Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Kadeřávek

Stanovení úvratů elliptické aequidistanty

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 1, 33--35

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122220

Stanovení úvratů elliptické aequidistanty.

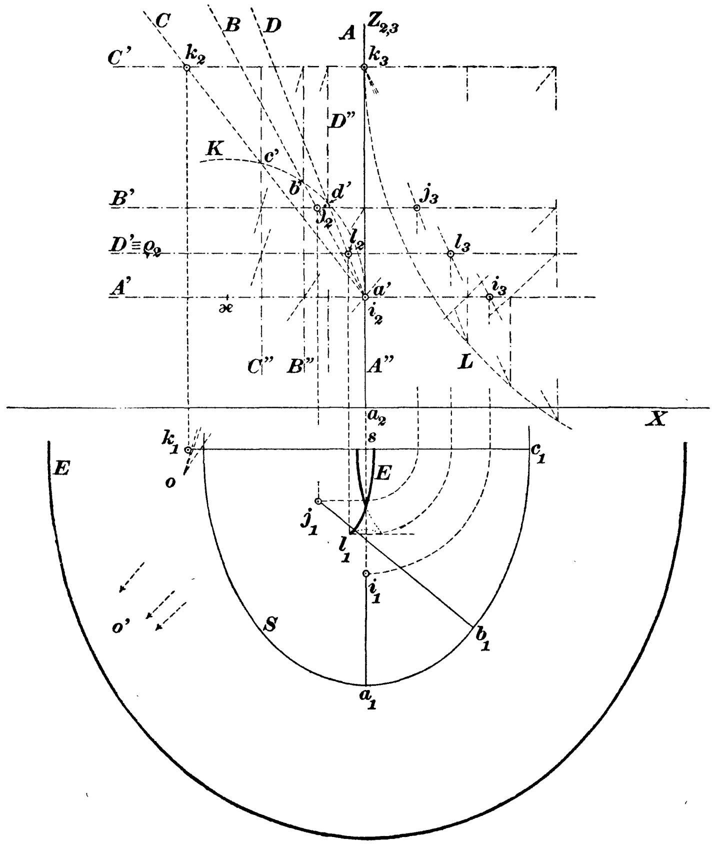
Dr. **Frant. Kadeřávek.**

Stanovení úvratů aequidistanty E k dané ellipse S ve vzdálenosti δ vedené lze snadno provésti následním řešením prostorovým:

Buď daná ellipsa S o středu s a vrcholech a_1, c_1 stopou plochy **P** stejného spádu, jejž k vůli jednoduchosti volme: $tg\,\alpha = 1$. Rovina ϱ, rovnoběžná s rovinou π křivky S ve vzdálenosti δ, protíná uvažovanou plochu v křivce, jejíž průmět do roviny π jest žádaná aequidistanta E a její body úvratu $l_1 \ldots$ jsou průměty průsečíků $l \ldots$ roviny ϱ s křivkou vratu V plochy **P**.

Zvolme si rovinu π za půdorysnu, nárysnu ν veďme rovnoběžně s osou $\overline{sc_1}$ a druhou osou $\overline{sa_1}$ proložme stranorysnu. Půdorys V_1 křivky V jest evolutou ellipsy S, nárys V_2 jest křivka třetího stupně, orthog. souměrná dle osy $Z_{2,3}$. Abychom sestrojili tři její body, vyhledejme středy křivostí i_1, k_1, j_1 křivky S ve vrcholech a_1, c_1 a v obecném bodě b_1; veďme body i_1, j_1, k_1 kolmice k ose X a nanesme na ně od osy X vzhůru délky $\overline{a_1 i_1}$, $\overline{b_1 j_1}$, $\overline{c_1 k_1}$ do bodů i_2, j_2, k_2. Jak patrno, jest bod i_2 bodem úvratu křivky V_2. Promítněme z něho paprsky BC body $j_2\, k_2$ a paprsky ${}^1B\ {}^1C$ body ${}^1j_2\ {}^1k_2$ k bodům $j_2\, k_2$ dle přímky $A \equiv Z_{2,3}$ souměrné (v obrazci však nezarýsované). Paprsky B^1B, C^1C, $A \equiv {}^1A \ldots$ tvoří quadratickou involuci o samodružných paprscích A a $A' \perp A$ a touto involucí a k ní přiřaděnou osnovou paprsků $B' \equiv \overline{j_2{}^1j_2}$, $C' \equiv \overline{k_2{}^1k_2}$, $A' \ldots$ lze křivku V_2 co výtvor dvojjednoznačných svazků vytvořiti. Proložme nyní bodem i_2 kružnici k o středu $\varkappa$, jejž zvolme na A'. Uvažovaná involuce paprsková vytíná na této kružnici K involuci bodovou $a^1 \equiv {}^1a'$; b', ${}^1b'$; c', ${}^1c'$, ... a spojnice homologických bodů $A'' \equiv \overline{a'{}^1a'}$, $B'' \equiv \overline{b'{}^1b'}$, $C'' \equiv \overline{c'{}^1c'} \ldots$ tvoří osnovu promětnou s osnovou A', B', $C' \ldots$ Stanovme si direkční střed o těchto osnov promětných ($o \equiv P\,.\,Q$, kdež P je spojnice průsečíků $A'\,.\,B''$ a $A''B'$ a Q spojnice průsečíků $B'C''$ a $B''C'$) a pomocí něho paprsek D'' sdružený k paprsku $D' \equiv \varrho_2$, nárysu to roviny sečné ϱ.

