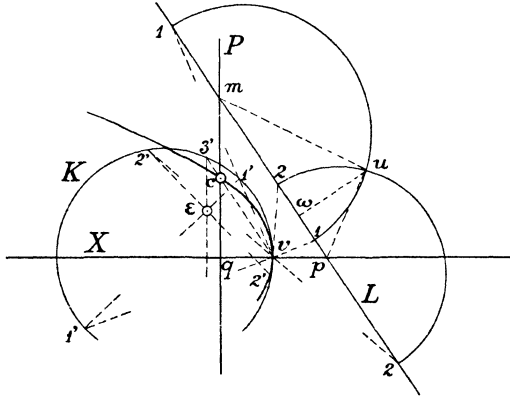
Podal dvor. rada prof. Dr. Vinc. Jarolimek.

(Dokončení.)

### II. Dané prvky s část imaginárné.

11. Parabola daná osou  $X$  a dvěma body imaginárnými  $a, b$  (obr. 9.). Tyto buďtež samodružnými body elliptické involuce, 11, 22 dané na reálné přímce  $L$ . Sestrojme střed involuce  $\omega$ , potenci její  $-\overline{\omega u^2}$ , a bod  $m$  sdružený k bodu  $(LX) \equiv p$  ( $\overline{um} \perp \overline{pu}$ ); bodem  $m$  jde polára paraboly  $P \perp X$  pro pól  $p$ .

Polára seče osu v bodě  $q$ . body  $p, q$  jsou sdružené póly, a vrchol paraboly  $v$  púli úsečku  $\overline{pq}$ . Bod paraboly  $c$  na poláre  $P$  obdržíme takto: Mysleme si involuci  $L_1$  souměrnou ku  $L$  (11, 22) podle  $X$  (rýsovatí jí netřeba). Její samodružné body (imag.)  $a_1, b_1$  jsou tolikéž k  $a, b$  souměrny; parabola je nyní určena imaginárnými body  $a, b, a_1, b_1$  a reálným bodem  $v$ . Konstrukce bodu  $c$  na poláre  $P$  z těchto dat je známa (*G. P.* II., str. 13., odst. 114. v levo, obr. 176.). Involuce  $L, L_1$  promítněme z bodu  $v$  na kružnici  $K$ , která jde bodem  $v$  a má svůj střed kdekoli na  $X$ ; na  $K$  vzniknou dvě involuce kvadratické (jedna je  $1'1', 2'2'$ ) podle  $X$  souměrné. Sestrojme středy jejich  $\varepsilon, \varepsilon_1$  (bodů  $\varepsilon_1$

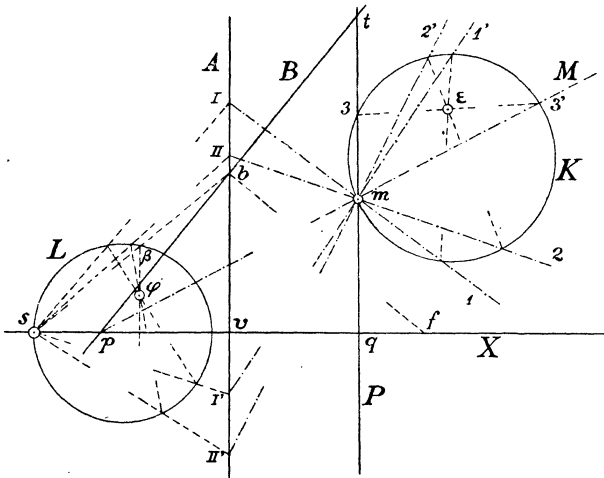


Obr. 9.

netřeba, ježto  $\overline{\varepsilon\varepsilon_1} \perp X$ ); spojnice  $\overline{\varepsilon\varepsilon_1}$  (čili  $\overline{\varepsilon_3'3'}$ ) seče  $K$  v družině  $3'3'$ , která oběma involucím je společná; paprsek  $\overline{v3'}$  seče tedy  $P$  v bodě paraboly  $c$ . Z osy  $X$ , vrcholu  $v$  a bodu  $c$  lze nyní žádanou parabolu sestrojiti.

