Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 34 (1905), No. 4, 401--455

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122192

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1905

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

$$\frac{1}{A} W_1 J_1^2,$$

kdež A jest mechanický aequivalent tepla, v případě druhém

$$\frac{1}{A} W_2 J_2^2,$$

takže rozdíl obou udává množství tepla, jež teplotu ozářené větve zvýší o týž počet stupňů, jako dopadající radiace, jest tedy jí roven.

Touto methodou našel *Kurlbaum* pro rozdíl emissní mohutnosti tělesa černého při temperatuře 100^0 a 0^0 hodnotu

$$E_{100} - E_0 = 0{\cdot}01763 \frac{cal}{sec\, cm^2},$$

takže každý cm^2 tělesa absolutně černého temperatury $100^0\, C$ vyzařuje proti černému tělesu temperatury $0^0\, C$ za 1 sekundu 0·01763 kalorií. V mechanické míře máme

$$E_{100} - E_0 = 7{\cdot}31 \,.\, 10^5 \frac{erg}{sec\, cm^2} = 0{\cdot}0731 \frac{Watt}{cm^2}.$$

Konstanta zákonu Stefanova jest dle toho

$$\sigma = \frac{E_{100} - E_0}{373^2 - 273^2} = 11{\cdot}31 \frac{erg}{cm^2\,(\text{stup. Cel.})^2}.$$

Úlohy.

Řešení úloh.

Úloha 1.

Řešte soustavu rovnic

$$(x + y)(z + v) = \lambda,$$
$$(x + z)(y + v) = \mu,$$
$$(x + v)(y + z) = \nu,$$
$$xyzv = \sigma^2;$$

obecně i zvlášť pro hodnoty $\lambda = 162$, $\mu = 152$, $\nu = 140$, $\sigma = 30$.

Dr. *Marian Haas.*

Řešení. (Zaslal p. *R. Kučera*, stud. reálky v Hoře Kutné.)
Roznásobením a náležitým seskupením dostaneme z prvých tří rovnic

$$(xz + yv) + (yz + xv) = \lambda,$$
$$(xy + zv) + (yz + xv) = \mu,$$
$$(xy + zv) + (xz + yv) = \nu.$$

Řešíme-li tyto tři rovnice podle čísel nacházejících se v jednotlivých závorkách, obdržíme

$$xy + zv = \frac{1}{2}(-\lambda + \mu + \nu) = \lambda',$$

$$xz + yv = \frac{1}{2}(\lambda - \mu + \nu) = \mu',$$

$$xv + yz = \frac{1}{2}(\lambda + \mu - \nu) = \nu'.$$

Od první z těchto rovnic povýšené na čtverec odečtemež poslední z rovnic daných násobenou 4; zjednáme si tímto způsobem

$$xy - zv = \sqrt{\lambda'^2 - 4\sigma^2}.$$

Položme pro stručnost

$$\lambda'^2 - 4\sigma^2 = l, \qquad \mu'^2 - 4\sigma^2 = m, \qquad \nu'^2 - 4\sigma^2 = n.$$

Dostaneme pak ihned

$$2xy = \lambda' + \sqrt{l}, \qquad 2zv = \lambda' - \sqrt{l}$$

a zcela podobně

$$2xz = \mu' + \sqrt{m}, \qquad 2yv = \mu' - \sqrt{m},$$
$$2xv = \nu' + \sqrt{n}, \qquad 2yz = \nu' - \sqrt{n}.$$

Z těchto rovnic znásobením vhodně volených dostaneme $8x^3yzv$, poněvadž však $xyzv = \sigma^2$, máme ihned výraz pro x^2 a zcela stejně dostaneme i další výrazy pro y^2, z^2, v^2. Máme tak tyto výsledky

$$8\sigma^2x^2 = (\lambda' + \sqrt{l})(\mu' + \sqrt{m})(\nu' + \sqrt{n}),$$
$$8\sigma^2y^2 = (\lambda' + \sqrt{l})(\mu' - \sqrt{m})(\nu' - \sqrt{n}),$$
$$8\sigma^2z^2 = (\lambda' - \sqrt{l})(\mu' + \sqrt{m})(\nu' - \sqrt{n}),$$
$$8\sigma^2v^2 = (\lambda' - \sqrt{l})(\mu' - \sqrt{m})(\nu' + \sqrt{n}).$$

Odmocniny $\sqrt{l}$, $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ jsou na sobě nezávislé a můžeme přisouditi každé z nich, kteroukoliv z obou hodnot znaménkem se lišících v těchto všech výrazech. Tím dostaneme 8 soustav řešení pro x^2, y^2, z^2, v^2. Odmocněním zjednáme si hodnoty pro x, y, z, v. Avšak tu jenom v *jedné* jest znaménko libovolné, na př. u x; neboť zvolíme-li za tuto neznámou některou hodnotu jí při určitých znaménkách pro $\sqrt{l}$, $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ příslušnou, jsou ostatní neznámé jednoznačně nahoře uvedenými rovnicemi pro součiny xy, xz, ... stanoveny. Jest tedy celkem šestnáct soustav hodnot, jež dosazeny byvše za x, y, z, v, rovnicím daným hoví. Při daných zvláštních hodnotách jsou dvě z těchto soustav dány těmito čísly

$$\begin{array}{llll} \text{I.}\ x = 15, & y = 3, & z = 4, & v = 5; \\ \text{II.}\ x = 6, & y = 7^1/_2, & z = 10, & v = 2. \end{array}$$

Úloha 2.

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} xy + zv &= \lambda, \\ xz + yv &= \mu, \\ xv + yz &= \nu, \\ x + y + z + v &= 2s; \end{aligned}$$

obecně a zvlášť pro hodnoty $\lambda = 111$, $\mu = 84$, $\nu = 76$, $s = 14$.

Dr. *M. Haas.*

Řešení. (Zaslal p. *Živanský Vlad.*, stud. gymn. v Brně.)

Sečtením prvních dvou rovnic dostaneme po jednoduché úpravě $(x + v) . (y + z) = \lambda + \mu$.

Mimo to jest dle poslední rovnice

$$(x + v) + (y + z) = 2s.$$

Řešením těchto dvou rovnic známým způsobem nabýváme

$$\begin{aligned} x + v &= s + \sqrt{s^2 - \lambda - \mu}, \\ y + z &= s - \sqrt{s^2 - \lambda - \mu}. \end{aligned}$$

Zavedeme-li ještě pro stručnost označení

$$s^2 - \lambda - \mu = c, \qquad s^2 - \lambda - \nu = b, \qquad s^2 - \mu - \nu = a,$$

můžeme psáti tyto výsledky, jakož i další, jež stejným způsobem odvodíme, takto

$$x+v=s+\sqrt{c}, \qquad y+z=s-\sqrt{c},$$
$$x+z=s+\sqrt{b}, \qquad y+v=s-\sqrt{b},$$
$$x+y=s+\sqrt{a}, \qquad z+v=s-\sqrt{a}.$$

Z těchto rovnic pak snadno dostáváme

$$x=\frac{1}{2}[s+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}],$$
$$y=\frac{1}{2}[s+\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}],$$
$$z=\frac{1}{2}[s-\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}],$$
$$v=\frac{1}{2}[s-\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}].$$

Za každou z odmocnin $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ můžeme dosaditi v těchto výsledcích kteroukoliv z obou hodnot znaménkem se lišících a máme tak v celku 8 soustav různých pro x, y, z, v, jež dosazeny byvše do daných rovnic, je identicky splňují.

Ve zvláštním případě jsou dvé z těchto soustav

I. $x=12$, $y=8$, $z=5$, $v=3$;
II. $x=2$, $y=6$, $z=9$, $v=11$.

Úloha 3.

Řadu zvanou Fibonacciovu

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5, \ldots\ldots\ldots,$$

jejíž každý člen rovná se součtu dvou bezprostředně předcházejících, lze obdržeti sčítáním stejnolehlých členů dvou řad geometrických. Vyjádřiti na základě tom obecný člen této řady a součet prvých n členů, jakož i dokázati uvedenou vlastnost řady.

Prof. *Ant. Sýkora.*

Řešení. (Zaslal p. *J. Papřok*, stud. gymn. v Místku).

Použijeme ihned vlastnosti, již máme obecně dokázat a jež při prvních členech řady 0, 1, 1, 2, 3, 5, ... jest skutečně splněna, že každý člen řady jest rovný součtu dvou bezprostředně předcházejících, ku výpočtu kvocientů hledaných geometrických řad, čímž jednak se výpočet zjednoduší, jednak budeme zbaveni zvláštního dokazování zmíněné vlastnosti. Buďtež q_1, q_2 kvocienty obou řad, u_n n-tý člen řady Fibonacciovy, pak jest

$$u_n = a_1 q_1^n + a_2 q_2^n,$$

a mimo to
$$u_n + u_{n-1} = u_{n+1},$$

anebo jinak

$$a_1 q_1^n + a_2 q_2^n + a_1 q_1^{n-1} + a_2 q_2^{n-1} = a_1 q_1^{n+1} + a_2 q_2^{n+1},$$
$$a_1 q_1^{n-1}[q_1^2 - q_1 - 1] = a_2 q_2^{n-1}(q_2^2 - q_2 - 1).$$

Této rovnici má býti vyhověno při každém celistvém $n > 0$. Avšak to jest možno jenom tehdy, když buď $q_1 = q_2$, což však v našem případu není, neboť pak by řada daná byla geometrická, anebo[1] $a_1(q_1^2 - q_1 - 1) = 0$, $a_2(q_2^2 - q_2 - 1) = 0$.

Avšak i případ $a_1 = 0$, anebo $a_2 = 0$ jest vyloučiti, jak ihned patrno a jsou tedy q_1, q_2 dva *různé* kořeny rovnice

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Na př.
$$q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad q_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ku určení a_1 a a_2 pak máme rovnice

$$a_1 + a_2 = 0,$$
$$a_1 q_1 + a_2 q_2 = 1;$$
$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Máme tudíž pro n-tý člen řady Fibonacciovy tento výsledek

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}\,.\,2^n}[(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n].$$

Úloha 4.

Jest sestrojiti trojúhelník ABC, dány-li jsou střed P strany AB, vrchol C a průsečík výšek V.

Prof. *J. Schimek.*

Řešení prvé. (Zaslal p. *Bř. Čech,* stud. reálky v Novém Městě na Mor.)

