Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Žďárek

Příspěvek k theorii involuce kubické

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 47 (1918), No. 2-3, 121--130

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122336

křivka má za těžnou křivku hranu vratu té plochy, která vznikla deformací z plochy P.

Úloha vyslovená na počátku tohoto odstavce dá se tudíž převésti na obdobnou úlohu o rovinných křivkách: deformujme rozvinutelnou plochu P, jež má danou křivku Γ_1 za hranu vratu, tak, aby tato křivka přešla v rovinnou křivku γ_1; vyhledejme pak v její rovině p všechny křivky γ, jež mají γ_1 za těžnou; provedeme-li nyní zmíněnou deformaci v opačném směru, přejde γ_1 zase v Γ_1, rovina p ve plochu P a křivky γ přejdou ve hledané křivky Γ.

Integrace rovnice (14) jest obtížná i v tom případě, že hustota μ jest konstantní; tu platí

$$f(s) = \frac{1}{\mu}\int_0^s \mu\, ds = s, \quad F(m) = m, \quad F'(m) = 1.$$

a rovnice (14) přechází v

$$\sqrt{\left(1 + \frac{du}{d\sigma}\right)^2 + \frac{u^2}{\varrho^2}} = \frac{d}{d\sigma}\left[u\sqrt{\left(1 + \frac{du}{d\sigma}\right)^2 + \frac{u^2}{\varrho^2}}\right].$$

Je-li mimo to křivost ϱ^{-1} dané křivky Γ_1 konstantní, není proměnná σ v differenciální rovnici explicitně obsažena; rovnici lze známým způsobem převésti na rovnici 1. řádu.

Příspěvek k theorii involuce kubické.

Napsal **Jos. Žďárek**, assistent české techniky v Praze.

Mají-li dvě kuželosečky K, J tu vzájemnou polohu, že lze sestrojiti trojúhelník $x_1x_2x_3$ kuželosečce K vepsaný a kuželosečce J opsaný, potom existuje nekonečný počet trojúhelníků zmíněné vlastnosti. Vrcholy jejich vytvořují na K *kubickou involuci bodovou,* mající J za *kuželosečku involuční,* strany jejich pak vytvořují na J *kubickou involuci tečnovou,* pro niž je K *kuželosečkou involuční.*

Zvolíme-li tedy na K bod y_1 a protínají-li s něho k J vedené tečny kuželosečku K v bodech y_2 a y_3, jest spojnice y_2y_3 tečnou křivky J; body $y_1y_2y_3$ tvoří *trojinu* kubické involuce bodové na K. Je-li dle toho v_1 průsečíkem kuželoseček KJ (tak zv. bod rozvětvený — Verzweigungspunkt), splývají dvě strany $\overline{v_1 v_2}$, $\overline{v_1 v_3}$ takto sestrojeného trojúhelníka v tečně v bodě v_1 k J vedené, která tudíž protíná K v samodružném bodě $v_2 \equiv v_3$ zmíněné involuce; spojnice soumezných bodů v_2 a v_3 je patrně společnou tečnou křivek K, J. Má tudíž kubická involuce bodová na K *čtyři body samodružné*, jež jsou dotyčnými body kuželosečky K se společnými tečnami křivek K a J.

1. Každou kubickou involuci bodovou, jejíž samodružné body jsou vesměs reálné nebo vesměs imaginárné, lze kollineárnou transformací převésti v takovou *kubickou involuci na kružnici* K, jejíž *involuční kuželosečka* J je s touto *soustředná*. V tomto případě je tato ellipsou, jejíž poloosy a, b vyhovují jedné z relací

$$a \pm b = r, \tag{1}$$

je-li r poloměr kružnice K.[1])