12. Parabola daná osou  $X$  a dvěma tečnami imaginárnými  $T, U$  (obr. 10.). Tyto tečny buďtež samodružnými paprsky dané elliptické involuce  $11', 22'$  o středu  $m$ . Mysleme si involuci  $m$ , souměrnou ku  $m$  podle  $X$ , která svými samodružnými paprsky  $T_1, U_1$  určuje další dvě tečny paraboly. Společný paprsek obou involucí  $\overline{mm_1} \equiv P \perp X$  je polárou pro pól  $p$  na ose  $X$ , jež obdržíme paprskem  $M$ , který v involuci  $m$  je sdružen s paprskem  $P$ . Proložme bodem  $m$  libovolnou kružnici  $K$ , která

protne danou paprskovou involuci  $m$  v bodové involuci kvadratické jejíž střed jest  $\varepsilon$ . Paprsek  $P$  seče  $K$  v bodě 3, spojnice  $\overline{3\varepsilon}$  dá  $3'$ , paprsek  $\overline{3'm} \equiv M$ , průsečík  $(MX) \equiv p$ . Vrchol paraboly  $v$  půlí úsečku  $pq$ . Parabola je nyní určena čtyřmi tečnami (imag.)  $T, U, T_1, U_1$  a tečnou reálnou  $A \perp X$  ve vrcholu  $v$ , lze tudíž další tečny reálné  $B, B_1$  jdoucí bodem  $p$  sestrojiti konstrukcí známou (*G. P.* II, str. 13., odst. 114. v pravo, str. 177).  $B, B_1$  budou totiž procházeti body  $b, b_1$  na přímce  $A$ , v nichž se protínají homologické paprsky involucí  $m, m_1$ . Pro-



Obr. 10.

tněme tedy tyto involuce přímkou  $A$  v involucích bodových a stanovme v nich družinu společnou  $b, b_1$ . Jedna z nich je  $II'$ ,  $IIII'$ , druhě pak, která je souměrna s prvou podle  $X$ , netřeba rýsovatí. Promítněme obě involuce z bodu  $s$  na  $X$  zvoleného, protněme tyto involuce paprskové kružnicí  $L$ ; jež procházejí bodem  $s$  má střed svůj kdekoli na  $X$ , involucemi kvadratickými, a stanovme jejich středy  $\varphi, \varphi_1$ ; tyto jsou souměrné podle  $X$ , stačí tedy spojnicí  $\overline{\varphi\varphi_1}$  vésti bodem  $\overline{\varphi} \perp X$ . Tato seče  $L$  v bodě  $\beta, s\beta$  tečnu  $A$  v bodě  $b$ , spojnice  $\overline{pb} \equiv B$  dá tečnu paraboly  $B$  (dotyčný bod  $t$  na  $P$ ), přímka pak  $\overline{bf} \perp B$  ohnisko  $f$ .

13. *Kuželosečka daná osou  $X$ , bodem reálným  $e$  a dvěma body imaginárnými  $a, b$ . Body  $a, b$  buďtež dány elliptickou*

