

Ludvík Kraus

Poznámka k rovnicím, jež mají pouze reálné kořeny

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 2, 63--64

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122231>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1886

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## Poznámka k rovnicím, jež mají pouze reálné kořeny.

Napsal

dr. Ludvík Kraus.

Je-li

$$x^n - f_1 x^{n-1} + f_2 x^{n-2} - \dots = 0$$

taková rovnice, platí, že hořejší mez kořenů je

$$\frac{f_1}{n} + \frac{n-1}{n} \sqrt{f_1^2 - \frac{2nf_2}{n-1}} = A$$

a dolejší mez

$$\frac{f_1}{n} - \frac{n-1}{n} \sqrt{f_1^2 - \frac{2nf_2}{n-1}} = -B.$$

*Důkaz.* Ze Sturmovy věty plyne

$$(n-1)f_1^2 - 2nf_2 = C^2 \quad (C \text{ reálné, posit.}).$$

Je-li  $\lambda$  jeden z kořenů, bude i

$$(n-2)(\lambda - f_1)^2 - 2(n-1)(\lambda^2 - f_1\lambda + f_2) > 0$$

anebo

$$\begin{aligned} -n\lambda^2 + 2\lambda f_1 + f_1^2(n-2) - 2(n-1)f_2 &> 0, \\ -n^2\lambda^2 + 2\lambda n f_1 + f_1^2(n^2 - 2n + 1) - f_1^2 - 2n(n-1)f_2 &> 0, \\ - (n\lambda - f_1)^2 + (n-1)C^2 &> 0, \end{aligned}$$

tedy

$$|n\lambda - f_1| < \sqrt{n-1} \cdot C. \qquad \text{Q. E. D.}$$

### Dodatek.

Pro snadnější porozumění této poznámce, která se nalézá v pozůstalosti zvěčnělého dra L. Krause, podotýká náš proslulý Ed. Weyr toto:

Dle návodu v Sturmově větě obsaženého dělme daný polynom

$$x^n - f_1 x^{n-1} + f_1 x^{n-2} - \dots$$

jeho derivací

$$nax^{n-1} - (n-1)f_1x^{n-2} + (n-2)f_2x^{n-3} - \dots$$

Vyhneme-li se při divisi známým způsobem zlomkům, objeví se zbytek

$$[2nf_2 - (n-1)f_1^2]x^{n-2} + \dots$$

Má-li daná rovnice naskrze realné a *různé* kořeny, pak musí býti koeficient nejvyšší mocnosti tohoto zbytku záporně vzatého kladný (Viz *Serret*, Cours d'Algèbre supérieure, 4<sup>o</sup> éd., t. I, art. 130), t. j.

$$(n-1)f_1^2 - 2nf_2 = C^2,$$

kdež C značí realnou, kladnou hodnotu. Dělíme-li

$$x^n - f_1x^{n-1} + f_2x^{n-2} - \dots$$

rozdílem  $x - \lambda$ , kdež  $\lambda$  značí některý z kořenů dané rovnice, vyjde divise a podíl bude

$$x^{n-1} + (\lambda - f_1)x^{n-2} + (\lambda^2 - f_1\lambda + f_2)x^{n-3} + \dots$$

Tento polynom má patrně tytéž kořeny jako původní, vyjma  $\lambda$ , tedy opět různé, realné kořeny. Platí tedy dle relace odvozené ze Sturmovy věty obdobně pro novou rovnici stupně  $n - 1$ :

$$(n-2)(\lambda - f_1)^2 - 2(n-1)(\lambda^2 - f_1\lambda + f_2) > 0.$$

Další postup v pěkné poznámce zvěčnělého auktora jest pak patrný, přičiníme-li jen ještě poznámku, že se lze zbavit obmezení na rovnice o různých kořenech známým postupem limitování.

Dosah jeho práce si dovolím charakterisovati tím podotknutím, že při  $n = 2$  udaná horní a dolní mez přesně splývá s větším resp. menším kořenem. Označení dolní meze symbolem — B se mi zdá býti nahodilé, jelikož tato mez nemusí býti zápornou.

V Praze, 30. června 1885.

*Ed. Weyr.*