Z daných částí sestrojíme snadno výšku CD a přímku,

[1]) Jestliže jest rovnice $Ax - By = 0$ splněna pro dvě různé soustavy hodnot jednak pro $x = x_1$, $y = y_1$, jednak pro $x = x_2$, $y = y_2$, tu buďto $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$, anebo $A = 0$, $B = 0$.

na které jest strana AB. Kdybychom vedli vrcholy trojúhelníka ABC rovnoběžky s protějšími stranami, obdrželi bychom podobný trojúhelník $A'B'C'$; tohoto trojúhelníka užijeme ku sestrojení trojúh. ABC. Poloha přímky, na které jest $A'B'$, jest známa, (prochází bodem C, $A'B' \parallel BA$); průsečík výšek V v hledaném trojúhelníku jest středem opsaného kruhu v trojúhelníku $A'B'C'$, neboť výšky trojúhelníka ABC jsou, jak snadno nahlédnouti, symmetrálami stran trojúhelníka $A'B'C'$. Těžnice CC' trojúhelníka $A'B'C'$ splývá co do polohy s těžnicí CP a délka její jest $\overline{CC'} = 2 . \overline{CP}$ (úhlopříčka CC' v rovnoběžníku $CAC'B$ prochází rozpolovacím bodem P úhlopříčky AB a jest touto v bodě P půlena). Z této úvahy vyplývá tato konstrukce: Veďme $CN \parallel AB$; spojme C s P, prodlužme a nanesme $\overline{PC'} = \overline{CP}$; z bodu V poloměrem $\overline{VC'}$ opišme kruh. Kde nám tento kruh protne CN jsou body A', B'. Přímky $B'C'$, $A'C'$ protínají přímku, na které jest strana AB v bodech A, B.

Řešení druhé. (Zaslal p. *V. Trkal*, stud. gymn. ve Vys. Mýtě.)

Spojíme-li střed P s vrcholem C, obdržíme těžnici. Těžiště T najdeme, rozdělíme-li úsečku CP bodem T v poměru $\overline{CT}:\overline{TP} = 2:1$. Spojíme-li pak průsečík výšek V s těžištěm T, máme přímku Eulerovu. Střed O kružnice opsané hledanému trojúhelníku jest dán poměrem $\overline{VT}:\overline{TO} = 2:1$. Poloměrem $\overline{OC}$ opíšeme kružnici a bodem P vedeme kolmici k výšce VC, čímž nabýváme průsečíků A, B, této přímky — na které leží jedna strana trojúhelníka — s kružnicí. Jsou to zbývající vrcholy trojúhelníka.

Řešení třetí. (Zaslal p. *R. Kučera*, stud. reálky v Kutné Hoře.)

Nechť a, b, c značí vrcholy žádaného trojúhelníka a a', b', c', paty příslušných výšek; střed strany $\overline{ab}$ budiž s. Bod a' jest na kružnici K, jejímž průměrem jest $\overline{cv}$ a vedle toho také na kružnici G t. zv. kružnici devíti bodů, t. j. kružnici, jež prochází středy všech stran, patami výšek a středy úseček $\overline{cv}$, $\overline{bv}$, $\overline{av}$. Tato kružnice jest v našem případě určena bodem c', s a středem

σ úsečky $\overline{cv}$. Průsečíky kružnic K a G jsou patami a' a b' výšek žádaného trojúhelníka.

Řešení čtvrté. (Zaslal týž.)

Vedeme-li bodem s ke kružnici K tečny, dostaneme hledané body a' a b' jakožto příslušné body tečné. To bude dokázáno, jakmile dokážeme, že $\sphericalangle \sigma b's = R$.

$\sphericalangle sb'b = \sphericalangle sbb'$, neboť b' leží na kružnici zřízené na průměru $\overline{ab}$; $\sphericalangle \sigma b'c = \sphericalangle b'c\sigma = \sphericalangle sbb'$, neboť ramena úhlů $b'c\sigma$, sbb' jsou na sebe kolmá; tedy $\sphericalangle sb'b = \sphericalangle \sigma b'c$ a proto $\sphericalangle \sigma b's = R$.

Úloha 5.

V trojúhelníku různostranném spuštěny jsou výšky AA', BB', CC' a úseky stran BA', $A'C$, CB', $B'A$, AC', $C'B$ označeny a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2. Ustanoviti pomocí úhlů původního trojúhelníka úhly trojúhelníka o stranách $|a_1 - a_2|$, $|b_1 - b_2|$, $|c_1 - c_2|$. (Při tvoření rozdílů jest bráti zřetel na směry jednotlivých délek.)

r.

Řešení. (Zaslal p. *M. Seifert,* stud. reálky v Karlíně.)

Pro krátkost označme strany nového trojúhelníka

$$a' = |a_1 - a_2|, \quad b' = |b_1 - b_2|, \quad c' = |c_1 - c_2|$$

a jeho úhly dle obvyklého způsobu α', β', γ'.

Jsou-li úhly původního trojúhelníka α, β, γ, jest $a_1 = c\cos\beta$, $a_2 = b\cos\gamma$, $b_1 = a\cos\gamma$, $b_2 = c\cos\alpha$, $c_1 = b\cos\alpha$, $c_2 = a\cos\beta$, z čehož $a' = |c\cos\beta - b\cos\gamma|$, $b' = |a\cos\gamma - c\cos\alpha|$, $c' = |b\cos\alpha - a\cos\beta|$.

Dle věty sinusové jest $a = 2r\sin\alpha$, $b = 2r\sin\beta$, $c = 2r\sin\gamma$.

Pak jest po krátké úpravě $a' = 2r|\sin(\gamma - \beta)|$, $b' = 2r|\sin(\alpha - \gamma)|$, $c' = 2r|\sin(\beta - \alpha)|$.

Ježto sinus mění znaménko s argumentem, lze psáti $|\sin(\gamma - \beta)| = \sin|\gamma - \beta|$ a podobně.

Dle věty sinusové obdržíme

$$a' : b' : c' = \sin\alpha' : \sin\beta' : \sin\gamma',$$

avšak dle hořejších vztahů jest

$$a' : b' : c' = \sin|\gamma - \beta| : \sin|\alpha - \gamma| : \sin|\beta - \alpha|$$

a tudíž

$\sin \alpha' : \sin \beta' : \sin \gamma' = \sin |\gamma - \beta| : \sin |\alpha - \gamma| : \sin |\beta - \alpha|$.
Těmito (dvěma) rovnicemi a rovnicí

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = \pi$$

jsou úhly trojúhelníka *jednoznačně* určeny, jak známo. Abychom však nějaké určité udání o úhlech α', β', γ' mohli učiniti, jest třeba učiniti některé předpoklady o vzájemné velikosti úhlů trojúhelníka daného α, β, γ. Zaveďme na p. při daném trojúhelníku označení takové, aby $\alpha < \beta < \gamma$. Pak úhly, které *jedině* hořejším třem rovnicím hoví, jsou

$$\alpha' = \gamma - \beta, \qquad \beta' = \pi + (\alpha - \gamma), \qquad \gamma' = \beta - \alpha.$$

Úloha 6.

Hranami pravidelného čtyrstěnu veď roviny tak, aby obmezovaly krychli, a stanov její hranu.

Prof. *Ant. Sýkora.*

Řešení. (Zaslal p. *K. Kofránek,* stud. gymn. v Třebíči.) Hrany daného čtyrstěnu pravidelného nemohou býti na stěnách hledané krychle nic jiného než úhlopříčky jednotlivých stěn. Jsou tudíž stěny krychle procházející hranou jednou rovnoběžny s protilehlou hranou čtyrstěnu, čímž poloha stěn stanovena a sestrojení provede se známým způsobem.

Je-li hrana čtyrstěnu a, jest hrana krychle $\frac{1}{2} a \sqrt{2}$.

Úloha 7.

Dokázati jest, že všecky trojúhelníky vepsané do jedné a téže ellipsy a mající těžiště ve středu ellipsy mají stejný ploský obsah.

Dr. *M. Haas.*

Řešení. (Zaslal p. *V. Trkal,* stud. gymn. ve Vys. Mýtě.)

1. V ellipse zvolme si dva sdružené průměry, z nichž jeden jest $2a_1$, druhý $2b_1$. Na průměru $2b_1$ budiž těžnice trojúhelníka. Rozpůlíme-li poloměr b_1 a vedeme-li tímto bodem tětivu, rovnoběžnou s průměrem $2a_1$, bude tato tetiva základnou trojúhelníka úlohy. Rovnice ellipsy jest $b_1^2 x_1^2 + a_1^2 y_1^2 = a_1^2 b_1^2$, z čehož $x_1 = \frac{a_1}{b_1} \sqrt{b_1^2 - y_1^2}$, a dosadíme-li $y_1 = \frac{b_1}{2}$ (vzdálenost

středu základny od těžiště), jest $x_1 = \frac{a_1}{2}\sqrt{3}$. Tím našli jsme délku poloviční základny. Obsah trojúhelníka jest $\Delta = \frac{3}{2} b_1 . \frac{a_1}{2}\sqrt{3} . \sin\varphi = \frac{3}{4} a_1 b_1 \sqrt{3} \sin\varphi$, kdež φ jest úhel obou sdružených průměrů. Poněvadž jest $a_1 b_1 \sin\varphi = ab = \text{const.}$, jest též konstantní $\Delta = \frac{3}{4} ab\sqrt{3}$.

2. Můžeme však ještě jinak pomocí geometrie analytické provésti důkaz.

Rovnici ellipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

můžeme nahraditi rovnicemi dvěma

$$x = a \cos t, \qquad y = b \sin t,$$

kde t jest proměnlivý parametr, (různým bodům na ellipse odpovídají různé parametry). Neboť vyloučením parametrů t dostáváme ihned původní rovnici ellipsy.

Buďtež $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ tři vrcholy trojúhelníka, ležící na ellipse; nechť těžiště tohoto trojúhelníka jest ve středu ellipsy (v počátku souřadnic). Pak jest

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

Z těchto dvou rovnic můžeme vypočísti x_3, y_3 a hodnoty tak vypočtené dosaditi do vzorce pro plochu trojúhelníka ABC; dostaneme tuto plochu vyjádřenou pomocí $x_1, y_1; x_2, y_2$. Zcela podobně můžeme tuto plochu vyjádřiti pomocí souřadnic bodů A a B anebo konečně pomocí souřadnic bodů B a C.

Dostaneme tak, označíme-li tuto plochu Δ, tyto výsledky po zcela snadném počtu

$$\frac{2}{3}\Delta = x_1 y_2 - x_2 y_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 .$$

Nechť odpovídají bodům A, B, C na ellipse parametry t_1, t_2, t_3 pak jest $x_1 = a\cos t_1$, $y_1 = b \sin t_1$, $x_2 = a \cos t_2$, a t. d. Dosadíme-li do posledních rovnic máme

$$\frac{2}{3}\Delta = ab \sin(t_2 - t_1) = ab \sin(t_3 - t_2) = ab \sin(t_1 - t_3),$$

z čehož $\sin(t_2 - t_1) = \sin(t_3 - t_2) = \sin(t_1 - t_3)$.

