Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Zahradník

O jisté biracionální kubické transformaci a jejím upotřebení v theorii křivek. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 34 (1905), No. 4, 329--341

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122193`

O jisté biracionální kubické transformaci a jejím upotřebení v theorii křivek.

Napsal

Dr. K. Zahradník.

(Pokračování.)

16. V předcházejícím článku[1]) podali jsme transformaci přímky (M) pomocí transformace (3), v následujícím zabývati se budeme opáčnou transformací (1), i vyšetříme zobrazení přímky

$$(M_1) \equiv ax_1 + by_1 + c = 0 \tag{38}$$

pomocí transformace (1). Rovnice křivky (M) transformací (1) přímky (M_1) vzniklé je

$$(M) \equiv (ay + bx)\, xy + c\,(x^2 + y^2) = 0. \tag{39}$$

Křivka (M) je tudíž racionální křivka třetího stupně s dvojným bodem v počátku souřadnic, mající veškeré asymptoty reálné.

Souřadnice přímky Π jsou

$$u = -\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad v = -\frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2},$$

tudíž je

$$x_1 = -\frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y_1 = -\frac{v}{u^2 + v^2}.$$

Opíše-li bod M_1 přímku (M_1), obaluje přímka Π křivku druhé třídy

[1]) Viz pag. 105. Toto pokračování uveřejnil jsem ve zprávách vídeňské Akademie věd ze 16. června 1904 pod titulem „*Beitrag zur Theorie der rationalen Kurven dritter Ordnung*“.

$$(\Pi) \equiv c\,(u^2 + v^2) - (au + bv) = 0,$$

tudíž parabolu, jelikož je přímka úběžná $(0 \mid 0)$ její tečnou.

Rovnice té paraboly (obr. 1.) v souřadnicích bodových je

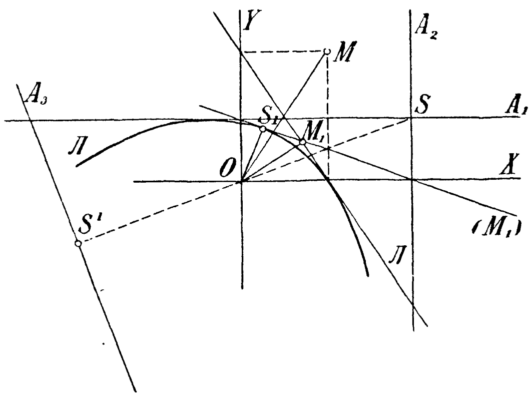
$$(bx - ay)^2 - 4c\,(ax + by + c) = 0.$$

Daná přímka (M_1) je vrcholovou tečnou paraboly a

$$bx - ay = 0$$

její osou. Souřadnice vrcholu S_1 jsou

$$\xi_1 = -\frac{ac}{a^2 + b^2}, \quad \eta_1 = -\frac{bc}{a^2 + b^2},$$



Obr. 1.

aneb označíme-li souřadnice přímky (M_1) písmeny u_1, v_1

$$\xi_1 = -\frac{u_1}{u_1^2 + v_1^2}, \quad \eta_1 = -\frac{v_1}{u_1^2 + v_1^2}.$$

Rovnice přímky řídící zní

$$ax + by + 2c = 0.$$

Daná přímka (M_1) je úpatnicí paraboly (Π), bereme-li počátek souřadnic za pol, což jest známo, neb je počátek souřadnic ohnisko paraboly (Π).

Vraťme se ku křivce třetího stupně (M). Je-li $a = 0$, neb $b = 0$, obdržíme

$$bx^2y + c(x^2 + y^2) = 0$$

a

$$axy^2 + c(x^2 + y^2) = 0,$$

kterýmiž křivkami se *G. de Longchamps* [2]) zabýval, a které uvádí jako křivky smíšené třetího stupně.