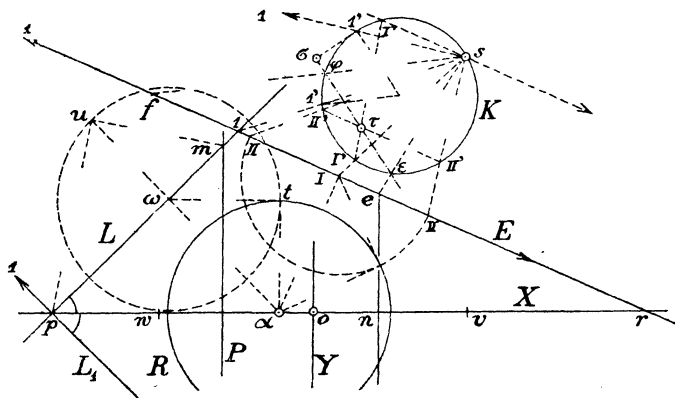
involucí na přímce  $L$ . Poláru  $P$  k pólu  $p \equiv (LX)$  sestrojme jako v úloze 11. Na přímce  $\overline{pe}$ , která protne  $P$  v bodě  $g$ , stanovme bod  $d$ , harmonický k bodu  $e$  vzhledem k družině  $pg$ ; bod  $d$ , jakož i bod  $d_1$  souměrný ku  $d$  podle  $X$ , náležejí kuželosečce. Tyto čtyři body  $d, d_1, e, e_1$  (souměrný k  $e$ ) nestačují však k sestrojení křivky; třeba ještě bodu dalšího. Na přímce  $L_1$  souměrné ku  $L$  podle osy  $X$  vytkněme involuci souměrnou k dané na  $L$  ( $ab$ ), promítněme obě involuce bodové z daného bodu  $e$  involucemi paprskovými, a sestrojme společnou jich družinu  $C, C_1$ ; tyto paprsky protnou poláru  $P$  v dalších bodech  $c, c_1$  (souměrných podle  $X$ ), jež náležejí kuželosečce.<sup>3)</sup> Reálnými body  $c, d, e$  je nyní úloha převedena na úlohu 5.

14. *Kuželosečka daná osou  $X$ , tečnou reálnou  $E$  a dvěma body imaginárnými  $a, b$  (obr. 11.).* Body tyto ať jsou dány eliptickou involucí na přímce  $L$ , jejíž střed jest  $\omega$  a potency  $\equiv -\overline{\omega u^2}$ . Pólu  $(LX) \equiv p$  odpovídá polára  $mP \perp X$  ( $um \perp pm$ ). Jsou-li  $a_1, b_1$  na přímce  $L_1$  souměrné ku  $a, b$  podle  $X$ , bude body  $a, b, a_1, b_1$  určen svazek kuželoseček  $\Sigma$ , jenž obsahuje také reálnou kružnici  $R$ , protože lichoběžník  $abb_1a_1$  je rovno-ramenný a souměrný podle  $X$ . Střed  $\alpha$  kružnice  $R$  připadá tudíž na osu  $X$ ; obdržíme jej přímkou  $\overline{\omega\alpha} \perp L$ , ježto kružnice  $R$  vytvořuje na  $L$  touž involuci harmonických pólů  $\omega$  ( $pm$ ), a poloměr její  $\overline{\alpha t}$  jest odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku  $\alpha\omega t$  ( $\omega t \equiv \overline{\omega u}$ ) [*G. I. II.*, str. 70., obr. 200.]. Mimo to tvoří přímky  $L, L_1$  zvrhlou kuželosečku ve svazku  $\Sigma$ . Daná tečna  $E$  seče svazek  $\Sigma$  v involuci bodové, jejíž samodružné body  $e, f$  jsou body dotyku dvou kuželoseček úloze hovičích na tečně  $E$ . Tato involuce jest určena družinou 11, ve které přímky  $L, L_1$  sekou  $E$ , a družinou 22, ve které kružnice  $R$  seče tečnu  $E$ . Tyto body 22 jsou však pomyslné; určíme je tedy involucí, kterou  $R$  indukuje na  $E$ . Střed její jest  $I$  ( $\overline{\alpha I} \perp E$ ) a jedna družina  $III$  ( $\overline{I III} =$  tečně z bodu  $I$  ku  $R$ ). Sestrojíme nyní společnou družinu  $e, f$  obou involucí na  $E$  známou konstrukcí pomocí libovolné kružnice  $K$ , na niž involuce ty promítneme z bodu  $s$  na  $K$

<sup>3)</sup> *G. P. II.*, str. 13., odst. 114. v levo. Zde nelze užití zjednodušené konstrukce, vykonané v úloze 11. (obr. 9.), protože tam ležel reálný bod  $v$  na ose  $X$ , kdežto v úloze hořejší bod  $e$  dán jest mimo osu  $X$ .

vytčeného (obr. 11.). Bod  $e$  je dotyčný na tečně  $E$ ;  $\overline{en} \perp X$  jest pak polára pólu  $(EX) \equiv r$ . Samodružné body involuce  $pq$ ,  $(q \equiv PX)rn$  na  $X$  dají vrcholy žádané kuželosečky  $v$ ,  $w$  atd. Bod  $f$  dá obdobně kuželosečku druhou. Prvá jest ellipsou o hlavní ose  $X$ , druhá hyperbolou o vedlejší ose  $X$ .