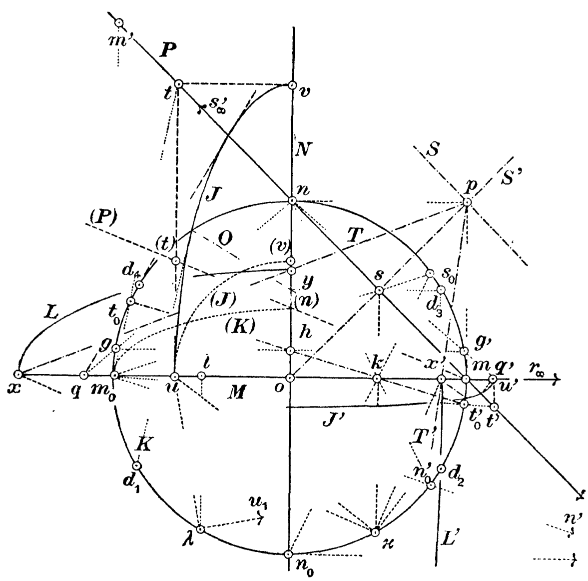
Abychom všechny takovéto a spolu souosé ellipsy vyčerpali, veďme středem o kružnice K kolmé průměry MN (obr. 1.), protínající tuto v bodech mm_0, nn_0. Zvolíme-li na spojnici $P \equiv \overline{mn}$ bod t a vedeme-li tímto rovnoběžky $\overline{tu}$, $\overline{tv}$ k osám NM, jsou tyto vrcholovými tečnami ellipsy J, ježto dle toho, zvolen-li bod t uvnitř nebo vně úsečky $\overline{mn}$, vyhovují poloosy $\overline{ou} = a$, $\overline{ov} = b$ jedné nebo druhé z obou shora uvedených relací.

Jsou-li K a J obecnými kuželosečkami, platí dle toho mezi nimi relace: Tečny involuční kuželosečky J vedené oběma vnějšími vrcholy μr (obr. 2.) společného polárného trojúhelníka $o\mu r$ těchto křivek tvoří čtyřúhelník $tt_1t_2t_3$ vepsaný do čtyřúhelníka mnm_0n_0, jehož vrcholy jsou průsečíky stran $\overline{ro}$ $\overline{\mu o}$ téhož trojúhelníka s kuželosečkou K.

2. Hledejme dále vztah mezi poloosami involuční kuželosečky kubické involuce *tečnové* na kružnici, pro případ, že jsou obě tyto kuželosečky soustředné. Kružnice K (obr. 1.) jest involuční kuželosečkou takovéto involuce tečnové na J. Transformujeme-li affinně tyto kuželosečky — volíce M za osu affinity — tak, aby J přešla v kružnici (J), přejde kružnice K v ellipsu (K); tečna $\overline{tv}$ ellipsy J přejde v tečnu $\overline{(t)(v)}$ kružnice (J);

[1]) Relace ta odvozena v pojednání: B. Procházka-J. Žďárek: „Harmonické středy soustavy čtyřbodové“ v Rozpravách Č. Akad. roč. 25. č. 31.

přímka $P \equiv \overline{tnm}$ v přímku $(P) \equiv \overline{(t)\,(n)\,m}$ procházející dvěma sousedními vrcholy involuční kuželosečky (K). Tudíž *přímka procházející vrcholem čtverce kružnici opsaného vytíná na středních příčkách téhož čtverce vrcholy s kružnicí soustředné ellipsy, jež je involuční kuželosečkou kubické involuce tečnové na*



Obr. 1.

téže kružnici. Označíme-li a, b poloosy ellipsy, r poloměr kružnice, platí dle uvedené konstrukce vztahy

$$\frac{1}{a} \mp \frac{1}{b} = \frac{1}{r} \tag{2}$$

dle toho, leží-li vrcholy ellipsy na přímce (P) po téže anebo po různých stranách vrcholu čtverce.

Uvažujme kubické involuce tečnové na kružnici K. Vrcholy xy jedné z involučních kuželoseček L na osách MN obdržíme, vedeme li pólem p přímky P ke kružnici K libovolný paprsek $T \equiv \overline{pxy}$. Je-li tento polárou bodu t k téže kružnici, jsou křivky J a L, jak zřejmo, *polárně reciproké* vzhledem ku K.