17. Uvedeme-li rovnicí

$$y = tx$$

racionální parametr t, můžeme rovnici místa (M) psáti

$$x = -\frac{(1 + t^2)c}{(at + b)t}, \quad y = -\frac{(1 + t^2)c}{at + b}.$$

Rovnice tečny v bodě t bude

$$T \equiv (at^2 - 2bt^3 - at^4)x + (-b - 2at + bt^2)y - (1 + t^2)c = 0.$$

Parametry bodů úběžných křivky jsou

$$t = 0, \quad t = \infty, \quad t = -\frac{b}{a},$$

tudíž jsou rovnice příslušných asymptot (obr. 1.).

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv by + c = 0, \\ A_2 &\equiv ax + c = 0, \\ A_3 &\equiv ab^2x + a^2ba - (a^2 + b^2)c = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Průsek S asymptot A_1, A_2 leží na křivce (M); jemu jsou daná přímka (M_1), jakož i vrchol S_1 paraboly (Π) dle zákonu vyjádřeném rovnicemi (1) sdruženy, neb jsou-li $\xi \mid \eta$ souřadnice bodu S, jsou

$$\xi_1 = \frac{\xi\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \eta_1 = \frac{\xi^2\eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

souřadnice bodu S_1, a

[2]) *Loria-Schütte:* Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven, Theorie und Geschichte. Teubner, Leipzig 1902, pag. 91.

$$u_1 = -\frac{1}{\xi}, \quad v_1 = -\frac{1}{\eta}$$

souřadnice přímky (M_1). Souřadnice asymptoty A_3 jsou

$$u = -\frac{ab^2}{(a^2+b^2)c}, \quad v = -\frac{a^2b}{(a^2+b^2)c},$$

tudíž je

$$u = -\frac{u_1 v_1^2}{u_1^2+v_1^2}, \quad v = -\frac{u_1^2 v_1}{u_1^2+v_1^2},$$

kdež značí $u_1 \mid v_1$ souřadnice přímky (M_1). Asymptota A_3 je tudíž souměrná vzhledem k počátku souřadnic s přímkou, ku které je daná přímka (M_1) jako Π_1 sdružená; probíhá tudíž bodem $S'\left(\frac{c}{a} \middle| \frac{c}{b}\right)$ souměrným k bodu S vzhledem k počátku souřadnic O, a stojí v něm na přímce $\overline{OS'}$ kolmo.

Trojúhelník asymptot.

18. Plocha trojúhelníku asymptot racionálné křivky třetího stupně (M) je

$$\triangle = \frac{2(a^2+b^2)^2 c^2}{a^3b^3},$$

tudíž je též

$$\triangle = 2\frac{(\xi^2+\eta^2)^2}{\xi\eta} = 2\frac{(u_1^2+v_1^2)^2}{u_1^3v_1^3}.$$

Klademe-li

$$\frac{\triangle}{2} = m^2,$$

obdržíme

$$\begin{aligned} (\xi^2+\eta^2)^2 - m^2\xi\eta &= 0, \\ m^2u_1^3v_1^3 - (u_1^2+v_1^2)^2 &= 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Je-li $\triangle =$ veličina stálá, je i m veličinou stálou, a z rovnice (41) plyne, že *„veškeré přímky (M_1), jež se transformací (1) zobrazují racionálními křivkami třetího stupně a jež majíce troj-*

úhelník asymptot o stálé plošc, obalují racionálnou křivku šesté třídy, a místo bodů S, jimiž tyto přímky jsou sdruženy, je lemniskata s dvojným bodem v počátku souřadnic".

19. Úpatnice obálky jest křivka (S_1), sdružená lemniskatě (S), totiž

$$(\xi_1^2 + \eta_1^2)^4 - m^2 \xi_1^3 \eta_1^2 = 0,$$

kteráž je též místem vrcholů parabol, jež jednotlivým přímkám (M_1) jsou sdruženy.

Rovnice křivek (S) a (S_1) v souřadnicích polárních jsou

$$r^2 = m^2 \sin\varphi \cos\varphi \qquad (S)$$
$$r^2 = m^2 \sin^3\varphi \cos^3\varphi. \qquad (S_1)$$

Křivka (S_1) leží jako lemniskata v prvním a ve třetím kvadrantu, a je ji co do tvaru podobná a plošný obsah její obnáší šestý díl obsahu plošného křivky (S).

