Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 1, 60--64

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122295

$$N = 10(A + pB - pB) + B$$

$$N = 10(A + pB) - B(10p - 1)$$

$$\frac{N}{n} = 10 \cdot \frac{A + pB}{n} - B.$$

Příklad: Je-li $p = 2$, jest $n = 19$. Postupným užitím této věty při $p = 2$ vyšetříme tedy, je-li dané číslo dekadické soustavy dělitelno 19.

$$\begin{array}{r|l}
N = 656773 & 3 \, . \, 2 = 6 \\
\underline{6} & \\
65683 & 3 \, . \, 2 = 6 \\
\underline{6} & \\
6574 & 4 \, . \, 2 = 8 \\
\underline{8} & \\
665 & 5 \, . \, 2 = 10 \\
\underline{10} & \\
76 & 6 \, . \, 2 = 12 \\
\underline{12} & \\
19 &
\end{array}$$

Čtenář snadno pozná, jak by se mohl takovýto počet upraviti a zkrátiti; dovede též z vět dokázaných vyvoditi způsob, kterým lze rozhodnouti o dělitelnosti čísly 7, 11, 13, 23, 31 atd.

Úlohy.

Úloha 1.

Bodem p v půdici ab trojúhelníka abc vedeny příčky $pm \parallel bc$, $pn \parallel ac$. Je-li $\triangle apm = M$, $\triangle bpn = N$, který jest obsah rovnoběžníka $cmpn$ a trojúhelníka abc?

Úloha 2.

Do kružnice poloměru r vepsán pravidelný osmiúhelník a na každé jeho straně jakožto přeponě sestrojen trojúhelník pravoúhlý rovnoramenný *a*) vně, *b*) vnitř osmiúhelníka. Vypočítati obsah hvězdovitého úhelníka tak vzniklého.

Úloha 3.

Řešiti rovnici

$$\sin^2 x - \cos^2 x \operatorname{tg}^2 54^0 = \frac{1}{2}.$$

Úloha 4.

Které jsou úhly rovnoramenného lichoběžníka, jemuž lze vepsati kružnici a jehož úhlopříčky svírají spolu úhel 60^0.

Úloha 5.

Sestrojíme-li ke kružnici středu o a poloměru r v bodě a tečnu a přeneseme-li na ni

$$\overline{am} = \frac{1}{2} r, \quad \overline{mn} = \frac{1}{7} r,$$

protíná spojnice $\overline{on}$ kružnici v bodě b tak, že $\overline{ab}$ rovná se přibližně straně pravidelného 11tiúhelníka kružnici vepsaného. S jakou přesností?

Úloha 6.

Řešiti trojúhelník, dána-li výška v, těžnice t a příčka u půlící úhel; všechny tři příčky vycházejí z téhož vrcholu.

Úloha 7.

V pětiúhelníku *abcde* dány jsou strany

$$\overline{ab} = 33, \quad \overline{bc} = 56, \quad \overline{cd} = 25, \quad \overline{de} = 48, \quad \overline{ea} = 36$$

a úhly

$$\sphericalangle\, bac = 59^0 29' 25'', \quad \sphericalangle\, dae = 53^0 7' 49''.$$

Vypočítati úhly pětiúhelníka, jeho úhlopříčky a obsah.

Úloha 8.

Místo B leží 74·15 *km* východně od A, místo C 25·9 *km* severovýchodně od B, D pak 78·4 *km* na západoseverozápad od C. V kterou stranu a jak daleko leží D od A?

Úloha 9.

Pozemek má podobu trojúhelníka *abc*, ve kterém $\overline{ab} = 156\,m$, $\overline{ac} = 99\,m$, $\sphericalangle acb = 126^0\,52'\,13''$. Příčkou *mn* má býti oddělen $\triangle mnc = \frac{4}{9} \triangle abc$. Je-li *m* v *ac* tak dáno, že $\overline{cm} = 50\,m$, kterou délku má $\overline{cn}$ a $\overline{mn}$? Který jest obsah trojúhelníka *mnc*?

Úloha 10.

Dány jsou mimoběžky A, B a rovina R; stanoviti přímku, která jsouc rovnoběžná s rovinou R, protíná obě mimoběžky v stejných úhlech.

Úloha 11.

Trojbokému hranolu kolmému lze vepsati kouli, dotýkající se obou základen i všech stěn pobočných. Jsou-li strany základny $a = 10$, $b = 17$, $c = 21$, který jest poloměr koule vepsané a který poloměr má koule opsaná? Jak jsou vzdáleny od sebe středy obou koulí?

Úloha 12.

Dány jsou dvě koule poloměrů r_1, r_2; vzdálenost jejich středů $d > r_1 + r_2$. *a*) Které jest geometrické místo bodu svítícího, z něhož osvětlena jest $\frac{1}{m}$ povrchu koule první a $\frac{1}{n}$ povrchu koule druhé? *b*) Které jest geometrické místo bodu svítícího, z něhož osvětlena jest poměrně stejná část povrchu na obou kulích?

Úloha 13.

Do krychle o hraně a vepsány jsou dva pravidelné čtyrstěny, jichž hrany jsou úhlopříčky stěn na krychli. Ustanoviti obsah tělesa složeného z těchto čtyrstěnů se prostupujících.

Úloha 14.

Komolý kužel rovná se obsahem válci, jehož základna má poloměr r; výška obou těles jest stejná $v = \frac{12}{7} r$. Osový řez kužele má se k osovému řezu válce jako 13 : 28. V kterém poměru jsou povrchy obou těles?

Úloha 15.

Pravidelný mnohostěn měj stěny n-úhelné a rohy m-hranné, ω buď úhel dvou sousedních stěn; jest dokázati, že

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{\cos\frac{2R}{m}}{\sqrt{-\cos\left(\frac{2R}{4}+\frac{2R}{m}\right)\cos\left(\frac{2R}{n}-\frac{2R}{m}\right)}}.$$

Úloha 16.

V čtyrstěnu $abcd$ jest

$$ad = bc = 13, \quad bd = ac = 20, \quad cd = ab = 21.$$

Vypočítati povrch i obsah čtyrstěnu, jakož i poloměr koule vepsané a opsané.

Úloha 17.

Sestrojiti rovnoramenný lichoběžník, jehož úhlopříčky jsou kolmé k ramenům, dána-li jeho střední příčka a výška.

Úloha 18.

V trojúhelníku, jehož vrcholy jsou

$$a(2, 5), \quad b(8, 1), \quad c(6, 7)$$

ustanoviti bod m tak, aby

$$\triangle abm : \triangle bcm : \triangle cam = 3 : 4 : 5 .$$

Úloha 19.

Vyšetřiti geom. místo bodu, jehož vzdálenost od přímky

$$A \equiv x + y - 2 = 0$$

jest střední měř. úměrnou vzdáleností jeho od přímek

$$B \equiv x - 3y + 10 = 0 , \quad C \equiv 3x - y - 10 = 0 .$$

V které poloze jsou dané přímky ku hledanému místu geometrickému?

Úloha 20.

Ke kružnici $x^2 + y^2 - 20x - 10y + 100 = 0$ vedeny počátkem tečny. Stanoviti kružnici, která se dotýká kružnice dané i obou těchto tečen.

Úloha 21.

K logarithmování upraviti výraz

$$(a) \qquad \sin\alpha + \frac{(1 - \cos\alpha)\left(\sin\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha - \cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$(b) \qquad \sin\alpha - \frac{(1 + \cos\alpha)\left(\cos\alpha - \cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}} .$$

Prof. *A. Strnad.*