Položme $t_2 - t_1 = \alpha$; pak jest $t_3 - t_2$ (nehledíme-li k celistvým násobku 2π) buď rovno α anebo jest rovno $\pi - \alpha$, jelikož sinusy obou úhlů jsou si rovny.

Avšak, aby současně bylo

$$t_2 - t_1 = \alpha \quad \text{a} \quad t_3 - t_2 = \pi - \alpha + k \,.\, 2\pi,$$

(k, k', ... čísla celá), jest nemožno, neboť pak bychom — obě tyto rovnice sčítajíce — dostali

$$t_3 - t_1 = \pi + k \,.\, 2\pi,$$

anebo

$$t_3 = t_1 + (2k+1)\pi$$

a $x_3 = -x_1$, $y_3 = -y_1$; body A a C nemohou však ležeti na jednom průměru. Musíme tudíž položiti

$$t_3 - t_2 = \alpha + k' \,.\, 2\pi$$

a podobně

$$t_1 - t_3 = \alpha + k'' \,.\, 2\pi.$$

Sčítáme-li tyto dvě rovnice s rovnicí $t_2 - t_1 = \alpha$, obdržíme

$$0 = 3\alpha + (k' + k'')\, 2\pi,$$

ze které rovnice dostáváme dvě v podstatě od sebe (a od nully) různé hodnoty pro α

$$\alpha = \pm \frac{3\pi}{3};$$

a jest tedy, vezmeme-li za základ dalších počtů znaménko hořejší

$$\frac{2}{3} \varDelta = ab \sin \frac{2\pi}{3},$$

anebo

$$\varDelta = \frac{3}{4} ab\sqrt{3}.$$

Zároveň poznáváme, že jestliže parametr bodu A jest t_1, parametry bodů B a C jsou $t_1 + \frac{2\pi}{3}$, $t_1 + \frac{4\pi}{3}$. (Kdybychom vzali znaménko dolní, dostali bychom pro tyto parametry hodnoty zaměněné $t_1 + \frac{4\pi}{3}$, $t_1 + \frac{2\pi}{2}$.)

3. Řešení geometrické. (Zaslal p. *Šejna Jos.*, stud. reálky v Č. Budějovicích.)

Danou ellipsu možno považovati jakožto orthogonálný průmět kružnice K na rovinu E. Při tom průměr kružnice rovná se velké ose ellipsy $2a$. Sklon rovin K a E určí se z rovnice $\cos \varepsilon = \frac{b}{a}$. Střed ellipsy je průmětem středu kružnice. Trojúhelník do kružnice vepsaný promítá se do roviny E, jakožto trojúhelník, jenž je do ellipsy vepsán.

Těžnice trojúhelníka, jakožto spojnice středu strany s protějším vrcholem, má za průmět přímku, která je zase těžnicí pravoúhlého průmětu trojúhelníka. *Následkem toho těžiště T_k se promítá jako těžiště T_e.*

Kromě toho je známo, že mezi ploskými obsahy pravoúhle promítaných trojúhelníků je přímá úměrnost $\Delta_e = \Delta_k \cos \varepsilon$, v našem případě $\Delta_e = \frac{b}{a} \Delta_k$.

Z toho následuje: 1. Trojúhelník žádané vlastnosti je nutně *průmětem rovnostranného trojúhelníka* do kružnice vepsaného, poněvadž jenom u rovnostranného splývá těžiště se středem opsaného kruhu. 2. Ploský obsah rovnostranného $\Delta_k = \frac{3}{4} a^2 \sqrt{3}$, a tudíž jeho průmětu $\Delta_e = \frac{b}{a} \frac{3}{4} a^2 \sqrt{3} = \frac{3}{4} ab\sqrt{3}$ *bez ohledu na polohu vepsaných trojúh.* 3. Z přímé úměrnosti obsahů $\Delta_k : \Delta_e$ soudíme, že výše definované trojúhelníky Δ_e jsou *maximální*, poněvadž Δ_k je pro danou kružnici též maximum.

Úloha 8.

Ustanoviti jest geometrické místo pro střed kruhu opsaného trojúhelníku, jehož těžiště jest ve středu dané ellipsy a vrcholy na obvodu jejím.

Dr. *M. Haas.*

Řešení. (Zaslal p. *Vikt. Trkal*, stud. gymn. ve V. Mýtě).

Souřadnice středu kružnice opsané trojúhelníku $A_1 A_2 A_3$ označme x_0, y_0; souřadnice vrcholů A_1, A_2, A_3 buďtež x_1, y_1 x_2, y_2; x_3, y_3. Pak souřadnice x_0, y_0 najdeme řešením z rovnic

$$(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1 = (x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2$$
$$= (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2.$$

Označíme-li dále plochu trojúhelníka Δ a nahradíme-li ve výsledku pro x_0 vypočteném x_1^2, x_2^2, x_3^2 čísly jim dle rovnice ellipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ rovnými, obdržíme po snadném počtu

$$4\Delta x_0 = \frac{e^2}{b^2}(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)$$

a zcela podobně

$$4\Delta y_0 = \frac{e^2}{a^2}(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1).$$

Tyto výsledky platí pro každý trojúhelník ellipse vepsaný; jestliže však těžiště trojúhelníka jest ve středu ellipsy, tu můžeme dle 2. řešení úlohy předešlé položiti

$$\Delta = \frac{3}{4} ab\sqrt{3}; \quad x_k = a\cos t_k, \quad y_k = b\sin t_k; \quad k = 1, 2, 3;$$

$$t_2 = t_1 + 120^0, \quad t_3 = t_1 + 240^0.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnic pro x_0, dostáváme snadno

$$x_0 \,.\, 3ab\sqrt{3} = 8be^2 \,.\, \sin^3 60^0 \cos t_1 \cos(t_1 + 120^0) \cos(t_1 + 240^0),$$

anebo $$x_0 = \frac{e^2}{4a}\cos 3t_1;$$

a podobně $$y_0 = -\frac{e^2}{4b}\sin 3t_1,$$

ke kterémužto výsledku dospějeme též z výrazu pro x_0, položíme-li v něm místo t_1 $\frac{\pi}{2} - t_1$. Eliminací $3t_1$ z rovnic pro x_0, y_0 dostáváme tuto podmínku:

$$\left(\frac{4ax_0}{e^2}\right)^2 + \left(\frac{4by_0}{e^2}\right)^2 = 1,$$

z čehož plyne, že hledané geometrické místo jest ellipsa soustředná s ellipsou danou, jejížto hlavní osa stojí kolmo na hlavní ose dané ellipsy a jejížto poloosy mají délku $\frac{e^2}{4b}$, $\frac{e^2}{4a}$.

Úloha 9.

Dokázati jest, že průsečíky tří tečen paraboly leží na kružnici procházející ohniskem.

Ant. Lochmann.

Řešení. (Zaslal p. *Šejna Josef*, stud. reál. v Č. Budějovicích.)

Vedeme-li z kteréhokoliv bodu M pevné tečny paraboly tečnu druhou a paprsek jdoucí ohniskem, může úhel tečny druhé a paprsku pro každou polohu bodu M na pevné tečně nabýti — jak známo — toliko dvou různých hodnot doplňujících se na 180^0. (Máme tu jakož i v následujícím při dvou přímkách jenom úhly menší co do absolutní hodnoty nežli 180^0 na zřeteli a nehledíme při tom na jich znaménko.)

Vytkneme-li tedy na tečné paraboly o ohnisku F dva body M, N a vedeme-li z těchto bodů nové tečné, jež protnou se v P, jest buď

$$\sphericalangle FMP = \sphericalangle FNP,$$

aneb
$$\sphericalangle FMP + \sphericalangle FNP = 180^0;$$

a lze tudíž čtyřúhelníku $FMPN$ opsati kružnici.

2. Řešení (analytické.) Zaslal p. *Papřok Jos.*, stud. gymn. v Místku.)

Souřadnice tří libovolných bodů paraboly buďtež $(x_1 y_1)$; $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$; směrnice příslušných tečen jspu

$$A_1 = \frac{p}{y_1},\ A_2 = \frac{p}{p_2},\ A_3 = \frac{p}{y_3};$$

souřadnice průsečíků tečen pak jsou jak snadno vypočítáme

$$M\left(\frac{y_1 y_2}{2p}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right),\ N\left(\frac{y_2 y_3}{2p}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right),$$

$$P\left(\frac{y_1 y_3}{2p}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right).$$

Směrnice přímek MF, NF jsou pak

$$B_1 = \frac{p(y_1 + y_2)}{y_1 y_2 - p^2},\ B_2 = \frac{p(y_2 + y_3)}{y_2 y_3 - p^2},$$

z čehož určíme

$$tg \sphericalangle FMP = \pm \frac{-B_1 + A_1}{1 + A_1 B_1} = \mp \frac{p}{y_2},$$

$$tg \sphericalangle FNP = \pm \frac{-B_2 + A_3}{1 + A_3 B_2} = \mp \frac{p}{y_2},$$

pročež buď
$$\sphericalangle FMP = \sphericalangle FNP,$$

aneb
$$\sphericalangle FMP + \sphericalangle FNP = 180^0;$$

tedy čtyrúhelníku $FMPN$ lze opsati kružnici.

Pozn. 1. Podle věty právě dokázané lze sestrojiti ohnisko libovolné paraboly, jsou-li dány čtyři tečny paraboly.

2. Za čtyři tečny paraboly lze zvoliti čtyři libovolné různoběžné přímky, (parabola jimi jest jednoznačně určena), z těchto

čtyř přímek vždy tři omezují trojúhelník, a jsou tudíž takové trojúhelníky čtyři. Z dokázané věty plyne, že kružnice čtyři těmto čtyrem trojúhelníkům opsané, procházejí všecky jedním bodem. Kolmice z tohoto bodu na všechny čtyři přímky spuštěné mají paty na jediné přímce.

Úloha 10.

Sestrojiti průsečíky paraboly dané ohniskem a řídící přímkou s přímkou procházející ohniskem této paraboly.

Ant. Lochmann.

Řešení. (Zaslal p. *Fr. Raus*, stud. gym. v Pelhřimově.)

Budiž F ohnisko paraboly, A, A' body, v nichž přímka daná seče parabolu; FK, AB, $A'B'$ kolmice z bodů F, A, A' na řiditelku, (body K, B, B' nechť jsou paty těchto kolmic).

Použijeme základní vlastnosti paraboly, že vzdálenost bodu paraboly od řiditelky jest rovna vzdálenosti toho bodu od ohniska.