Sestrojíme-li křivku (S_2) tak, by při témž polárním úhlu bylo

$$\overline{OS}_2^2 = \overline{OS} \,.\, \overline{OS}_1,$$

bude rovnice její

$$r^2 = m^2 \cos^2\varphi \sin^2\varphi, \qquad (S_2)$$

aneb v souřadnicích rovnoběžných

$$(\xi_2^2 + \eta_2^2)^3 = m^2 \xi_2^2 \eta_2^2.$$

Takto sestrojená křivka (S_2) jest *čtyřlistá Rhodonea* [3])

Buďtež zde vzpomenuty ještě křivky inversní pro počátek souřadnic jako střed inverse. Je-li k poloměr kruhu inverse, obdržíme, stanovíme-li

$$\frac{k^2}{m} = n,$$

pro inversní křivku od (S) rovnici

$$xy = n^2;$$

inversní křivka od (S_2) je tak zvaná „*Kreuzkurve*"

---

[3]) *Loria-Schütte* l. c., pag. 231, 304.

$$x^2y^2 = n^2(x^2 + y^2)$$

a inversní křivka od (S_1) je

$$x^3y^3 = n^2(x^2 + y^2)^2.$$

Kruh opsaný trojúhelníku asymptot.

20. Budiž C střed kruhu opsaného trojúhelníku asymptot. Jelikož je trojúhelník asymptot ve S pravoúhlý, je C střed délky asymptoty A_3 ležící mezi osami souřadnicovými.

Označíme-li $x' \mid y'$ jeho souřadnice, je

$$x' = \frac{ac}{b^2} = -\frac{\eta^2}{\xi},$$

$$y' = \frac{bc}{a^2} = -\frac{\xi^2}{\eta},$$

kdež jsou $\xi \mid \eta$ jako dříve souřadnice bodu S, a rovnice kruhu opsaného trojúhelníku asymptot je

$$x^2 + y^2 - \frac{2ac}{b^2}x - \frac{2bc}{a^2}y - \frac{3c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2} = 0$$

aneb

$$x^2 + y^2 + \frac{2\eta^2}{\xi}x + \frac{2\xi^2}{\eta}y - 3(\xi^2 + \eta^2) = 0.$$

Poloměr toho kruhu je

$$\overline{CS}^2 = \frac{c^2(a^2+b^2)^3}{a^4b^4} = \frac{(\xi^2+\eta^2)^3}{\xi^2\eta^2} = \frac{(u_1^2+v_1^2)^3}{u_1^4v_1^4},$$

z čehož vysvítá: „Všechny přímky (M_1), jichž obrazy dle (1) jsou racionálné křivky třetího stupně, jejichž asymptoty tvoří trojúhelníky té vlastnosti, že poloměry kruhů jim opsaných mají stálou délku, obalují křivku osmé třídy

$$u_1^4v_1^4 - r^2(u_1^2 + v_1^2)^3 = 0,$$

a místo bodů S, jimž tyto přímky (M_1) jsou sdružené, je opět čtyřlistá rhodonea

$$(\xi^2 + \eta^2)^3 - r^2\xi^2\eta^2 = 0.“$$

Těžiště trojúhelníku asymptot.

21. Za souřadnice $\xi' \mid \eta'$ těžiště T trojúhelníku asymptot obdržíme

$$\xi' = \frac{2a^2 - b^2}{3ab^2} c,$$
$$\eta' = \frac{2b^2 - a^2}{3a^2 b},$$

kteréžto rovnice můžeme psáti

$$\xi' = \frac{3u_1^2 - v_1^2}{3u_1 v_1^2} = \frac{\xi^2 - 2\eta^2}{3\xi},$$
$$\eta' = \frac{2v_1^2 - u_1^2}{3u_1^2 v_1} = \frac{\eta^2 - 2\xi^2}{3\eta}.$$

Bod S a přímka (M_1) jsou tudíž s bodem T v racionálné kubické příbuznosti, avšak to není jedno-jednoznačná, t. j. není biracionální příbuznost.

