# Poznámka k rovnicím, jež mají pouze realné kořeny.

Napsal

dr. Ludvík Kraus.

Je-li

$$x^n - f_1 x^{n-1} + f_2 x^{n-2} - \ldots = 0$$

taková rovnice, platí, že hořejší mez kořenů je

$$\frac{f_1}{n} + \frac{n-1}{n}\sqrt{f_1^2 - \frac{2nf_2}{n-1}} = \mathrm{A}$$

a dolejší mez

$$\frac{f_1}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{f_1^2 - \frac{2nf_2}{n-1}} = -\,\mathrm{B}.$$

*Důkaz.* Ze Sturmovy věty plyne

$$(n-1)f_1^2 - 2nf_2 = \mathrm{C}^2 \text{ (C realné, posit.).}$$

Je-li $\lambda$ jeden z kořenů, bude i

$$(n-2)(\lambda - f_1)^2 - 2(n-1)(\lambda^2 - f_1\lambda + f_2) > 0$$

anebo

$$-n\lambda^2 + 2\lambda f_1 + f_1^2(n-2) - 2(n-1)f_2 > 0,$$

$$-n^2\lambda^2 + 2\lambda n f_1 + f_1^2(n^2 - 2n + 1) - f_1^2 - 2n(n-1)f_2 > 0,$$

$$-(n\lambda - f_1)^2 + (n-1)\mathrm{C}^2 > 0,$$

tedy

$$|n\lambda - f_1| < \sqrt{n-1}\,.\,\mathrm{C}. \qquad \text{Q. E. D.}$$

---

## Dodatek.

Pro snadnější porozumění této poznámce, která se nalézá v pozůstalosti zvěčnělého dra L. Krause, podotýká náš proslulý Ed. Weyr toto:

Dle návodu v Sturmově větě obsaženého dělme daný polynom

$$x^n - f_1 x^{n-1} + f_1 x^{n-2} - \ldots$$

jeho derivací

$$nx^{n-1}-(n-1)f_1\,x^{n-2}+(n-2)f_2\,x^{n-3}-\ldots$$

Vyhneme-li se při divisi známým způsobem zlomkům, objeví se zbytek

$$[2nf_2-(n-1)f_1^2]\,x^{n-2}+\ldots$$

Má-li daná rovnice naskrze realné a *různé* kořeny, pak musí býti koefficient nejvyšší mocnosti tohoto zbytku záporně vzatého kladný (Viz *Serret*, Cours d' Algèbre supérieure, 4⁰ éd., t. I, art. 130), t. j.

$$(n-1)f_1^2-2nf_2=C^2,$$

kdež C značí realnou, kladnou hodnotu. Dělíme-li

$$x^n-f_1\,x^{n-1}+f_2x^{n-2}-\ldots$$

rozdílem $x-\lambda$, kdež $\lambda$ značí některý z kořenů dané rovnice, vyjde divise a podíl bude

$$x^{n-1}+(\lambda-f_1)\,x^{n-2}+(\lambda^2-f_1\lambda+f_2)\,x^{n-3}+\ldots$$

Tento polynom má patrně tytéž kořeny jako původní, vyjma $\lambda$, tedy opět různé, realné kořeny. Platí tedy dle relace odvozené ze Sturmovy věty obdobně pro novou rovnici stupně $n-1^{ho}$:

$$(n-2)(\lambda-f_1)^2-2(n-1)(\lambda^2-f_1\lambda+f_2)>0.$$

Další postup v pěkné poznámce zvěčnělého auktora jest pak patrný, přičiníme-li jen ještě poznámku, že se lze zbaviti obmezení na rovnice o různých kořenech známým postupem limitování.

Dosah jeho práce si dovolím karakterisovati tím podotknutím, že při $n=2$ udaná horní a dolní mez přesně splývá s větším resp. menším kořenem. Označení dolní meze symbolem $-B$ se mi zdá býti nahodilé, jelikož tato mez nemusí býti zápornou.

V Praze, 30. června 1885.

*Ed. Weyr.*