15. *Kuželosečka daná osou  $X$ , dvěma tečnami imaginárnými  $T, U$  a jednou reálnou  $E$ .* Tečny  $T, U$  buďtež dány eliptickou involucí paprskovou o středu  $m$ . Pól  $p$  ku poláře  $mP \perp X$  sestrojíme jako v úloze 12. Průsečíkem  $(PE) \equiv g$  vedme paprsek  $\overline{gp} \equiv G$  a paprsek  $D$  harmonický ku paprsku  $E$  vzhle-

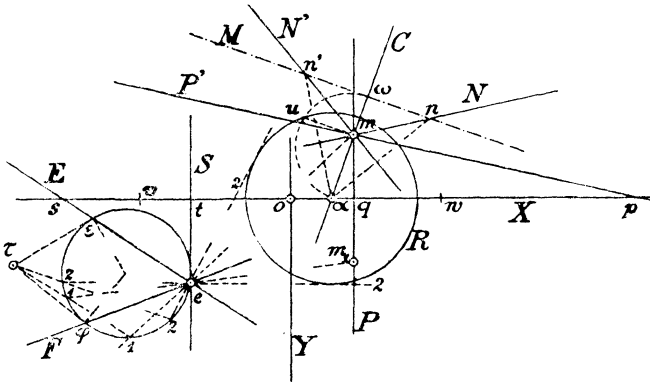


Obr. 11.

dem k družině  $PG$ ; paprsek  $D$ , jakož i paprsek  $D_1$  souměrný ku  $D$  podle  $X$ , jsou dalšími tečnami kuželosečky. Tyto čtyři reálné tečny  $D, D_1, E, E_1$  (souměrná k  $E$  podle  $X$ ) nestačí ještě k sestrojení křivky; třeba ještě tečny další. V bodě  $m_1$  souměrném ku  $m$  podle osy  $X$  stanovme involuci paprskovou souměrnou k dané  $m$  ( $TU$ ), protněme obě involuce paprskové danou tečnou  $E$  v involucích bodových, a sestrojme společnou jejich družinu  $c, c_1$ ; tyto body promítají se z pólu  $p$  dalšími tečnami křivky  $C, C_1$  (souměrnými podle  $X$ ) [*G. P. II.*, str. 13., odst. 114. v pravo]. Reálnými tečnami  $C, D, E$  jest úloha převedena na úl. 7.

16. *Kuželosečka daná osou  $X$ , dvěma imaginárnými tečnami  $T, U$  a reálným bodem  $e$*  (obr. 12.). Tečny  $T, U$  buďtež

samodružnými paprsky dané elliptické involuce o středu  $m$ ; sestrojme její centrálné paprsky  $C \perp C'$  a družinu podle  $C$  souměrnou  $N, N'$ . V téže involuci stanovme paprsek  $P'$  sdružený ku  $mP \perp X$ ; jeho průsečík  $p$  na  $X$  je pólem poláry  $P$  v kuželosečce žádané (jako v úloze 12.). Mysleme si involuci  $m_1$  souměrnou ku  $m$  podle  $X$ , jejíž samodružné paprsky  $T_1, U_1$ , souměrné podle  $X$  ku  $T, U$ , jsou dalšími tečnami křivky. Imaginární přímky  $T, U, T_1, U_1$  určují osnovu kuželoseček  $\Omega$  jich se dotýkajících, a protože čtyřstran základnicemi tvořený je