Následkem toho jest trojúhelník ABF rovnoramenným a tudíž $\sphericalangle ABF = \sphericalangle BFA$. Avšak $\sphericalangle ABF = \sphericalangle KFB$ a tedy $\sphericalangle KFB = \sphericalangle BFA$, anebo jinak: přímka BF půlí úhel KFA. Podobně přímka $B'F$ půlí úhel KFA'.

Konstrukce na základě uvedeného snadná.

Úloha 11.

Přímka procházející průsečíkem A dvou kružnic protíná tyto ještě v bodech P, Q.

α) Kdy jest PQ nejdelší a kdy nejkratší?

β) Sestrojiti jest $\overline{PQ}$ tak, aby byla bodem A půlena.

Ant. Lochmann.

Řešení. (Zaslal p. *Viktor Trkal*, stud. gymn. ve Vys. Mýtě.)

α) Úsečka $\overline{PQ}$ jest nejdelší, jest-li rovnoběžná s centrálou obou kružnic.

Středy obou kružnic buďtež O_1, O_2. I veďme bodem A přímku PQ rovnoběžně s centrálou $O_1 O_2$ a přímku $P'Q'$ libovolně. Paty kolmic ze středů kružnic vedených k přímce PQ

označme M, N; podobně paty kolmic z týchž středů kružnic k přímce $P'Q'$ vedených buďtež M', N'. I jest jasno, že jest

$$\overline{PM} = \overline{MA},\quad \overline{AN} = \overline{NQ};\quad \overline{P'M'} = \overline{M'A},\quad \overline{AN'} = \overline{N'Q'}.$$

Tedy jest

$$\overline{PQ} = 2\overline{MN} = 2\overline{O_1O_2};\quad \overline{P'Q'} = 2\overline{M'N'}.$$

Ale z pravoúhlého lichoběžníka $M'O_1O_2N'$ jest patrno, že rameno $\overline{M'N'}$, jež stojí kolmo na základnách, jest menší než rameno $\overline{O_1O_2}$, jež jest k nim šikmo. Tedy jest $\overline{MN} = \overline{O_1O_2} > \overline{M'N'}$, čili $\overline{PQ} > \overline{P'Q'}$, t. j. $\overline{PQ}$ jest nejdelší.

Úsečka $\overline{PQ}$ jest nejkratší, je-li kolmá k centrále obou kružnic. Neboť redukuje se tato úsečka v tomto případě na bod.

β) *Úsečka $\overline{P'Q'}$ jest bodem A půlena, je-li kolmá k spojnici bodu A a B, půlícího centrálu obou kružnic.*

Přímka AB, nechť jest rovnoběžná s kolmicemi O_1M', O_2N' Z úměrnosti úseček mezi rovnoběžkami plyne

$$\overline{M'A} : \overline{AN'} = \overline{O_1B} : \overline{BO_2}.$$

Má-li býti $\overline{P'A} = \overline{AQ'}$, musí býti i $\overline{M'A} = \overline{AN'}$ a tedy $\overline{O_1B} = \overline{BO_2}$, t. j. bod B musí býti uprostřed délky $\overline{O_1O_2}$.

Úloha 12.

Řešiti jest rovnici

$$2^\nu \sin x \,.\, \cos 2x \,.\, \cos(2^2x) \,\ldots\ldots\, \cos(2^{\nu-1}x) = 1.$$

Ant. Lochmann.

Řešení. (Zaslal *Jar. Hruban*, stud. gymn. v Olomouci.)

Danou rovnici násobme po obou stranách činitelem cos x. Poněvadž jest

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x,$$
$$2 \sin 2x \cos 2x = \sin 2^2x,$$
$$2 \sin(2^2x) \cos(2^2x) = \sin 2^3x,$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$2 \sin(2^{\nu-1}x) \cos({}^{\nu-1}x) = \sin(2^\nu x),$$

transformuje se daná rovnice v rovnici tvaru

$$\sin(2^\nu x) = \cos x.$$

Jest však známo, že $\cos x = \sin(R \mp x) = \sin\left(4nR + [R \mp x]\right)$, čímž hořejší rovnice přejde ve tvar $\sin(2^\nu x) = \sin\big((4n+1)R \mp x\big)$, z čehož $2^\nu x = (4n+1)R \mp x$ a tím

$$x = \frac{(4n+1)R}{2^\nu \pm 1}.$$

Abychom z tohoto výsledku odvodili všechny hodnoty pro x obsažené mezi 0 a $4R$ jest dosazovati při znaménku horním za n všecka čísla od 0 až do $2^\nu - 1$, při znaménku pak dolním všechna čísla od 0 až do $2^\nu - 2$. Avšak jest nutno vyloučiti všecky hodnoty, jež jsou násobky celistvými lichými R. Neboť řešení $(2k+1)R$ rovnici dané nevyhovuje, ono vyhovuje však rovnici odvozené z dané násobením po obou stranách $\cos x$, kterýžto výraz právě pro tyto hodnoty a jenom pro ně stává se nullou.

Úloha 13.

Dokázati jest správnost rovnice

$$\cos 20^0 \,.\, \cos 40^0 \,.\, \cos 60^0 \,.\, \cos 80^0 = \frac{1}{16}.$$

Ant. Lochmann.

Řešení. (Zaslal p. *B. Stempel*, stud. reálky v Praze-II.)

Danou rovnici násobme po obou stranách $16 \sin 20^0$, i dostaneme

$$16 \sin 20^0 \cos 20^0 \cos 40^0 \cos 80^0 \cos 60^0 = \sin 20^0.$$

Ježto jest

$$2 \sin 20^0 \cos 20^0 = \sin 40^0,$$
$$2 \sin 40^0 \cos 40^0 = \sin 80^0,$$
$$2 \sin 80^0 \cos 80^0 = \sin 160^0,$$

a mimo to $$\cos 60^0 = \frac{1}{2},$$

přijdeme k rovnici

$$\sin 160^0 = \sin 20^0,$$

čímž správnost dané rovnice jest dokázána.

Úloha 14.

Dokázati jest vztah

$$\frac{1}{2} tg \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} tg \frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3} tg \frac{x}{2^3} + \dots$$
$$+ \frac{1}{2^\nu} tg \frac{x}{2^\nu} = \frac{1}{2^\nu} cot \frac{x}{2^\nu} - cot\, x.$$

r.

Řešení (zasílá p. *Václav Simandl*, stud. gymn. v Ml. Boleslavi.

Ze známého vzorce

$$\cot 2x = \frac{1}{2} \cot x - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$$

nebo jinak psáno

$$\operatorname{tg} x = \cot x - 2 \cot 2\, x$$

obdržíme, půlíme-li postupně x řadu rovnic

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} - \cot x,$$
$$\frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^2} = \frac{1}{2^2} \cot \frac{x}{2^2} - \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2},$$
$$\frac{1}{2^3} \operatorname{tg} \frac{x}{2^3} = \frac{1}{2^3} \cot \frac{x}{2^3} - \frac{1}{2^2} \cot \frac{x}{2^2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{1}{2^\nu} \operatorname{tg} \frac{x}{2^\nu} = \frac{1}{2^\nu} \cot \frac{x}{2^\nu} - \frac{1}{2^{\nu-1}} \cot \frac{x}{2^{\nu-1}};$$

sečteme-li řadu těchto stejnin, tu dostaneme po náležitém sloučení vztah

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3} \operatorname{tg} \frac{x}{2^3} + \dots$$
$$+ \frac{1}{2^\nu} \operatorname{tg} \frac{x}{2^\nu} = \frac{1}{2^\nu} \cot \frac{x}{2^\nu} - \cot x,$$

jejž bylo dokázati.

Pozn. Řadu Eulerovu dostaneme, položíme-li v tomto výsledku $\lim \nu = \infty$.

Pak jest

$$\lim \frac{1}{2^\nu} \cot \frac{x}{2^\nu} = \lim \frac{\cos \frac{x}{2^\nu}}{2^\nu \sin \frac{x}{2^\nu}}.$$

Avšak $\lim \cos \frac{x}{2^\nu} = 1,$

$$\lim 2^\nu \sin\frac{x}{2^\nu} = \lim \frac{\sin\frac{x}{2^\nu}}{\frac{x}{2^\nu}} . x = x.$$

Máme tudíž

$$\frac{1}{x} - \cot x = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2^3}\operatorname{tg}\frac{x}{2^3} + \dots$$

Nekonečná řada na pravé straně se vyskytující konverguje pro každé x, jež není celistvým násobkem čísla π. Výraz na levé straně vyjadřuje pak součet té nekonečné řady konvergentní vyjma $x = 0$, pro kterýžto případ vývody učiněné nemají platnosti a součet řady jest rovný nulle.

Úloha 15.

Dokázati jest vztah

$$\frac{1}{1 . n} + \frac{1}{2 . (n-1)} + \frac{1}{3 . (n-2)} + \dots\dots$$
$$+ \frac{1}{n . 1} = \frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right);$$

n číslo celé.

r.

Řešení. (Zaslal p. *Jindř. Sedlo*, stud. reálky v Plzni).

Jestliže jest n číslo celé, můžeme psáti tuto řadu n rovnic:

$$\frac{1}{1 . n} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{n}\right),$$
$$\frac{1}{2(n-1)} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}\right),$$
$$\frac{1}{3(n-2)} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n-2}\right),$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\frac{1}{(n-2)3} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n-2} + \frac{1}{3}\right),$$
$$\frac{1}{(n-1)2} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2}\right),$$
$$\frac{1}{n . 1} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{1}\right).$$

Součet všech těchto rovnic jest

$$\frac{1}{1\,.\,n}+\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{3(n-2)}+\ldots+\frac{1}{n\,.\,1}$$
$$=\frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right),$$

čímž daný vztah jest dokázán pro n celé.

Úloha 16.

Jest vyjádřiti ve tvaru co nejjednodušším výrazy

$$\alpha)\ 1+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\binom{n}{9}+\ldots\ldots\ldots,$$

$$\beta)\ 1+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\binom{n}{12}+\ldots;$$

n číslo celé.

r.

Řešení. (Zaslala sl. *Jana Rychlíková* v Praze.)