3. Sestrojme takovou s kružnicí K soustřednou ellipsu, jež by byla *involuční kuželosečkou kubické involuce bodové a současně involuční kuželosečkou kubické involuce tečnové* na téže kružnici. Tato musí být *shodna s ellipsou polárně reciprokou* vzhledem ke kružnici K, jsouc k ní o 90^0 otočena; proto poloosy její ab vyhovují podmínce $ab = r^2$, kteráž spolu s podmínkou $a - b = r^2$[2]) dává $b:r = r:(r+b)$, což je známá definice zlatého řezu. *Je-li tudíž r větším, b menším dílem úsečky a rozdělené zlatým řezem a sestrojíme-li s ellipsou o poloosách ab soustřednou kružnici poloměrem r, lze na kterékoliv z těchto kuželoseček vytknouti bodovou nebo tečnovou involuci kubickou, mající za involuční kuželosečku druhou z těchto křivek*, t. j. lze sestrojiti nekonečné množství trojúhelníků jedné z těchto křivek opsaných a druhé vepsaných.[3]) Zvolíme-li hlavní osu takovéto ellipsy za osu affinity a transformujeme-li tuto tak, aby vedlejší poloosa transformované ellipsy rovnala se poloměru kružnice, přejdou obě křivky ve shodné o 90^0 otočené soustředné ellipsy, jichž poloosy rovnají se dílům téže úsečky rozdělené zlatým řezem, jimž tedy taktéž přísluší uvedená vlastnost.

4. Každý bod t přímky P (obr. 1.) určuje tedy jednoznačně involuční kuželosečku J bodové involuce kubické na kružnici K. Křivkami KJ určena je *osnova* kuželoseček s ellipsou J souosých. V této jest *kromě J ještě jedna kuželosečka J'*, která jest též *involuční kuželosečkou* nové *bodové involuce kubické* na kružnici K, jež s předešlou má *tytéž samodružné body* v dotyčných bodech kružnice K se společnými tečnami křivek KJJ'. *Involuce ty slují přidružené.*

Opíšeme-li kuželosečce J' (prozatím neznámé) obdélník tvořený jejími tečnami vrcholovými, padne jeden jeho vrchol t' na

---

[2]) Vztah $a + b = r$ k cíli nevede.

[3]) Jiný případ vzájemné polohy kuželoseček, jimž přísluší uvedená vlastnost, uvádí Dr. *Emil Weyr* v „Bemerkungen über eine besondere Art inwolutorisch liegender Kegelschnitte“, Věstník král. č. spol. nauk, r. 1876. Tento lze kollineárnou transformací převésti ve dvě shodné kružnice, protínající se pod úhly 60^0. Týká se tudíž kubických involucí se dvěma reálnými elementy samodružnými. Ostatní Weyrem v uvedeném pojednání odvozené vlastnosti těchto křivek však v našem případě neplatí. Příslušné kubické involuce stotožňují se ve Weyrově případě sinvolucemi přidruženými, čehož nahoře není.

přímku P. Každému bodu t přiřazen takto jediný bod t' a naopak. Proto *takovéto dvojice bodů* tt'..., příslušných involučním kuželosečkám JJ' přidružených kubických involucí bodových na kružnici K, jsou *družinami téže kvadratické involuce bodové* na přímce P.

Každá osnova souosých kuželoseček, jíž náleží kružnice K, vede takto k jedné družině bodů zmíněné involuce. Abychom tuto involuci stanovili, uvažujme nejprve osnovu s kružnicí K soustředných kružnic a hledejme ony dvě, které jsou spolu kuželosečkami involučními. Položíme-li do relací (1) $a = b$, dává prvá $a = b = \frac{r}{2}$, druhá $a = b = \infty$. Vrcholem čtverce opsaného prvé kružnici na P je půlící bod s úsečky $\overline{mn}$, kdežto pro druhou kružnici splývá stejně sestrojený bod s'_∞ s úběžným bodem přímky P. Je tudíž s středem zmíněné involuce, což ovšem plyne i z té okolnosti, že involuční kuželosečky s JJ' shodné a o 90° otočené určují na P družinu téže involuce k družině tt' dle středu s souměrnou.

Abychom stanovili další družinu téže involuce, uvažujme osnovu kuželoseček dotýkajících se kružnice K v bodech mm_0 jejího průměru M. Pro ty je tudíž $a = r$, což dosazeno do relací (1) dává $b = 0$, $b = 2r$. Prvá z obou takto stanovených kuželoseček involučních, degenerujíc v úsečku $\overline{mm_0}$, určuje na P bod m, druhá (o poloosách $a = r$, $b = 2r$) bod m' (obr. 1.), kde jest patrně $\overline{m'n} = \overline{nm}$.