Obr. 12,

podle  $X$  souměrný, bude osnova  $\Omega$  obsahovati kružnici  $R$ , jejíž střed  $\alpha$  případně na  $X$ . Tých ležeti bude také na paprsku  $C$ , který pŕl tупý  $\sphericalangle NN'$  (má-li kružnice  $R$  býti reálná), tedy průsečík  $(CX) \equiv \alpha$ . Jde nyní o poloměr kružnice  $R$ , která mají střed  $\alpha$ , dotýká se imaginárných přímek  $T, U$ . Paprsek  $\overline{an'} \perp N$  protne  $N'$  v bodě  $n'$ , paprsek  $\overline{an} \perp N'$  seče  $N$  v bodě  $n$ ; spojnice  $\overline{nn'} \equiv M \perp C$  je polárou kružnice  $R$  pro pól  $m$ . Neboť je-li  $M$  polárou pólu  $m$ , bude  $mnn'$  trojúhelníkem polárným (ježto  $N, N'$  jsou poláry sdružené), a jeho výšky musí se protínati v středu  $\alpha$  kružnice  $R$ ; musí tedy skutečně býti  $\overline{an'} \perp \overline{nm} \equiv N$ ,  $\overline{an} \perp \overline{n'm} \equiv N'$ . Poláru  $M$  seče  $\overline{am} \equiv C$  v bodě  $\omega$ , poloměr pak

$$\overline{au} = \sqrt{\overline{am} \cdot \overline{a\omega}},$$

jímž kružnici  $R$  opíšeme. Osnova kuželoseček  $\Omega$  promítá se z bodu  $e$ , jímž žádaná kuželosečka má procházeti, involuci paprskovou. Jedna družina této involuce jest  $me, m_1e$ , ježto body  $m, m_1$  představují jednu zvrhlou kuželosečku v osnově  $\Omega$ . Dru-

žinu druhou dají tečny  $\overline{2e}$  vedené bodem  $e$  ke kružnici  $R$ . Sestrojíme-li posléze samodružné paprsky této involuce  $E, F$  (konstrukce známá vykonána v obr. 12. pomocí kružnice proložené bodem  $e$ ), bude  $E$  tečnou jedné kuželosečky úlože hovicí,  $e$  pak bodem dotýčným,  $eS \perp X$  polárou pro pól  $(EX) \equiv s$ , střed  $o$  involuce  $(pq)$ ,  $(st)$  dá střed křivky, samodružné body její  $v, w$  vrcholy a t. d. Tečna  $F$  s dotýčným bodem  $e$  určuje obdobně druhý výsledek úlohy. Křivka první je patrně ellipsou, druhá však hyperbolou.

17. *Hyperbola rovnoosá daná osou  $X$  a dvěma tečnami imaginárnými  $T, U$ .* Tyto buďtež dány elliptickou involucí paprskovou o středu  $m$ . Involuce  $m$ , souměrná ku  $m$  podle  $X$  určuje další dvě imaginární tečny  $T_1, U_1$  souměrné ku  $T, U$  podle  $X$ . Žádaná hyperbola jest ona kuželosečka v osnově  $\Omega \equiv (TUT_1U_1)$ , která prochází úběžným bodem  $e_\infty$  libovolné přímky svírající s  $X$  úhel  $\equiv 45^\circ$ . Tím jest úloha převedena na 16. s tím toliko rozdílem, že daný bod  $e$  je v úloze přítomné v nekonečnu. Konstrukce se v podstatě nemění; involuce paprsková  $e$  (11. 22) je zde ovšem osnovou, a její samodružné paprsky  $E, F$  sestrojí se pomocí proniku s libovolnou přímkou.

Dány-li však místo  $T, U$  dva imaginární body  $a, b$  hyperboly rovnoosé, a to elliptickou involucí na přímce  $L$ , sestrojme souměrnou elliptickou involuci  $a_1, b_1$  na přímce  $L_1$  souměrné k  $L$  podle  $X$ , a proložme bodem  $e_\infty$  (na přímce  $A$ , jejíž  $\sphericalangle AX = 45^\circ$ ) kuželosečku, která prochází imaginárními body  $a, b, a_1, b_1$  (*G. P. II., str. 13., odst. 114.*).