α) Kořeny rovnice $x^3-1=0$ jsou $\alpha=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, α^2, 1. Součet kořenů jest roven nulle:

$$(1)\qquad \alpha^2+\alpha+1=0$$

a rovněž

$$(1')\qquad \alpha^{2k}+\alpha^k+1=0,$$

když k není dělitelno 3, neboť pak jedno z čísel k, $2k$ dává zbytek 1 při dělení 3, a jedno zbytek 2; mimo to pak jest $\alpha^{3l'+l'}=\alpha^{3l}\alpha^{l'}=\alpha^{l'}$. Jestliže k jest dělitelno třemi, jest

$$\alpha^{2k}+\alpha^k+1=3.$$

Dle poučky binomické jest

$$(1+\alpha^2)^n=1+\binom{n}{1}\alpha^2+\binom{n}{2}\alpha^4+\binom{n}{3}\alpha^6+\ldots$$
$$+\binom{n}{h}\alpha^{2k}+\ldots,$$

$$(1+\alpha)^n=1+\binom{n}{1}\alpha+\binom{n}{2}\alpha^2+\binom{n}{3}\alpha^3+\ldots$$
$$+\binom{n}{k}\alpha^k+\ldots,$$

$$(1+1)^n=1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{k}+\ldots$$

Součet těchto tří rovnic, máme-li zřetel ke svrchu vytčeným vztahům, jest

$$(1+\alpha^2)^n+(1+\alpha)^n+(1+1)^n$$
$$=3\left[1+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\binom{n}{9}+\dots\right].$$

Avšak dle rovnice (1) jest $1+\alpha^2=-\alpha$, $1+\alpha=-\alpha^2$ a tudíž $(1+\alpha^2)^n=(-1)^n\alpha^n$, $(1+\alpha)^n=(-1)^n\alpha^{2n}$, pročež

$$1+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\binom{n}{9}+\dots=\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3.},$$

když *n není dělitelno třemi;*

$$1+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\binom{n}{9}+\dots=\frac{2^n+(-1)^n 2}{3},$$

když *n jest dělitelno třemi.*

β) Abychom vypočetli druhý součet, použijeme podobně čtvrtých odmocnin z jedné určených rovnicí

$$x^4-1=0.$$

Tyto kořeny jsou i, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$. Pro ně pak platí

$$(2)\qquad i^k+i^{2k}+i^{3k}+i^{4k}=0,$$

když k není dělitelno čtyřmi; jestliže však k jest dělitelno čtyřmi, jest na pravé straně poslední rovnice psáti 4.

Dle poučky binomické jest zase

$$(1+i)^n=1+\binom{n}{1}i+\binom{n}{2}i^2+\binom{n}{3}i^3+\dots$$
$$+\binom{n}{k}i^k+\dots,$$
$$(1+i^2)^n=1+\binom{n}{1}i^2+\binom{n}{2}i^4+\binom{n}{3}i^6+\dots$$
$$+\binom{n}{k}i^{2k}+\dots,$$
$$(1+i^3)^n=1+\binom{n}{1}i^3+\binom{n}{2}i^6+\binom{n}{3}i^9+\dots$$
$$+\binom{n}{k}i^{3k}+\dots,$$

$$(1+i^4)^n = 1 + \binom{n}{1} i^4 + \binom{n}{2} i^8 + \binom{n}{3} i^{12} + \dots$$
$$+ \binom{n}{k} i^{4k} + \dots$$

Sečteme-li, majíce na zřeteli vztah (2) a dosazujíce na levé straně svrchu uvedené hodnoty, dostaneme:

$$(1+i)^n + (1-1)^n + (1-i)^n + (1+1)^n$$
$$= 4\left[1 + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \binom{n}{12} + \dots\right].$$

Označme si součet v závorce hranaté uvedený zkrátka S_n; abychom tento součet vyjádřili ve tvaru co nejjednodušším, vezměme v úvahu čtyři různé a jedině možné případy, jež při dělení čtyřmi čísla n nastati mohou:

1. $n = 4\nu$, $(1+i)^{4\nu} = [(1+i)^4]^\nu = (-4)^\nu = (-1)^\nu 2^{2\nu}$,

$$(1-i)^{4\nu} = (-1)^\nu 2^{2\nu},$$
$$S_{4\nu} = \frac{2^{4\nu} + (-1)^\nu 2^{2\nu+1}}{4} = 2^{4\nu-2} + (-1)^\nu 2^{2\nu-1}$$

2. $n = 4\nu + 1$;

$$(1+i)^{4\nu+1} = (1+i)^{4\nu}(1+i) = (-1)^\nu 2^{2\nu}(1+i),$$
$$(1-i)^{4\nu+1} = (-1)^\nu 2^{2\nu}(1-i),$$
$$S_{4\nu+1} = \frac{2^{4\nu+1} + (-1)^\nu 2^{2\nu+1}}{4} = 2^{4\nu-1} + (-1)^\nu 2^{2\nu-1}$$

3. $n = 4\nu + 2$;

$$(1+i)^{4u+2} = (1+i)^{4\nu} . 2i = i . (-1)^\nu 2^{2\nu+1},$$
$$(1-i)^{4\nu+2} = -i . (-1)^\nu 2^{2\nu+1},$$
$$S_{4\nu+2} = 2^{4\nu},$$

4. $n = 4\nu + 3$;

$$(1+i)^{4\nu+3} = (1+i)^{4\nu}(-2+2i) = (-1)^{\nu+1} 2^{2\nu+1}(1-i),$$
$$S_{4\nu+3} = 2^{4\nu+1} + (-1)^{\nu+1} 2^{2\nu}.$$

Poznámka. Výsledky lze pomocí funkcí goniometrických vyjádřiti velmi jednoduše takto:

$$1 + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \binom{n}{9} + \dots = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right],$$

$$1 + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \binom{n}{12} + \dots = 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}} \cos\frac{n\pi}{4}.$$

Druhé řešení. (Zaslal p. *Jar. Hruban*, stud. gymn. v Olomouci.)

Jak snadno ukázati, jsou platny vztahy

$$(3)\quad \binom{n}{k}=\binom{n-3}{k-3}+3\binom{n-3}{k-2}+3\binom{n-3}{k-1}+\binom{n-3}{k},$$

$$(4)\quad \binom{n}{k}=\binom{n-4}{k-4}+4\binom{n-4}{k-3}+6\binom{n-4}{k-2}$$
$$+4\binom{n-4}{k-1}+\binom{n-4}{k}.$$

α) Označivše si výraz $1+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots=S_n$ položme v něm $1=\binom{n-3}{0}$, ostatní pak členy rozložme dle (3). Obdržíme

$$S_n=2\binom{n-3}{0}+3\binom{n-3}{1}+3\binom{n-3}{2}+2\binom{n-3}{3}$$
$$+3\binom{n-3}{4}+\ldots=3\left[\binom{n-3}{0}+\binom{n-3}{1}+\binom{n-3}{2}+\ldots\right]$$
$$-\left[\binom{n-3}{0}+\binom{n-3}{3}+\binom{n-3}{6}+\ldots\right]$$

aneb konečně $\qquad S_n=3\,.\,2^{n-3}-S_{n-3}\,.$

Z tohoto rekurrentního vzorce vypočte se snadno S_n a dostaneme tytéž výsledky jako svrchu.

β) V tomto případě počínáme si stejně jako v předcházejícím, užívajíce při tom vzorce (4), jakož i známých součtů:

$$1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots=2^{n-1},$$

a dostaneme tento vzorec:

$$S_n=5\,.\,2^{n-4}-4S_{n-4}\,,$$

ze kterého rovněž snadno vypočítati výsledky svrchu uvedené.

Úloha 17.

Jest dokázati, že po všemožném zkrácení neobsahuje jmenovatel zlomku $\dfrac{a^{b-1}}{b!}$ *žádného činitele obsaženého v a. Při tom jsou a a b dvě libovolná čísla celá. Ku př.* $\dfrac{6^7}{8!}=\dfrac{3^5}{5\,.\,7}\,.$

Em. Schönbaum.

Řešení. (Zaslal p. *Arn. Barbořík*, stud. gymn. v Olomouci).

Budiž p jedno z prvočísel, jež dělí a. Pak obsahuje čitatel za dělitele toto prvočíslo povýšené *aspoň* na mocninu $b-1$. Jmenovatel jest dělitelem p^α, při čemž

$$\alpha = E\frac{b}{p} + E\frac{b}{p^2} + E\frac{b}{p^3} + \ldots + E\frac{b}{p^s}$$

kde ku př. $E\frac{b}{p}$ značí největší celistvé číslo obsažené v $\frac{b}{p}$, a kde $\frac{b}{p^s} \geqq 1$, avšak $\frac{b}{p^{s+1}} < 1$. Avšak dle významu symbolu E jest

$$\alpha \leqq \frac{b}{p} + \frac{b}{p^2} + \ldots + \frac{b}{p^s}$$

$$\alpha \leqq \frac{b}{p} \cdot \frac{1-\frac{1}{p^s}}{1-\frac{1}{p}}, \quad \alpha \leqq \frac{b}{p-1}\left(1-\frac{1}{p^s}\right),$$

z čehož $\alpha < b$. *Nejvyšší* mocnina p, kterou může býti dělitelny jmenovatel, jest tudíž $b-1$. A poněvadž nejnižší mocnina tohoto prvočísla, dělí-li čitatel jest $p-1$, musí toto prvočíslo po všemožném zkrácení z jmenovatele jistě vypadnouti, čímž věta dokázána.

Úloha 18.

Jest ustanoviti nejmenší čísla positivná tvaru $n = 2^\varrho . p_1 . p_2 . p_3 \ldots$, kdež $p_1, p_2, p_3 \ldots$ značí vesměs různé liché prvočinitele, tak, aby součet jich dělitelů byl roven dvojnásobnému, trojnásobnému, pětinásobnému číslu n.

Em. Schönbaum.

Řešení. (Zaslal p. *V. Trkal*, stud. gymn. ve Vys. Mýtě).

Součet dělitelů čísla $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ jest

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \cdot \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} \cdots$$

Součet dělitelů čísla n jest tedy

$$\frac{2^{\varrho+1}-1}{2-1}\cdot\frac{p_1^2-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^2-1}{p_2-1}\cdot\frac{p_3^2-1}{p_3-1}\cdots$$
$$=(2^{\varrho+1}-1)(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)\ldots.$$

při čemž $p_1, p_2, p_3 \ldots$ jsou lichá různá prvočísla.

Řešme nejprve případ, kdy se tento součet rovná $3n = 2^\varrho . 3 . p_1 . p_2 \ldots.$ Nutno tedy řešiti rovnici

$(2^{\varrho+1}-1)(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)\ldots = 2^\varrho . 3 . p_1 . p_2 . p_3 \ldots.$

Prvočísel $p_1, p_2, p_3 \ldots$ nemůže býti více než ϱ, neboť p_1+1, p_2+1, p_3+1 jsou čísla sudá a jich součin musí býti dělitelen mocninou 2^ϱ, ale nesmí býti dělitelen již vyšší mocninou. Nyní dosazujme za ϱ postupně 1, 2, 3... a hledejme nejmenší čísla té vlastnosti. Budiž $\varrho = 1$. Pak jest $2^{\varrho+1}-1=3$ a prvočíslo můžeme volit jen jedno, tak že bude $3(p_1+1) = 2 . 3 p_1$ čili $p_1 + 1 = 2p_1$, kdež $p_1 > 2$. To je tedy nemožno. Budiž $\varrho = 2$. Pak jest $2^{\varrho+1}-1 = 7$. Bude tedy

$$7(p_1+1)(p_2+1)\ldots = 2^2 . 3 . p_1 . p_2 \ldots.$$

Zde mohou býti nanejvýš dvě prvočísla p_1, p_2, ježto $\varrho = 2$. Poněvadž jest levá strana dělitelna 7, musí i pravá strana býti dělitelna 7, t. j. jedno z prvočísel musí se rovnati 7, třebas $p_1 = 7$. Pak ale levá strana byla by dělitelna 8, kdežto pravá strana je dělitelna jen 4, což jest zase nemožno.