Uvažovaná kvadratická involuce jest středem s a družinou mm' úplně stanovena a jak zřejmo elliptická.

Abychom *ke kuželosečce J stanovili involuční kuželosečku J' přidružené kubické involuce* bodové na K, třeba jen ve zmíněné involuci na P stanoviti k t přidružený bod t'. Za tím účelem promítněme na př. tuto s bodu m_0 na K; body m, m' promítnou se do bodů m, n_0, body s, s'_∞ do s_0, n_0; spojnice $\overline{mm_0} \equiv M, s_0n_0$ určují involuční střed k povstalé involuce kvadratické na K, kterýž půlí úsečku $\overline{om}$. Neboť promítneme-li libovolnou řadu bodovou na P kolmo do osy M, povstanou dvě podobné řady bodové; promítneme-li prvou s bodu m_0, druhou s bodu n_0 projektivními svazky paprskovými, vytvořují tyto zřejmě kružnici K; paprsku $\overline{m_0s}$ odpovídá paprsek $\overline{n_0k}$, t. j. k

je kolmým průmětem bodu s na osu M. Je-li t_0 průsečíkem paprsku $\overline{tm_0}$ s K, a protne-li paprsek $\overline{t_0 k}$ kružnici K podruhé v t'_0, leží hledaný průsečík t' vrcholových tečen křivky J' s přímkou P na paprsku $\overline{m_0 t_0'}$.

Jinak stanovíme kuželosečku J' takto: Rovnoběžné tečny vrcholové $\overline{tu}$ $\overline{t'u'}$, ... přidružených kuželoseček involučních JJ', procházející sdruženými body tt'... přímky P určují na ose M družiny uu',... nové involuční kvadratické řady, kteráž je průmětem zmíněné involuce na P do M a je určena středem k a družinou mm_0. Je-li tudíž $\varkappa$ jeden z průsečíků spojnice $\overline{sk} \perp M$ s kružnicí K, stojí přímka $\overline{u'\varkappa}$ kolmo k spojnici $\overline{u\varkappa}$.[4])

5. Mysleme si přímku A soumeznou k ose M a na ní právě určenou kvadratickou involuci. Pohybuje-li se tato přímka tak, že její bod o probíhá osu N, bod m pak osu M, vytvořují každé dva sdružené body uu' . . . zmíněné involuce při tomto elliptickém pohybu, jak zřejmo, sdružené kuželosečky involuční JJ'... Pro obecnou polohu A^0 této přímky jsou průsečíky její s kružnicí K jednou družinou téže involuce,[5]) střed její půlí úsečku vyťatou na A^0 osami MN. Touto involucí při konstrukci křivky J' možno nahraditi involuci na přímce P.[6])

---

[4]) Při tomto způsobu určení involuční křivky J' třeba ovšem míti na zřeteli, že vrcholem u určeny jsou dvě involuční kuželosečky J a J_1, jichž poloosy na ose N mají délky $r + \overline{ou}$, $r - \overline{ou}$. Je li λ průsečíkem symmetrály $\overline{t\lambda}$ úsečky $\overline{om_0}$ s K, a sestrojíme-li na ose M bod u_1 tak, že $\overline{u_1\lambda} \perp \overline{u\lambda}$, je u_1 vrcholem kuželosečky involuční přidružené k J_1.

[5]) Důkaz podán v pojednání v poznámce [1]) uvedeném.

[6]) Ke konstrukci křivky J' vede taktéž věta uvedena v pojednání Dra *Emila Weyra*: „*Grundzüge einer Theorie der cubischen Involutionen*," (Praha 1874, nákl. král. č. spol. nauk), kteráž zní: „Jestliže pro každý kuželosečce K vepsaný a jiné kuželosečce J opsaný trojúhelník zobrazíme přímku, spojující tři průsečíky stran trojúhelníka s tečnami křivky K v protilehlých vrcholech, obalují tyto přímky kuželosečku, mající společně tečny křivek K a J rovněž za tečny." Možno však dále dokázati, že *takto vytvořená kuželosečka je kuželosečkou involuční* a tudíž stotožňuje se s křivkou J'. Sestrojíme-li pro tentýž trojúhelník průsečík tří paprsků, spojujících jeho vrcholy s dotyčnými body jeho stran na J, vytvořují povstalé body kuželosečku L, kteráž, jakožto polárně reciproká k J' vzhledem na K, jest involuční kuželosečkou tečnové kubické involuce na K; dotyčné body jednotlivých trojin tečnových této involuce s K vytvořují na této kubickou involuci bodovou, přidruženou k dané.