### III Plochy stupně druhého.

Konstrukcí dosud odvozených lze užiti i k řešení mnohých zajímavých úloh o plochách 2. stupně. Klademe tuto několik ukázek.

18. *Rotační paraboloid* buď dán svou osou  $O$  a dvěma body  $a, b$ . Proložme rovinu  $(aO) \equiv \varrho$ , otočme do ní bod  $b$  kol  $O$  do polohy  $b'$ , v rovině  $\varrho$  sestrojme parabolu z osy  $O$ , bodův  $a, b'$  podle úlohy 1., a otočme ji kol osy  $O$ . — Dány-li místo bodův  $a, b$  dvě tečné roviny  $\tau, \sigma$ , promítneme osu  $O$  kolmo do rovin  $\tau, \sigma$ ; průměty označme  $T, S$ . Otočíme pak  $S$  kol  $O$  do roviny  $(OT) \equiv \varrho$  a sestrojíme v  $\varrho$  parabolu podle úlohy 2.

19. Obdobně řeší se úloha, dána-li *středová rotační plocha* 2. stupně osou rotační a třemi body užitím úlohy 5., nebo třemi tečnými rovinami podle úlohy 7.

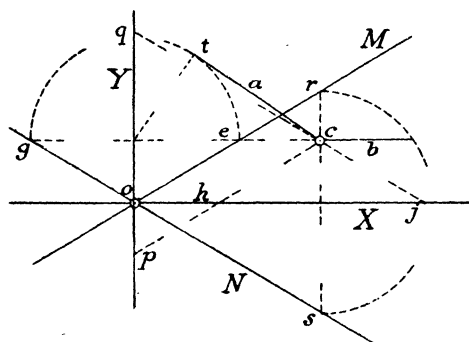


20. Dán-li *rotační hyperboloid rovnoosý* rovinou rovníka  $\sigma$  a třemi body  $a, b, c$ , položme body  $a, b$  rovinu  $\varrho \perp \sigma$ , sestrojme v ní rovnoosou hyperbolu z bodův  $a, b$  a osy  $(\varrho\sigma) \equiv X_1$  podle úlohy 8.; její střed budiž  $o_1$ , vrcholy na ose  $X_1$   $v, w$  (ať reál. či imag.). Dále v rovině  $\tau \perp \sigma$  položené body  $b, c$  stanovme hyperbolu rovnoosou z bodův  $b, c$  a osy  $(\tau\sigma) \equiv X_2$ , jejíž střed budiž  $o_2$  (hyperbol těch rýsovati ovšem netřeba). Kolmice postavená v bodě  $o_1$  ku  $X_1$  a kolmice v bodě  $o_2$  ku  $X_2$  (obě v rovině  $\sigma$ ) protnou se v středu hyperboloidu  $\omega$ , načež osa jeho rotační  $\omega O \perp \sigma$ . Ze středu  $\omega$  opsaná kružnice  $R$  tak, aby procházela body  $v, w$  (ať reál. či imag. podle úl. 14.) dá *rovník*, načež v rovině  $(\omega O)$  snadno již obdržíme meridián plochy (jakožto hyperbolu rovnoosou o středu  $\omega$ ). Podle toho, je-li rovník  $R$  reálný či pomyslný, bude hyperboloid buď sborcený nebo nepřímkový (t. dvojdílný).