Paprsek D'' protíná kružnici K v bodě d', jímž vedená přímka D svazku o středu i_2 dvojznačného protíná sdružený paprsek D' v bodě l_2 křivky V_2, hledaném to nárysu průsečíku l roviny ϱ s křivkou vratu V.



Uvažme nyní, že i stranorys V_3 křivky V jest křivka třetího stupně, pro niž tentokráte k_3 jest bod úvratu. Sdružme k vůli výhodnosti nárysnu se stranorysnou a vyhledejme týmž postupem, jímž jsme vyhledali průsečík l_2 křivky V_2 s přímkou $\varrho_2 \equiv D'$ i průsek l_3 křivky V_3 s přímkou $\varrho_2 \equiv D'$. Bod l_3 jest stranorys hledaného průsečíku l křivky V s rovinou ϱ a z něho a nárysu l_2 snadno najdeme l_1 co úvrat uvažované aequidistanty E.

Body $l_1 \ldots$ lze touto cestou sestrojiti, i když jsou podvojně sdružené a imaginárné.

Poznámka k theorii rovnic differenciálních lineárních.

Napsal Dr. **Frant. Rádl.**

1. V následujícím řešena známá úloha integrovati rovnici differenciální lineární s druhým členem, je-li znám úplný integrál téže rovnice bez druhého členu, methodou jinou, než je Lagrangeova variace konstant nebo způsob Cauchyův.

Užijeme-li vzhledem k jisté funkci $y = f(x)$ za sebou dvou operací $y' + ay$, $y' + by$, obdržíme, položíce výsledek rovný nulle, $y'' + (a + b)\, y' + (a' + ab)\, y = 0$, tedy differenciální rovnici lineární 2ho řádu; a, b, pokládáme za jisté funkce x.

Užijme posloupně n operací $y' + a_k y$ [y^k značí k-tou derivaci, $k = 1, 2, \ldots, n$] a položme výsledek rovný nulle; vznikne differenciální rovnice lineární n-ho řádu

$$y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \ldots + p_n y = 0, \tag{1}$$

jejíž koefficienty $p_1, \ldots, p_n$ jsou funkce součinitelů $a_1, \ldots, a_n$ a jejich derivací.

Dle existenčního theorému o integrabilitě differenciálních systémů lze obráceně danou rovnici (1) složiti z operací $y' + a_k y$; stačí, aby koofficienty p_k hověly jistým velice širokým podmínkám.

Jak jsme tedy užili posloupně n úkonů čili n-krát differencovali dle schematu $y' + a_k y$, tak obráceně vylučujeme postupně úkon $y' + a_k y$, $k = n, n - 1, \ldots, 1$ čili n-krát integrujme; tím přijdeme na původní funkci y čili na úplný integrál rovnice (1).

Postup bude týž, má-li rovnice (1) též druhý člen, zní-li tedy

$$y^n + p_1 y^{n-1} + \ldots + p_n y = F(x). \tag{2}$$