František Hoza

Poznámka o sférické trigonometrii

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 11 (1882), No. 3, 212--214

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122259

x_2y_2, x_3y_1, x_1y_3) a po třetí s bodem z_3 (průsek přímek x_3y_3, x_1y_2, x_2y_1).

„Nalezají-li se dvě soumístné kollineárné roviny v cyklické prometnosti trojprvkové, pak tvoří každé dvě trojiny dva na trojí způsob perspektivné trojúhelníky. Středy těchto tří perspektivit tvoří opět trojinu cyklické prometnosti. Každá z těchto tří trojin plyne z ostatních dvou, skládajíc se ze středů perspektivit oněch dvou trojin.“

Pro každou perspektivnou polohu trojúhelníků $x_1x_2x_3$, $y_1y_2y_3$ obdržíme osu perspektivnou spojující tři průseky tří párů příslušných stran. Tak obdržíme pro perspektivný střed z_1, kterým probíhají přímky x_1y_1, x_2y_3, x_3y_2 osu Z_1, v níž obsaženy jsou průseky přímek x_1x_2, y_1y_3; x_2x_3, y_2y_3; x_1x_3, y_1y_2. Bodu z_2 odpovídá osa Z_2 obsahující průseky přímek x_2x_3, y_2y_1; x_3x_1, y_3y_1; x_2x_1, y_2y_3 a perspektivnému středu z_3 konečně odpovídá perspektivická osa Z_3 obsahující průseky přímek x_3x_1, y_3y_2; x_1x_2 y_1y_2; x_3x_2, y_3y_1. Jelikož však přímky, jichž průseky leží na Z_3 prometně přísluší přímkám, jichž průseky leží na Z_2 a tyto opět přímkám, jichž průseky na Z_1 leží, tož soudíme, že přímky Z_1 Z_2 Z_3 tvoří též trojinu cyklické prometnosti, jelikož přímce Z_1 odpovídá Z_2 a této Z_3. Právě tak obdržíme pro trojúhelníky $x_1x_2x_3$, $z_1z_2z_3$ tři osy perspektivné: $Y_1Y_2Y_3$, které trojinu tvoří a konečně pro trojúhelníky $y_1y_2y_3$, $z_1z_2z_3$ obdržíme trojinu os $X_1X_2X_3$. Spojíme-li ze známých posud trojin dvě, které spojeny ještě nebyly, obdržíme nové trojiny v počtu libovolném, opakujeme-li tytéž konstrukce dále. (Pokračování.)

Poznámka o sférické trigonometrii.

Napsal

Prof. F. Hoza.

Ze stran a, b, c sférického trojúhelníka lze vypočísti úhly jeho α, β, γ podle známých vzorců:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}, \qquad (1)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}, \text{ atd.} \tag{3}$$

Písmeno s značí polovici obvodu sférického trojúhelníka. Jest tedy

$$0 < s < 180^0.$$

Chceme-li však z daných úhlů α, β, γ vypočísti strany a, b, c, užijeme trojúhelníka polarného, jehož strany a', b', c' a úhly α' β' γ' vyhovují podmínkám:

$$a' = 180^0 - \alpha,\quad b' = 180^0 - \beta,\quad c' = 180^0 - \gamma,$$
$$\alpha' = 180^0 - a,\quad \beta' = 180^0 - b,\quad \gamma' = 180^0 - c,$$
$$s' = \frac{a'+b'+c'}{2} = 270^0 - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

Postavme do vzorců (1), (2), (3) místo částí původního části polarného trojúhelníka a vyjádřeme tyto oněmi. Tím obdržíme známé vzorce:

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(S-\beta)\cos(S-\gamma)}{\sin\beta \sin\gamma}}, \tag{4}$$

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos(S-\alpha)}{\sin\beta \sin\gamma}}, \tag{5}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(S-\beta)\cos(S-\gamma)}{-\cos S\cos(S-\alpha)}}, \tag{6}$$

v nichž $S = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$, $90^0 < S < 270^0$.

Již v 57. dílu Grunertova Archivu navrhl Dostor, pojednávaje tam o trojhranu, jinou substituci, jíž se docílí vzorců zcela podobných vzorcům původním.

Budiž $\sigma = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} - 90^0$.

Patrně jest $0 < \sigma < 180^0$.

Touto substitucí obdržíme:

$$s' = 270^0 - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 180^0 - \sigma,$$

$$s' - a' = 90^0 - \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} = \alpha - \sigma,$$

$$s' - b' = 90^0 - \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} = \beta - \sigma,$$

$$s' - c' = 90^0 - \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} = \gamma - \sigma.$$

Jelikož $\beta + \gamma < 180^0 + \alpha$, jest $\alpha - \sigma > 0$. Totéž platí o rozdílech $\beta - \sigma$, $\gamma - \sigma$. Zaveďme tyto hodnoty do vzorců (1), (2), (3) vztažených ku trojúhelníku polarnému, a obdržíme

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\beta - \sigma)\sin(\gamma - \sigma)}{\sin\beta\sin\gamma}}, \qquad (7)$$

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\sigma\sin(\alpha - \sigma)}{\sin\beta\sin\gamma}}, \qquad (8)$$

$$\cot\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\beta - \sigma)\sin(\gamma - \sigma)}{\sin\sigma\sin(\alpha - \sigma)}} \text{ atd.} \qquad (9)$$

Tyto vzorce dostaneme též přímo ze vzorců (1), (2), (3), když na levé straně zaměníme funkce s kofunkcemi, na pravé straně převrátíme veškeré rozdíly a písmena latinská zaměníme s řeckými. Veličina σ leží v týchž mezích, jako veličina s. I praktické počítání dle vzorců (7), (8), (9) jest v mnohém ohledu výhodnější než dle vzorců (4), (5), (6). Proto vzorce (7), (8) a (9) všem odborníkům co nejvřeleji odporučuji.

V Hradci Králové, dne 23. prosince 1881.

O ustanovení vzorce pro sin $(\alpha + \beta)$ a cos $(\alpha + \beta)$.

Studujícím napsal **V. J. Hübner.**

Vycházejme tu od trojúhelníku *abc*, okolo něhož opišme křivku kruhovou K. Jak vidno, vyznačí-li se průměr *cd* a tětivy *ad*, *db*, jest:

$$\sphericalangle bdc = \sphericalangle bac = \sphericalangle \alpha,$$
$$\sphericalangle adc = \sphericalangle abc = \sphericalangle \beta.$$

Dle věty Ptolomeovy jest v čtyrúhel. *abcd*:

$$\overline{ab} \,.\, \overline{cd} = \overline{ac} \,.\, \overline{bd} + \overline{bc} \,.\, \overline{ad},$$

a ještо:

$$\overline{ac} = \overline{cd} \sin\beta,$$
$$\overline{bd} = \overline{cd} \cos\alpha,$$