6. Jsou-li v reciprokém případě LL' (obr. 1.) involuční kuželosečky *přidružených* kubických involucí *tečnových* na kružnici K, TT' paprsky procházející týmž vrcholem p kružnici K opsaného čtverce a spojující každý dva vrcholy ellips LL', tvoří tyto paprsky jakožto poláry bodů tt' ke kružnici K družinu kvadratické involuce paprskové, polárně reciproké k uvažované involuci tt' . . . na P. V této odpovídá paprsku $S' \equiv \overline{po}$ k tomuto kolmý paprsek S, paprsku $\overline{pm}$ paprsek $\overline{pm_0}$, paprsku $\overline{pn}$ paprsek $\overline{pn_0}$, procházející bodem k. Osa M protíná zmíněný involuční svazek v bodové involuci o středu k, určené další družinou mm_0. Abychom tudíž k paprsku T stanovili přidružený T', t. j. abychom k dané involuční kuželosečce L stanovili sdruženou L', spojme vrchol $x \equiv (TM)$ křivky L s bodem $\varkappa$ a sestrojme $\overline{\varkappa x'} \perp \overline{x\varkappa}$, $x' \equiv (M\overline{\varkappa x'})$, načež jest $T' \equiv \overline{px'}$. Je tudíž konstrukce vrcholu x' kuželosečky L' z vrcholu x křivky L táž, jako v případě kubických involucí bodových.

7. *V osnově kuželoseček určené čtyřmi dle kolmých průměrů MN souměrnými tečnami kružnice K stanoviti obě involuční ellipsy JJ' přidružených bodových involucí kubických.*[7])

---

[7]) Poněvadž dotyčné body $d_1 d_2 d_3 d_4$ zmíněných čtyř tečen jsou samodružnými body obou hledaných sdružených involucí, je úloha totožná s následní: *Stanoviti obě kubické involuce, dané čtyřmi body samodružnými.* Dr. Emil Weyr v pojednání: „*Weitere Bemerkungen über die Abbildung einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung auf einen Kegelschnitt*" (Sitzungsb d. k. Akad. d. Wiss., Vídeň, 1876) řeší úlohu (pro obecný případ) takto: Promítněme vrcholy trojúhelníka tvořeného třemi tečnami na př. v bodech $d_2 d_3 d_4$ s bodu d_1 na K, čímž povstane nový trojúhelník s prvým perspektivný. Osa perspektivná vytíná na K k d_1 příslušné body rozvětvené. Z odvození uvedené konstrukce [ve spise uvedeném v poznámce [6])] vyplývá i konstrukce pro případ, že jsou toliko dva samodružné body reálné. Jiná konstrukce plyne z věty: „Zmíněné body rozvětvené jsou harmonickými středy 2. stupně pro pól d_1 vůči soustavě $d_2 d_3 d_4$ bodů základních" [v pojednání v poznámce [1])], odkudž plyne i konstrukce pro případ, že jsou toliko dva samodružné body reálné („Časopis" roč. 45., str. 344). Pro speciální v obr. 1. vyznačenou polohu spojuje hledaná osa perspektivná O paty kolmic s bodu d_3 — protilehlého k bodu d_1 na kružnici K — na osy $M\,N$ spuštěných. V případě, kdy všechny samodružné body jsou imaginárné, ležíce podvojně na dvou kuželosečky K neprotínajících přímkách (reálných), stanovme póly $q\,q'$ těchto přímek vůči K jakožto reálné vrcholy opsaného čtyřúhelníka tečen (podvojně imaginárných), pro kterýžto případ úloha v textu provedena.