Přímka (M_1) otáčí se kolem svého bodu.

22. Přímkou (M_1) dány jsou: vrchol S_1 paraboly (Π), průsek S oněch asymptot křivky třetího stupně (M), sdružené ku přímce (M_1), jež jsou rovnoběžné s osami souřadnic, třetí asymptota A_3, dále těžiště T trojúhelníku asymptot a střed C kruhu tomu trojúhelníku opsaného.

Otáčí-li se přímka (M_1) okolo svého bodu $P(\alpha \mid \beta)$, je

$$c = -(a\alpha + b\beta).$$

Klademe-li nyní proměnlivou směrnici přímky (M_1)

$$-\frac{a}{b} = t,$$

opíše bod S_1 při otáčce přímky (M_1) kolem bodu P kruh, jehož rovnice

$$\xi_1 = -\frac{t(\beta - \alpha t)}{1 + t^2},$$
$$\eta_1 = \frac{\beta - \alpha t}{1 + t^2},$$

aneb

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 - \alpha\xi_1 - \beta\eta_1 = 0.$$

Týž má za průměr $\overline{OP}$ a střed této délky za svůj střed, což je i geometricky patrno, neb vidíme délku $\overline{OP}$ z bodů křivky (S_1) pod pravým úhlem.

23. Při tomto otočení přímky (M_1) kolem jejího bodu $(\alpha \mid \beta)$ opíše bod S hyperbolu

$$\xi = -\frac{\beta - \alpha t}{t},$$
$$\eta = \beta - \alpha t,$$

kteráž má asymptoty rovnoběžné s osami souřadnic a střed svůj v bodě otáčky $P(\alpha \mid \beta)$.

24. Místo bodu C je při této otáčce přímky (M_1)

$$x' = \frac{ac}{b^2} = t(\beta - \alpha t),$$
$$\eta' = \frac{bc}{a^2} = -\frac{\beta - \alpha t}{t^2},$$

tudíž racionální křivka čtvrtého stupně a čtvrté třídy

$$(xy - \alpha\beta)^2 - (\alpha x - \beta^2)(\beta y - \alpha^2) = 0,$$

kteráž má isolovaný dvojný bod $\left(\frac{\beta^2}{\alpha} \middle| \frac{\alpha^2}{\beta}\right)$ a úběžné body os souřadnic za body úvratu. Osy souřadnic jsou tudíž tečny vratu a asymptoty křivky, kteráž probíhá jejich průsekem, totiž počátkem souřadnic.

25. Je-li t směrnicí přímky (M_1) jdoucí bodem $(\alpha \mid \beta)$, je rovnice asymptoty A_3 příslušné křivky třetího stupně (M)

$$A_3 \equiv -tx + t^2 y + (1 + t^2)(\beta - \alpha t) = 0.$$

Otáčí-li se nyní přímka (M_1) kolem bodu $(\alpha \mid \beta)$, obalují asymptoty A_3 racionální křivku třetí třídy a čtvrtého stupně (A_3).

Rovnice její

$$x = -\alpha + \frac{\alpha t^3 + 2\beta}{t},$$
$$y = -\beta + \frac{2\alpha t^3 + \beta}{t^2},$$

aneb

$$F \equiv (xy - 9\alpha\beta)^2 - 4(x^2 - 3\beta y)(y^2 - 3\alpha x) = 0.$$

Obálka asymptot má tudíž tři body vratu, z nichž je jeden reálný a oba ostatní imaginárné. Jsouť to průseky parabol

$$P_1 \equiv x^2 - 3\beta y = 0,$$
$$P_2 \equiv y^2 - 3\alpha x = 0,$$

vyjímaje jich průsek v počátku souřadnic, jenž tvoří těžiště z trojúhelníku bodů vratu.