Budiž $\varrho = 3$. Tedy bude $2^{\varrho+1} - 1 = 15 = 3 . 5$. Zde mohou býti nanejvýš tři prvočísla tedy

$$3 . 5 . (p_1+1)(p_2+1)\ldots = 2^3 . 3 . p_1 . p_2 \ldots$$

Krátíme-li 3, obdržíme $5(p_1+1)(p_2+1)\ldots = 2^3 . p_1 . p_2 \ldots$ Levá strana jest dělitelna 5, tedy i pravá musí býti dělitelna 5, proto $p_1 = 5$. Dosazením a zkrácením nabudeme

$$3(p_2+1)\ldots = 2^2 . p_2 \ldots.$$

Levá strana jest dělitelna 3 a proto položíme $p_2 = 3$.

Dosadivše za p_2 vidíme, že levá strana jest dělitelna 2^2 a nemůžeme tudíž přibrati další prvočíslo p_3, ježto by levá strana byla dělitelna vyšší mocninou čísla 2, než pravá strana. Prvočísla $p_1 = 5$, $p_2 = 3$ však skutečně vyhovují.

Jest tedy $n = 2^3 . 3 . 5 = 120$ číslo daného tvaru, jehož součet dělitelů jest roven trojnásobnému číslu n.

Že jest nejmenším číslem té vlastnosti, jest patrno z té okolnosti, že nutně musí býti počet prvočísel lichých v takovém čísle aspoň dvě, neboť má-li býti číslo tvaru $2^\varrho . p_1$, míti žádanou vlastnosť, musí býti splněna rovnice

$$(2^{\varrho+1}-1)(p_1+1)=2^\varrho . 3 . p_1,$$

což jest možno jenom tehdy, když

$$2^\varrho=p_1+1,\quad 2^{\varrho+1}-1=3p_1.$$

Vyloučíme-li z těchto rovnic p_1, máme

$$2^{\varrho+1}-3 . 2^\varrho+2=0$$

anebo jinak

$$-2^\varrho+2=0.$$

A tudíž by musilo býti $\varrho=1$; avšak pro $\varrho=1$ jak jsme ukázali, takové číslo není.

V čísle $120=2^3 . 3 . 5$ vyskytuje se pak nejnižší možné ϱ a dvě nejmenší lichá prvočísla jako činitelé; jest tedy toto číslo nejmenší číslo žádané.

Jiná čísla téže vlastnosti dostaneme pro

$$\begin{aligned}\varrho&=5, & n&=2^5 . 3 . 7,\\ \varrho&=9, & n&=2^9 . 3 . 11 . 31,\\ \varrho&=8, & n&=2^8 . 5 . 7 . 19 . 37 . 73,\\ \varrho&=14, & n&=2^{14} . 5 . 7 . 19 . 31 . 151.\end{aligned}$$

Obdobně řešili bychom případ, kdy součet dělitelů jest roven dvojnásobnému číslu n. Rovnice zní

$$(2^{\varrho+1}-1)(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)\ldots=2^{\varrho+1} . p_1 . p_2 . p_3 \ldots .$$

Prvočísel může býti nejvýše $\varrho+1$. Tak najdeme pro

$$\begin{aligned}\varrho&=1 &&\text{číslo}\quad n=2 . 3=6=2^1(2^2-1),\\ \varrho&=2 &&\quad n=2^2 . 7=28=2^2(2^3-1),\\ \varrho&=3 &&\quad \text{není},\\ \varrho&=4 &&\quad n=2^4 . 31=496=2^4(2^5-1);\ \text{a t. d.}\end{aligned}$$

Stejně konečně bychom řešili i případ, kdy součet dělitelů jest roven pětinásobnému číslu n. Rovnice zní

$$(2^{\varrho+1}-1)(p_1+1)(p_2+1)=2^\varrho . 5 . p_1 . p_2 \ldots$$

Musíme míti na paměti, že $p_1, p_2, p_3 \ldots$ jsou vesměs různá prvočísla a že nejmenší z nich může býti 3. Prvočísel nemůže zde býti více než ϱ. Pro $\varrho=1, 2, 3 \ldots 35$ takové číslo není. Ku př. pro $\varrho=5$ bude $2^{\varrho+1}-1=63=3^2 . 7$; levá strana byla by dělitelna 3^2, což nemožno, neboť pravá strana obsahuje vesměs *různé* liché prvočinitele. Pro $\varrho=15$ bude $2^{\varrho+1}-1=65535$

$= 3 . 5 . 17 . 257$. Činitel 5 se na obou stranách krátí, pak bude $p_1 = 3$, $p_2 = 17$, $p_3 = 257$, čímž obdržíme rovnici

$$3^3 . 43 (p_4 + 1)(p_5 + 1) \ldots = 2^{11} . p_4 . p_5 \ldots$$

Levá strana jest dělitelna 3^3, pravá však nemůže býti z týchž důvodů, jako prve. Tedy ani zde takové číslo neexistuje.

Úloha 19.

Jak veliká jest pravděpodobnost, že dvě čísla jsou relativními prvočísly, (že nemají spol. dělitele).

Em. Schönbaum.

Řešení (Zaslal p. *Viktor Trkal*, stud. VII. tř. g. ve Vys. Mýtě.)

Řešme obecnější úlohu:

Jaká jest pravděpodobnost, že n čísel $a, b, c \ldots$ nemá společné míry.

Pravděpodobnost, že a jest dělitelno dvěma, jest $\frac{1}{2}$ (neboť všech čísel jest dvakrát více nežli sudých). Pravděpodobnost že b jest dělitelno dvěma, jest zase $\frac{1}{2}$, že c jest dělitelno dvěma, jest zase $\frac{1}{2}, \ldots$. Tedy pravděpodobnost, že *všecka čísla* $a, b, c \ldots$ jsou *zároveň* dělitelna dvěma, jest $\frac{1}{2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} \ldots = \frac{1}{2^n}$ dle věty o složené pravděpodobuosti. Poněvadž $a, b, c, \ldots$ mají býti nesoudělná, tedy *aspoň jedno* z nich není dělitelno dvěma, t. j. *nejsou všecka* čísla *zároveň* dělitelna dvěma. A pravděpodobnost, že *nejsou všecka* čísla *zároveň* dělitelna dvěma, jest $1 - \frac{1}{2^n}$. Podobně pravděpodobnost, že nejsou všechna čísla dělitelna třemi, jest $1 - \frac{1}{3^n}$; že nejsou všecka čísla dělitelna ani dvěma ani třemi, jest pravděpodobnost $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$. Pravděpodobnost, že nejsou všecka čísla dělitelna pěti, jest

$1-\frac{1}{5^n}$, tedy pravděpodobnost, že nejsou dělitelna ani dvěma ani třemi ani pěti, jest

$$\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right), \text{ a. t. d.}$$

Pravděpodobnost, že čísla a, b, c ... nejsou dělitelna vůbec žádným číslem kmenným (čili že nemají spol. míry), jest tedy

$$\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\cdots$$

Dle Eulera jest poslední nekonečný součin roven

$$1:\left(\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6}+\ldots\right)\text{*)}$$

Součet oné řady jest znám, je-li n sudé.**)

V našem případě jest $n=2$ a součet oné řady rovná se $\frac{\pi^2}{6}$. Tedy příslušná pravděpodobnost jest $1:\frac{\pi^2}{6}=\frac{6}{\pi^2}=0{\cdot}6079\ldots$

Úloha 20.

Vzorce (Studnička, Funkce monoperiodické, str. 100)

$$\cos nx=1-\frac{n^2}{2!}\sin^2x+\frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\sin^4x-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}\sin^6x+\cdots,$$

(n sudé);

$$\sin nx=n\sin x-\frac{n(n^2-1^2)}{3!}\sin^3x+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5x-\cdots$$

(n liché)

est přetvořiti tak, aby výrazy pro $2\cos nx$, $2\sin nx$ postupovaly dle mocnin výrazu $(2\sin x)$ a o koeficientech na pravé straně jest pak dokázati, že jsou celými čísly.

Em. Schönbaum.

Řešení. (Zaslal p. *Jar. Hruban*, stud. gymn. v Olomouci.)

2. Pro *n sudé* jest

---

*) Dr. F. J. Studnička: Všeobecné tvarosloví algebraické, pag. 193.

**) Ed. Weyr: Differenciální počet, pag. 191.

$$2\cos nx = 2 - \frac{n^2}{2.\,2!}(2\sin x)^2 + \frac{n^2(n^2-2^2)}{2^3.\,4!}(2\sin x)^4\ldots$$

Koefficient k-tého členu jest (při $k > 1$, prvého členu koeff jest 2):

$$C_k = \frac{n^2.(n^2-2^2).(n^2-4^2)\ldots.(n^2-(2k-4)^2)}{2^{2k-3}.(2k-2)!}$$

$$= \frac{n}{2k-2}\,\frac{\left(\frac{n}{2}+k-2\right)\left(\frac{n}{2}+k-3\right)\left(\frac{n}{2}+2\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{n}{2}.\left(\frac{n}{1}-1\right)\ldots\left(\frac{n}{2}-k+2\right)}{(2k-3)!}$$

$$= \frac{n}{2k-2}.\binom{\frac{n}{2}+k-2}{2k-3} = \left(2\,\frac{\binom{\frac{n}{2}+k-1}{2k-2}}{} - 1\right)\binom{\frac{n}{2}+k-2}{2k-3}.$$

Anebo konečně

$$C_k = 2\binom{\frac{n}{2}+k-1}{2k-2} - \binom{\frac{n}{2}+k-2}{2k-3}.$$

A poněvadž binomičtí součinitelé jsou čísla celá, jest i C_k číslem celým.