V každé takto určené osnově jsou dvě přidružené involuční kuželosečky JJ' (odst. 4.), jež naopak tuto osnovu jednoznačně určují. Ježto takovéto dvojiny involučních kuželoseček určují na přímce P družiny involuční řady tt' . . ., přísluší každé osnově projektivně jedna družina zmíněné involuce. Čtyři společné tečny každé z osnov, protínajíce se podvojně na osách MN (a přímce úběžné) vytvořují na těchto kvadratické involuční řady, taktéž s řečenými osnovami projektivné. Jsou tudíž i právě zmíněné kvadratické involuce na MN projektivné s involucí tt', ... na P.

Projektivný vztah zmíněných řad involučních na přímce P a jedné z os, na př. M, bude úplně určen, stanovíme-li ke třem osnovám kuželoseček příslušné družiny obou těchto řad. Osnově s kružnicí K soustředných kružnic přísluší na P družina ss'_∞, na M střed o jakožto samodružný bod příslušné involuční řady; osnově stanovené podvojně splývajícími tečnami v bodech m a m_0 přísluší na P družina mm', na M družina mm_0; posléze osnově určené podvojně splývajícími tečnami v bodech n a n_0 na P družina $nn' (\overline{mn'} \equiv \overline{nm})$, na M pak úběžný bod r_∞, který je druhým samodružným bodem uvažované involuce na ose M.

Platí tudíž vztah

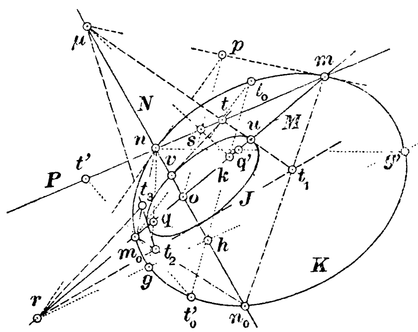
$$ss'_\infty,\ mm',\ nn', \ldots \barwedge oo,\ mm_0,\ r_\infty r_\infty, \ldots$$

Jsou-li qq' (v obr. 1. stotožnil se bod q' s bodem u') průsečíky tečen dané osnovy, — jejíž involuční kuželosečky JJ' chceme stanoviti —, na ose M, stanovme v právě vytčeném projektivném vztahu k družině qq' homologickou družinu tt'. Za tím účelem promítněme na př. involuční řadu přímky P s bodu m_0 na kružnici K a involuční řadu na M s bodu n na tutéž kružnici. V prvém případě označme průměty vytčených tří družin pořadem $s_0 n_0$, mm_0, nn'_0, v druhém pak $n_0 n_0$, mm_0, nn. Spojnice $\overline{s_0 n_0}$, $\overline{mm_0}$, $\overline{nn'_0}$ vytvořují svazek o středu k (odst. 4.), spojnice $\overline{n_0 n_0}$, $\overline{mm_0}$, $\overline{nn}$ druhých tří družin osnovu s osou M rovnoběžných paprsků. Oba svazky, majíce samodružný paprsek $\overline{mm_0}$, jsou perspektivné dle osy N.

Promítněme tudíž (obr. 1) body qq' s bodu n na kružnici K do bodů gg', spojme průsečík $h \equiv (\overline{Ngg'})$ s bodem k a vyhledejme průsečíky $t_0 t_0'$ této spojnice s kružnicí K. Paprsky $\overline{m_0 t_0}$, $\overline{m_0 t_0'}$ vytínají na P družinu tt'.

Řešení lze provésti beze změny i tehdy, jsou-li tečny osnovy imaginárné a dané oběma reálnými průsečíky, připadajícími dovnitř kružnice K.

Uvedenou konstrukci snadno lze applikovati i na případ obecný. *Dána-li libovolná kuželosečka* K *a body* qq' na př. uvnitř ní (obr. 2.), a chceme-li *v osnově určené jejími tečnami (imaginárnými), procházejícími body* qq' *určiti obě kuželosečky involuční* kubických involucí bodových na K, vyhledejme průsečíky mm_0 spojnice $M \equiv \overline{qq'}$ s K, dále vyhledejme samodružné body o, r involuce určené na M družinami mm_0, qq'. Polára N bodu r (vnějšího vzhledem ku K) procházející pólem μ přímky M určuje na K body nn_0. Na přímce $P \equiv \overline{mn}$ určíme bod s na



Obr. 2.