Těmito body vratu probíhá též hyperbola

$$H \equiv xy - 9\alpha\beta = 0.$$

Je-li ε imaginární třetí kořen z 1, jsou souřadnice bodů vratu

$$x_0 = 3\sqrt[3]{\alpha^2\beta}, \quad y_0 = 3\sqrt[3]{\alpha\beta^2},$$
$$x_1 = \varepsilon x_0, \quad y_1 = \varepsilon^2 y_0,$$
$$x_2 = \varepsilon^2 x_0, \quad y_2 = \varepsilon y_0,$$

a co takové vyhovují rovnici

$$F_{12}^2 - F_{11} F_{22} = 0.$$

Jelikož rovnici obálky (A_3) též psáti můžeme

$$H^2 - 4P_1P_2 = 0,$$

shledáváme, že lze obálku tu též vytvořiti pomocí dvou svazků kuželoseček

$$H + 2\lambda P_1 = 0,$$
$$2P_2 + \lambda H = 0.$$

26. Označíme-li S'' bod, jemuž je asymptota A_3 jako přímka Π sdružená, jsou jeho souřadnice

$$\xi'' = \frac{a^2 + b^2}{ab^2}\, c,$$
$$\eta'' = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b}\, c.$$

Otáčí-li se přímka (M_1) kolem svého bodu $(\alpha \mid \beta)$, mění asymptota A_3 svoji polohu, tím i bod S'', jenž při tom opisuje racionální křivku čtvrtého stupně s trojným bodem v počátku souřadnic; jest totiž

$$\xi'' = \frac{(\beta - \alpha t)(1 + t^2)}{t},$$
$$\eta'' = -\frac{(\beta - \alpha t)(1 + t^2)}{t^2},$$

aneb

$$\xi''^2 \eta''^2 + (\xi''^2 + \eta''^2)(\alpha \xi'' + \beta \eta'') = 0.$$

Konstrukce racionálné křivky (M) jako cissoidaly.

27. Dána budiž kuželosečka

$$C_2 \equiv a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2 + dx + ey = 0$$

a přímka

$$P \equiv mx + ny + p = 0.$$

Počátkem souřadnic jdoucí přímka protíná kuželosečku C_2 v bodě E a přímku P v bodě Q. Naneseme-li[4]) od bodu Q tetivu $EO = QM$ na paprsku ve směru ku O, obdržíme (obr. 2.) za místo (M) bodu M křivku C_3

$$C_3 \equiv (a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2)(mx + ny + p)$$
$$- (mx + ny)(dx + ey) = 0.$$

Je-li nyní

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = 0,$$

je

$$C_3 \equiv xy(mx + ny) - mdx^2 - (me + nd - p)\, xy - ney^2 = 0.$$

---

[4]) Časopis jedn. čes. mathematiků, Praha, II. ročník, pag. 183.

Stanovíme-li dále

$$m = b, \quad n = a, \quad md = -c, \quad ne = -c, \quad me + nd - p = 0,$$

tedy

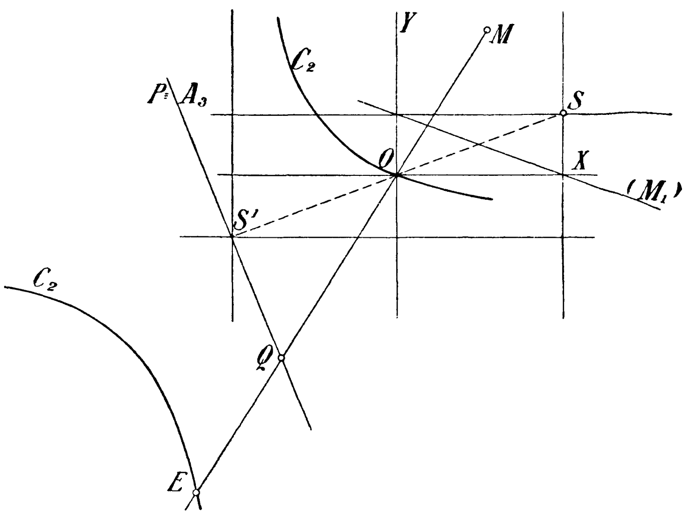
$$d = -\frac{c}{b}, \quad e = -\frac{c}{a}, \quad p = -\frac{a^2 + b^2}{ab} c,$$

bude

$$C_3 \equiv xy\,(bx + ay) + c\,(x^2 + y^2) = 0,$$

tedy

$$C_3 \equiv (M).$$



Obr. 2.