21. *Rotační plocha  $\varphi^2$  buď dána rovinou rovníka  $\sigma$  a čtyřmi body  $a, b, c, d$ .* Veškeré roviny rovnoběžné s osou  $O$  rotační plochy  $\varphi^2$  protínají tuto v kuželosečkách podobných. Budou tedy rovina  $\varrho \perp \sigma$  položená body  $a, b$ , a rovina  $\tau \perp \sigma$  obsahující body  $c, d$  protínati plochu  $\varphi^2$  v křivkách 2. stupně  $K \simeq L$ . Otočíme li pak křivku  $L$  okolo průsečnice  $\overline{\varrho\tau} \equiv S$  do roviny  $\varrho$  do polohy  $L'$ , budou křivky  $K, L'$  netoliko podobné, ale i homologické, majíce jedny své osy v téže přímce  $\overline{\varrho\sigma} \equiv X_1$ , protože průsečnice rovin  $\tau\sigma \equiv X_2$  po otočení případně do  $X_1$ . Křivka  $K$  prochází také body  $a_1, b_1$ , jež jsou k  $a, b$  souměrné podle roviny  $\sigma$ , je tedy obsažena ve svazku kuželoseček  $\Sigma_1$ , určeném základními body  $a, b, b_1, a_1$ . Jsou-li dále  $c_1, d_1$  body souměrné k  $c, d$  podle roviny  $\sigma$ ,  $c', d'$  polohy těchto čtyř bodů po otočení do roviny  $\varrho$  okolo  $S$ , bude křivka  $L'$  náležeti svazku kuželoseček  $\Sigma_2$ , jehož základní body jsou  $c', d', c_1, d_1$ . Jest tedy v rovině  $\varrho$  stanoviti ony kuželosečky  $K, L'$  ve svazcích  $\Sigma_1, \Sigma_2$ , jež jsou si podobné i homologické, majíce po jedné ose v přímce  $X_1$ . Jedna osa podobnosti  $U$  je v nekonečnu,<sup>4)</sup> na které tudíž kuželosečky  $K, L'$  indukují *touž* involuci harmonických pólů  $I_3$ ; samodružné body její  $u_\infty, u'_\infty$  dají úběžné

<sup>4)</sup> Druhá osa jest  $S$ , která by však nevedla k výsledku, protože svazky  $\Sigma_1, \Sigma_2$  vytvářejí na ní involuci *identickou*, a to *symmetrickou* dle průsečnice  $(SX_1)$  jakožto středu.

body asymptot křivek  $K$ ,  $L'$ . Sestrojíme je společnou družinou involucí  $I_1$ ,  $I_2$ , jež na  $U$  vytvořují svazky  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ , kteroužto konstrukcí vykonáme známým způsobem pomocí libovolné kružnice  $M$  v rovině  $\varphi$ , na níž promítneme  $I_1$ ,  $I_2$  z bodu  $s$  na  $M$  zvoleného. Involuce  $I_1$ ,  $I_2$  stanovíme každou dvěma družinami, jež obdržíme, vedouce bodem  $s$  paprsky rovnoběžné ku přímkám  $\overline{ab}_1$ ,  $\overline{a_1b}$  atd., z nichž skládají se degenerované kuželosečky svazků  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ . Společná družina  $U$ ,  $U'$  takto vzniklých obou paprskových involucí  $s$  směřuje k úběžným bodům  $u_\infty$ ,  $u'_\infty$ . Jsou-li tyto reálné, určují  $U$ ,  $U'$  směry asymptot; z nich a z bodů  $a$ ,  $a_1$ ,  $b$  sestrojíme hyperbolu  $K$  (*G. P. I.*, str. 31.), z týchž směrů a z bodů  $c'$ ,  $c'_1$ ,  $d'$  hyperbolu  $L'$ , kterou zase zpět oto-



Obr. 13.

číme kol  $S$  do roviny  $\tau$ . Hyperbol rýsovati netřeba, stačí středy jejich a vrcholy na osách  $X_1$ ,  $X_2$ ; další konstrukce rovníka  $R$  shoduje se s úlohou 20. V tomto případě je tedy plocha  $\varphi^2$  rotačním hyperboloidem.