2. Pro n *liché* obdržíme

$$2\sin nx = n(2\sin x) - \frac{n(n^2-1)}{3!\,2^4}(2\sin x)^3$$
$$+ \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3)^2}{5!\,2^4}(2\sin x)^5 - \ldots.$$

Koefficient k-tého členu jest ($D_1 = n$) při $k > 1$:

$$D_k = \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)\ldots(n^2-[2k-3]^2)}{2^{2k-2}.(2k-1)!} =$$

$$= \frac{n}{2k-1}\,\frac{\left(\frac{n-3}{2}+k\right)\left(\frac{n-5}{2}+k\right)\ldots\frac{n-1}{2}.\frac{n-1}{2}\ldots\left(\frac{n+3}{2}-k\right)}{(2k-2)!} =$$

$$= \frac{n}{2k-1}\binom{\frac{n-3}{2}+k}{2k-2} = \left(2\,\frac{\frac{n-1}{2}+k}{2k-1} - 1\right)\binom{\frac{n-3}{2}+k}{2k-2},$$

$$D_k = 2\binom{\frac{n-1}{2}+k}{2k-1} - \binom{\frac{n-3}{2}+k}{2k-2};$$

D_k jest číslo celé.

Úloha 21.

Dokázati, že žádné číslo kmenné (prvočíslo) větší nežli 5 nelze uvésti na tvar $N = m^4 + 4n^4$.

Dr. *M. Haas.*

Řešení. (Zaslal p. *Václav Simandl*, stud. gymn. v Ml. Boleslavi.)

Můžeme předpokládati patrně čísla m a $n \geqq 0$.

Číslo N uveďme na tvar

$$N = (m^2 + 2n^2)^2 - 4m^2n^2$$

nebo dále
$$N = [(m+n)^2 + n^2][(m-n)^2 + n^2].$$

Číslo N jest tedy číslo složené vyjma případu, že by jeden z činitelů byl roven 1.

Aby první činitel byl roven 1, muselo by $n = 0$ a $m = 1$ a pak by bylo $N = 1$.

Aby druhý činitel rovnal se 1 muselo by buď opětně $m = 1$, $n = 0$, což jsme právě vyloučili, aneb $m = n = 1$ a tu by bylo $N = 5$.

Proto žádné prvočíslo větší nežli 5 nelze uvésti na tvar $N = m^4 + 4n^4$; kde m i n jsou čísla celá.

Úloha 22.

Kolik řešení poskytují rovnice

$$a(x+\alpha)^{n+1}(y+\alpha)^n + b(x+\beta)^{n+1}(y+\beta)^n + c(x+\gamma)^{n+1}(y+\gamma)^n = 0,$$
$$a(x+\alpha)^n(y+\alpha)^{n+1} + b(x+\beta)^n(y+\beta)^{n+1} + c(x+\gamma)^n(y+\gamma)^{n+1} = 0.$$

Dr. *M. Haas.*

Řešení. (Zaslal p. *V. Trkal,* stud. gymn. ve Vys. Mýtě.)

Označme první rovnici dané soustavy (1) a druhou (2). Rozdíl obou rovnic podává rovnici

$$(1)-(2)=(3) \qquad (x-y)\,[a(x+\alpha)^n\,(y+\alpha)^n + b(x+\beta)^n\,(y+\beta)^n + c\,(x+\gamma)^n\,(y+\gamma)^n] = 0.$$

Rozšiřujeme-li prvou rovnici činitelem $-y$ a druhou x, obdržíme sčítáním rovnici

$$x(2) - y(1) = (4) \qquad (x-y)\left[a\alpha(x+\alpha)^n(y+\alpha)\right. \\ \left. + b\beta(x+\beta)^n(y+\beta)^n + c\gamma(x+\gamma)^n(y+\gamma)^n\right] = 0.$$

Tím jsme získali místo původních rovnic dvě nové rovnice. Buď jest $x - y = 0$, nebo oba výrazy v hranatých závorkách jsou rovny nulle. Je-li $x - y = 0$, čili $x = y$, dostaneme dosazením třeba do rovnice (1) rovnici stupně $2n + 1$ a tím $2n + 1$ kořenů. Přihlížejme nyní k ostatním kořenům, když je $x - y \gtrless 0$.

Pak máme dvě rovnice

$$(5) \qquad a(x+\alpha)^n(y+\alpha)^n + b(x+\beta)^a(y+\beta)^n \\ + c(x+\gamma)^n(y+\gamma)^n = 0,$$

$$(6) \qquad a\alpha(x+\alpha)^n(y+\alpha)^n + \beta b(x+\beta)^n(y+\beta)^n \\ + c\gamma(x+\gamma)^n(y+\gamma)^n = 0,$$

jež jsou lineární a homogenní vzhledem k číslům

$$(x+\alpha)^n(y+\alpha)^n, \quad (x+\beta)^n(y+\beta)^n, \quad (x+\gamma)^n(y+\gamma)^n.$$

Tedy jest

$$(x+\alpha)^n . (y+\alpha)^n : (x+\beta)^n . (y+\beta)^n : (x+\gamma)^n . (y+\gamma)^n \\ = bc(\gamma-\beta) : ca(\alpha-\gamma) : ab(\beta-\alpha).$$

Z toho jest

$$\frac{(x+\alpha)(y+\alpha)}{(x+\gamma)(y+\gamma)} = \sqrt[n]{\frac{bc(\gamma-\beta)}{ab(\beta-\alpha)}} = \sqrt[n]{\frac{c(\gamma-\beta)}{a(\beta-\alpha)}},$$

$$\frac{(x+\beta)(y+\beta)}{(x+\gamma)(y+\gamma)} = \sqrt[n]{\frac{ca(\alpha-\gamma)}{ab(\beta-\alpha)}} = \sqrt[n]{\frac{c(\alpha-\gamma)}{b(\beta-\alpha)}}.$$

Každé odmocnině lze přisouditi libovolnou z n hodnot; celkem máme n^2 párů, t. j. n^2 soustav o dvou rovnicích.

Každou z těchto soustav lze uvésti na tvar

$$Axy + B(x+y) + C = 0$$
$$A'xy + B'(x+y) + C' = 0$$

a ta má jak známo dva páry kořenů.

Tím dostaneme 2 páry kořenů pro každou soustavu a jelikož jsme měli n^2 takovýchto soustav, budou míti rovnice (5), (6) $2n^2$ párů kořenových.

Tyto kořeny rovnic (5), (6) vyhovují zároveň rovnicím (1), (2), neboť (1) = (6) + (5)x, (2) = (6) + (5)y a je-li tedy (5) = 0, (0) = 0, jest též (1) = 0, (2) = 0. Kromě toho vyhovují rovnicím (1), (2) ty kořeny, pro něž jest $x = y$ a těch jest $2n + 1$. Jiných kořenů daná soustava nemá, neboť každý kořen, pro nějž není $x = y$, vyhovuje též rovnicím (5), (6), ježto jest

$$(5) = \frac{(1) - (2)}{x - y}, \qquad (6) = \frac{x(2) - y(1)}{x - y}.$$

Má tedy daná soustava v celku $2n^2 + 2n + 1$ párů kořenových.

Úloha 23.

Dokažte, že

$$\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n_n}$$

jest rovno 0, jestliže n liché; jestliže pak n sudé, že jest tento výraz roven $\frac{2(n+1)}{n+2}$. Při tom jest n_k binomický součinitel;

$$n_k = \binom{n}{k}.$$

r.

1. Řešení. (Zaslal p. *Viktor Trkal*, stud. gymn. ve Vys. Mýtě).

Jak známo, jest pro n celistvé kladné $n_k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$. A tu lze psáti, označíme-li danou řadu s,

$$s = \frac{0!\,n!}{n!} - \frac{1!\,(n-1)!}{n!} + \frac{2!\,(n-2)!}{n!} - \ldots + (-1)^n \frac{n!\,0!}{n!},$$

při čemž $0! = 1$.

Tedy jest

$$s \, . \, n! = 0!\,n! - 1!\,(n-1)! + 2!\,(n-2)! - \ldots + (-1)^n n!\,0!$$

Nyní rozšiřujme tuto rovnici dvojčlenem $(n + 2)$, ale toto rozšiřování na pravé straně proveďme tak, že první člen budeme násobiti dvojčlenem $[(n+1)+1]$, druhý člen dvojčlenem $[n+2]$, třetí člen $[(n-1)+3]$, čtvrtý $[(n-1)+4]$, ... poslední člen dvojčlenem $[1+(n+1)]$.

Pak bude

$$s.(n+2).n! = (n+1)! + n! - 1!\,n! - 2!\,(n-1)!$$
$$+ 2!\,(n-1)! + 3!\,(n-2)! - \ldots + (-1)^n (n+1)!$$

Vidíme, že všechny členy až na první a poslední se ruší, tak že jest

$$s.(n+2)n! = (n+1)! + (-1)^n (n+1)! = (n+1)!\,[1+(-1)^n].$$

Krátíme-li $n!$ dostaneme

$$s = [1+(-1)^n].\frac{n+1}{n+2}.$$

Jestliže n liché, jest $s = 0$. To jest přímo patrno, neboť vždy dva členy symmetricky od středu položené se ruší. Jestliže n sudé, jest $s = \dfrac{2(n+1)}{n+2}$, jak bylo tvrzeno.

2. Řešení. (Zaslala sl. *Jana Rychlíkova* v Praze II.)

Součet daný můžeme psáti stručně takto

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n_k}.$$

Od této rovnice odečtemež vztah určující S_{n+1}

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{(n+1)^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(n+1)_k} + (-1)^{n+1};$$

dostaneme

$$S_n - S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{(-1)^k}{n_k} - \frac{(-1)^k}{(n+1)_k}\right] - (-1)^{n+1}.$$

Avšak

$$\frac{1}{n_k} - \frac{1}{(n+1)_k} = \frac{1}{n_k} - \frac{n+1-k}{(n+1) \cdot n_k} = \frac{k}{n+1} \cdot \frac{1}{n_k}$$
$$= \frac{k+1-1}{n+1} \cdot \frac{1}{n_k} = \frac{k+1}{n+1} \cdot \frac{1}{n_k} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n_k}$$
$$= \frac{1}{(n+1)_{k+1}} - \frac{1}{n+1} \frac{1}{n_k}.$$

Dosazením posledního výrazu obdržíme po snadné úpravě

$$S_n - S_{n+1} = (-1)^n - \sum_{1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{(n+1)_k} - \frac{1}{n+1} \sum_{0}^{n} \frac{(-1)^k}{n_k},$$

z čehož, (jelikož prvý součet na pravé straně jest S_{n+1} bez prvého členu, kterýž jest rovný 1),

$$S_n - S_{n+1} = (-1)^n + 1 - S_{n+1} - \frac{1}{n+1} S_n;$$

a tudíž
$$S_n = \frac{n+1}{n+2} (1 + (-1)^n),$$

což mělo se dokázati.