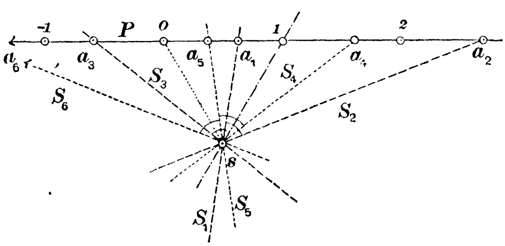
spojnici bodu o s průsečíkem p přímek $\overline{\mu m}$, $\overline{rn}$. Bod k přímky M leží spolu na paprsku $\overline{\mu s}$. Paprsky $\overline{nq}$, $\overline{nq'}$ určí na K body gg', jichž spojnice $\overline{gg'}$, jdoucí bodem r, vytne na N bod h. Průsečíky t_0t_0' spojnice $\overline{kh}$ s kružnicí K promítněme s bodu m_0 na přímku P do bodů tt'. Paprsky $\overline{\mu t}$, $\overline{rt}$ jsou tečnami kuželosečky J, jich průsečíky uv s přímkami MN dotyčnými body těchto tečen; křivka J je těmito elementy a polárným trojúhelníkem μor úplně určena. Podobně vede bod t' ke kuželosečce J'.

Poznámka. Zvláštním případem *kubické involuce paprskové* je involuce, jejíž každé 3 paprsky trojiny svírají vzájemně úhly 60°.

Involuce této použijeme, *abychom sestrojili 6 hodnot dvojpoměrů* tvořených týmiž čtyřmi elementy, dána-li hodnota λ jednoho z nich.

Vytkněme za tím účelem na přímce P řadu číselnou $\ldots -1, 0, 1, 2 \ldots$ (obr. 3.); nad délkou $\overline{o1}$ sestrojme rovnostranný trojúhelník $o1s$.

Vytkněme v přímce P bod a_1 tak, aby $\overline{oa_1} = \lambda$ a označme $\overline{sa_1} \equiv S_1$. Potom paprsky $S_2 \equiv \overline{oa_2}$, $S_3 \equiv \overline{oa_3}$ svírající s S_1 úhly 60^0, vytínají na P body a_2, a_3, jichž vzdálenosti od bodu o jsou, jak jednoduchý počet ukazuje, $\frac{1}{1-\lambda}$ resp. $\frac{\lambda - 1}{\lambda}$.



Obr. 3.

Sestrojíme-li dále paprsky $S_4 S_5 S_6$, symmetrické dle osy $\overline{s1}$ k paprskům $S_1 S_2 S_3$, vytínají tyto na ose P body $a_4 a_5 a_6$, jichž vzdálenosti od bodu o jsou $\frac{1}{\lambda}$, $1 - \lambda$, $\frac{\lambda}{\lambda - 1}$, tudíž *každá trojina bodem s vedených paprsků $S_1 S_2 S_3$ svírajících úhly* 60^0 spolu s trojinou $S_4 S_5 S_6$ *souměrnou dle přímky $\overline{s1}$* (nebo dle přímky $\overline{os}$, nebo dle kolmice s bodu s ku P spuštěné atd.) *vytíná na ose P šest bodů $a_1 \ldots a_6$, jichž vzdálenosti od počátku o jsou rovny 6 hodnotám dvojpoměrů téže čtveřiny elementů.*

Několik konstrukcí kuželoseček.

Podal dvor. rada prof. Dr. **Vinc. Jarolímek.**

(Dokončení.)

II. **Dané prvky s část imaginárné.**

11. *Parabola daná osou X a dvěma body imaginárnými a, b* (obr. 9.). Tyto buďtež samodružnými body elliptické involuce 11, 22 dané na reálné přímce L. Sestrojme střed involuce ω, potenci její $-\overline{\omega u}^2$, a bod m sdružený k bodu $(LX) \equiv \equiv p\,(\overline{um} \perp \overline{pu})$; bodem m jde polára paraboly $P \perp X$ pro pól p.