Jsou-li však samodružné body  $u_\infty$ ,  $u'_\infty$  involuce  $I_3$  imaginární, nahradíme je jinými družinami;<sup>5)</sup> křivky  $K$ ,  $L'$  jsou pak elipsy podobné. Spojíme na př. body  $\overline{ab}$  a k úběžnému bodu  $t_\infty$  této přímky stanovíme v involuci  $I_3$  sdružený bod  $t'_\infty$ ; paprsek  $\overline{st'_\infty}$  určuje směr průměru  $V$  křivky  $K$ , sdruženého s tětivou  $\overline{ab}$ . Rozpolovacím bodem úsečky  $\overline{ab}$  vedme tedy  $V \parallel \overline{st'_\infty}$ ; průsečík  $(VX_1) \equiv o_1$  dá střed elipsy  $K$ . Z bodův

<sup>5)</sup> Konstrukci jejich viz v Čas. mathem., roč. XLVI. (1917), str. 19. dole pod čarou, poznámka 2).

$a, a_1, b$  opatřme si dva sdružené póly  $p, q$  na  $X_1$  podle úl. 1., načež  $\overline{o_1v} = -\overline{o_1w} = \sqrt{\overline{o_1p} \cdot \overline{o_1q}}$  stanoví vrcholy ellipsy  $K$  na ose  $X_1$ . Obdobně stanovíme vrcholy ellipsy  $L'$ , otočíme je kol  $S$  do roviny  $\tau$  zpět atd. Výsledkem je rotační ellipsoid.

*Dodatek.* Známa je konstrukce poloos hyperboly  $a, b$ , dány-li asymptoty její  $M, N$  (obr. 13.), tudíž i osy její  $X, Y$  a jeden bod křivky  $c$ . Vedeme-li bodem  $c$  kolmicí ku  $X$ , která protne asymptoty v bodech  $r, s$ , bude  $b^2 = \overline{cr} \cdot \overline{cs}$ . Tuto konstrukci odvozuje K. Pelz ve svých „Přednáškách“ pomocí průseku rotačního kužele s rovinou (viz také *G. P. IV.* na str. 7. dole). Užítím věty z naší úlohy 8. možno konstrukci odůvodnití rovinnou geometrií syntetickou: vedeme-li  $\overline{cp} \parallel M, \overline{cq} \parallel N$ , budou  $p, q$  sdružené póly na ose  $Y$ , pročež  $b^2 = \overline{op} \cdot \overline{oq}$ , a protože  $\overline{op} = \overline{rc}, \overline{oq} = \overline{sc}$ , jest  $b^2 = \overline{rc} \cdot \overline{sc}$ .

Z  $b, M, N$  sestrojíme již snadno poloosu hlavní  $a$ . Přímá konstrukce je tato:  $\overline{ceg} \perp Y, a = \overline{ct} = \sqrt{\overline{ce} \cdot \overline{cg}}$ . Důkaz: body  $h, j$  ( $\overline{cj} \parallel N$ ) jsou sdružené póly na ose  $X$ , tedy  $a^2 = \overline{oh} \cdot \overline{oj}$ ; ale  $\overline{oh} = \overline{ec}, \overline{oj} = \overline{gc}$ , tedy  $a^2 = \overline{ec} \cdot \overline{gc}$ .

## Řešení lineárních rovnic vektorových o jedné neznámé.

Napsal vl. rada **Ant. Libický.**  
(Dokončení.)

5. Řešení každé rovnice skalární, která má tvar složitější než rovnice (1), (5) a (9), lze uvést na řešení těchto jednoduchých rovnic. Jakých obrátů se při tom používá, poznáme nejlépe z těchto příkladů:

*Příklad 1.*

$$[\mathbf{x} \times \mathbf{a}] \cdot \mathbf{b} = m. \quad (14)$$

Ježto dle *V. A.*, pag. 18

$$[\mathbf{x} \times \mathbf{a}] \cdot \mathbf{b} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{x},$$

lze tuto rovnici psáti též ve tvaru

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{x} = m;$$

nahradíme-li tu součin  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  vektorem  $\mathbf{c} = (\widehat{ab} \sin \mathbf{ab}) \mathbf{c}_1$ , kolmým k rovině vektorů  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$ , nabudeme rovnice

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = m,$$