Můžeme tudíž naší transformací (1) přímky (M_1) vytvořenou křivku (M) též vytvořiti jako cissoidalu, pro níž je

$$C_2 \equiv xy - \frac{c}{b}\,x - \frac{c}{a}\,y = 0,$$

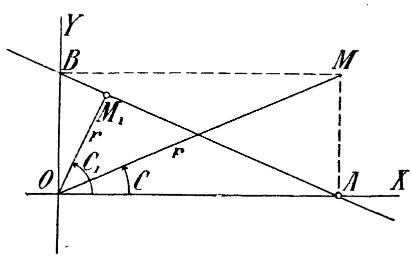
$$P \equiv bx + ay - \frac{a^2 + b^2}{ab}\,c = 0.$$

Přímka P je asymptota A_3 křivky (M) a probíhá středem $\left(\frac{c}{a} \,\middle|\, \frac{c}{b}\right)$ kuželosečky C_2, jenž jest souměrný s bodem S vzhledem k počátku souřadnic. Asymptoty kuželosečky C_2 jsou rovnoběžné s ostatními dvěma asymptotami A_1, A_2 křivky (M). Jelikož P a C_2 snadně sestrojiti můžeme, platí totéž i pro křivku (M).

Uvedená transformace v souřadnicích polárních.

28. Vyšetření zmíněné biracionální kubické příbuznosti v polárních souřadnicích jest velmi jednoduché. Jsou-li $r \mid \varphi$ potažmo $r_1 \mid \varphi_1$ souřadnice bodu M potažmo M_1, je (obr. 3.)

$$OA = OM \cos \varphi$$
$$OM_1 = OA \cos \varphi_1,$$



Obr. 3.

tudíž je

$$OM_1 = OM \cos \varphi \cos \varphi_1.$$

Jest pak (čl. 3.)

$$\varphi + \varphi_1 = \frac{\pi}{2},$$

tudíž je

$$\cos \varphi \cos \varphi_1 = \sin \varphi \cos \varphi = \sin \varphi_1 \cos \varphi_1$$

a

$$r_1 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_1.$$

Je-li nyní

$$r = f(\varphi)$$

rovnice křivky (M), je

$$r_1 = f\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) \sin\varphi_1 \cos\varphi_1$$

rovnice transformované křivky (M_1), aneb upotřebíme-li obrácené transformace, a vyjdeme-li od křivky (M_1), jejíž rovnice je

$$r_1 = F(\varphi_1),$$

obdržíme rovnici křivky transformované (M)

$$r = \frac{F\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{\sin\varphi \cos\varphi}.$$

Že můžeme transformaci v obou směrech opakovat, je patrno. Zmíníme se zde ještě o transformaci přímky a kruhu. Je-li

$$r_1 = -\frac{c}{a\cos\varphi_1 + b\cos\varphi_1}$$

rovnice přímky (M_1), je rovnice transformované křivky (M)

$$r = -\frac{c}{(a\sin\varphi_1 + b\cos\varphi)\sin\varphi\cos\varphi},$$

což jest rovnice (39) v souřadnicích polárních. Uvažujeme-li přímku jako místo (M), je její transformovaná křivka strophoida[5])

$$r_1 = -\frac{c\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{a\sin\varphi_1 + b\cos\varphi_1}.$$

Dán budiž ještě kruh s polarou ve středu jeho. Jeho transformovaná křivka, je-li (M) kruhem, je

$$(M_1)\ \ldots\ r_1 = a\sin\varphi_1\cos\varphi_1\,,$$

tedy čtyřlistá rhodonea, Vezmeme-li kruh za křivku (M_1), je

$$(M)\ \ldots\ r = \frac{a}{\sin\varphi\cos\varphi},$$

tedy tak zvaná „Kreuzkurve.“

Obecné vyšetření této transformace a upotřebení na transformaci kuželosečky ponecháme si pro příště.

---

[5]) Viz tohoto časop. pag. 118, čl. 9.