Úloha 24.

Výraz

$$\binom{n}{0} - \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} - \binom{n-3}{3} + \cdots + (-1)^k \binom{n-k}{k}$$

kdež k *jest největší celé číslo obsažené v* $\frac{n}{2}$, *jest buď rovný* 1, *neb* 0, *anebo konečně* -1. *Dokázati to a ustanoviti, pro která* n *jednotlivé z těchto tří případů nastávají.*

r.

Řešení. (Zaslal p. *Viktor Trkal*, stud. gymn. ve Vys. Mýtě.)

Označme n

$$S_n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^k \binom{n-k}{k}.$$

Pak jest podobně

$$S_{n-1} = \binom{n-1}{0} - \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} - \binom{n-4}{3} + \dots$$
$$+ (-1)^{k'} \binom{n-k'}{k'}.$$

Jestliže n sudé, jest $k' = k - 1$, jestliže n liché, jest $k' = k$; můžeme však i když n sudé klásti $k' = k$, neboť člen, který tak přidáváme, jest rovný nulle. Utvořme rozdíl $S_n - S_{n-1}$, při čemž užijeme věty

$$\binom{m}{r} - \binom{m-1}{r} = \binom{m-1}{r-1}.$$

Výrazy pro S_n, S_{n-1} mají stejný počet členů, učiníme-li $k' = k$ i pro n sudé.

Odečteme-li od sebe oba výrazy pro S_n, S_{n-1}, první členy se ruší, ostatní členy se odečtou dle uvedeného vzoru a dostaneme:

$$S_n - S_{n-1} = -\left[\binom{n-2}{0} - \binom{n-3}{1} + \binom{n-4}{2} - \dots\right.$$
$$\left. + (-1)^{k''} \binom{n-2-k''}{k''}\right],$$

kdež $$k'' = k - 1.$$

Výraz v závorce však rovná se S_{n-2} a tedy

$$S_n - S_{n-1} + S_{n-2} = 0.$$

Tento rekurrentní vzorec postačí k úplnému určení S_n, když $n \geqq 2$. Přímo však ustanovíme $S_0 = 1$, $S_1 = 1$ a dále pomocí formule odvozené $S_2 = 0$, $S_3 = -1$, $S_4 = -1$, $S_5 = 0$.

Píšeme-li v obecném vzorci místo n $n + 1$, dostaneme

$$S_{n+1} - S_n + S_{n-1} = 0$$

a sečtěním obou rovnic

$$S_{n+1} + S_{n-2} = 0;$$

anebo jinak $$S_{n+3} = - S_n,$$

z čehož $$S_{n+6} = S_n.$$

Jsou tedy všecka S_n, jichž indexy liší se o celistvý násobek čísla 6 sobě rovna a jest tudíž dle výsledku pro S_0, $S_1, \dots S_5$

$$S_n = 1, \text{ když } n = 6k + \varepsilon,$$
$$S_n = 0, \text{ když } n = 6k + 2 + 3\varepsilon,$$
$$S_n = -1, \text{ když } n = 6k + 4 - \varepsilon;$$

při tom jest ovšem k číslo celé a ε jest položiti buď 0 anebo 1.

Úloha 25.

Dokázati, že výraz

$$\cos^2(\alpha - \varphi) + \cos^2(\beta - \varphi) - 2\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha - \varphi)\cos(\beta - \varphi)$$

jest nezávislý na φ. S výhodou lze při důkaze použiti úvahy geometrické.

r.

1. Řešení. (Zaslal p. *Vlad. Živanský*, stud. gymn. v Brně.)

Značíme-li daný výraz písmenem V, $\alpha - \varphi = x$, $\beta - \varphi = y$, máme:

$$\begin{aligned} V &= \cos^2 x + \cos^2 y - 2\cos x \, . \cos y \cos(x - y) \\ &= \cos^2 y + \cos^2 x - 2\cos^2 x \cos^2 y - 2\sin x \cos x \sin y \cos y \\ &= \cos^2 y(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x(1 - \cos^2 y) - 2\sin x \cos x \sin y \cos y \\ &= \cos^2 y \sin^2 x - 2\sin x \cos y \, . \cos x \sin y + \cos^2 x \sin^2 y \\ &= (\sin x \cos y - \cos x \sin y)^2 = \sin^2(x - y) = \sin^2(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

$V = \sin^2(\alpha - \beta)$, jest tedy na φ nezávislý, což bylo dokázati.

Řešení 2. (Zaslal p. *Arnošt Barbořík*, stud. gymn. v Olomouci.)

Veďme bodem O paprsky OF, OB, OA svírající s osou OX úhly po řadě φ, β, α a budiž pro jednoduchost $\alpha > \beta > \varphi$ a všecky tyto úhly ostré. Z bodu F na paprsku OF spusťme kolmice na paprsky OB, OA. Paty těchto kolmic nechť jsou v bodech B, A.

Pak jest

$$OB = OF\cos(\beta - \varphi),$$
$$OA = OF\cos(\alpha - \varphi)$$

a dle věty Carnotovy z trojúhelníka OAB

$$\overline{AB}^2 = \overline{OF}^2[\cos^2(\alpha - \varphi)$$
$$+ \cos^2(\beta - \varphi) - 2\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha - \varphi)\cos(\beta - \varphi)].$$

Avšak
$$FB = OF \sin(\beta - \varphi),$$
$$FA = OF \sin(\alpha - \varphi)$$

a dle věty Carnotovy z trojúhelníka FAB

$$\overline{AB}^2 = \overline{OF}^2[\sin^2(\alpha - \varphi)$$
$$+ \sin^2(\beta - \varphi) - 2\cos(\alpha - \beta)\sin(\alpha - \varphi)\sin(\beta - \varphi)].$$

Sečtením obou výsledků pro $\overline{AB}^2$ dostáváme

$$2\overline{AB}^2 = 2\overline{OF}^2[1 - \cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha - \varphi - \beta + \varphi)]$$
$$= 2\overline{OF}^2[1 - \cos^2(\alpha - \beta)],$$
$$= 2\overline{OF}^2\sin^2(\alpha - \beta),$$

z čehož

$$\cos^2(\alpha - \varphi) + \cos^2(\beta - \varphi) - 2\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha - \varphi)\cos(\beta - \varphi)$$
$$= \sin^2(\alpha - \beta).$$

Tímto vztahem žádaná vlastnost výrazu dokázána pro $\alpha > \beta > \varphi$.

Rovnice pro $\overline{AB}^2$ platí však v každém případě, ať paprsky OF, OB, OA mají vzájemnou polohu jakoukoli, jak snadno ukázati, a vztah dokázaný vždy platný.

Úloha 26.

Paty výšek v trojúhelníku ABC jsou vrcholy trojúhelníka $A'B'C'$. Ustanoviti jest úhly trojúhelníka $A'B'C'$ z úhlů trojhelníka ABC a to i planimetricky i pomocí trigonometrie.

Učitel *Frant. Jiršák* v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *K. Kofránek*, stud. gymn. v Třebíči.)

a) Buďtež nejprve všecky úhly daného trojúhelníka menší nežli 90^0 a V budiž průsek výšek. Pak lze čtyřúhelníku $CB'VA'$ opsati kruh, jelikož dva protější jeho úhly při A' a při B' jsou pravé. A poněvadž obvodové úhly v kruhu nad stejnými oblouky jsou stejné, jest

$$\sphericalangle AA'B' = \sphericalangle C'CA = 90^0 - \alpha,$$

užíváme-li pro úhly původního trojúhelníka ABC známého označení. Stejně plyne

$$\sphericalangle AA'C' = 90^0 - \alpha$$

a tudíž celý úhel při A' v trojúhelníku $A'B'C'$:

$$\sphericalangle B'A'C' = \alpha' = 180^0 - 2\alpha.$$

Podobně

$$\beta' = 180^0 - 2\beta, \qquad \gamma' = 180^0 - 2\gamma.$$

Jestliže jest trojúhelník daný ABC tupoúhlý, má-li na př. úhel tupý při α, dostaneme úvahou téměř stejnou tyto výsledky

$$\alpha' = 2\alpha - 180^0, \qquad \beta' = 2\beta, \qquad \gamma' = 2\gamma.$$

b) Abychom totéž odvodili pomocí vzorců trigonometrických, vypočteme si strany trojúhelníka $A'B'C'$.

$$\overline{A'C} = b\,|\cos\gamma|, \qquad \overline{B'C} = a\,|\cos\gamma|$$

a dle věty Carnotovy

$$\begin{aligned}\overline{A'B'}^2 &= \overline{A'C}^2 + \overline{B'C}^2 - 2\overline{A'C}\,.\,\overline{B'C}\cos\gamma \\ &= \cos^2\gamma\,[a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma] = c^2\cos^2\gamma.\end{aligned}$$

a tedy $$\overline{A'B'} = c\,.\,|\cos\gamma|$$

a $$\overline{B'C'} = a\,.\,|\cos\alpha|, \qquad \overline{C'A'} = b\,.\,|\cos\beta|.$$

Úhly trojúhelníka $A'B'C'$ jsou *jednoznačně* určeny rovnicí

(I.) $$\alpha' + \beta' + \gamma' = 180^0$$

a větou sinusovou

$$\begin{aligned}\sin\alpha' : \sin\beta' : \sin\gamma' &= \overline{B'C'} : \overline{C'A'} : \overline{A'B'} \\ &= a\,.\,|\cos\alpha| : b\,.\,|\cos\beta| : c\,.\,|\cos\gamma|.\end{aligned}$$

Avšak a, b, c, strany to trojúhelníka A, B, C, jsou úměrny sinusům protilehlých úhlů a tudíž

$$\sin\alpha' : \sin\beta' : \sin\gamma' = |\sin\alpha\cos\alpha| : |\sin\beta\cos\beta| : |\sin\gamma\cos\gamma|$$

aneb konečně

(II) $$\sin\alpha' : \sin\beta' : \sin\gamma' = |\sin 2\alpha| : |\sin 2\beta| : |\sin 2\gamma|$$

Abychom rovnicím (I.) a (II.) současně vyhověli, můžeme *jenom* položiti, *když* α, β, γ *jsou úhly ostré*

$$\alpha' = 180^0 - 2\alpha, \qquad \beta' = 180^0 - 2\beta, \qquad \gamma' = 180^0 - 2\gamma;$$

když jeden z úhlů α, β, γ, *na př.* α *jest tupý*

$$\alpha' = 2\alpha - 180^0, \qquad \beta' = 2\beta, \qquad \gamma' = 2\gamma.$$

Úloha 27.

Nad stranami trojúhelníka ABC *sestrojeny jsou trojúhelníky* $AC'B$, $BA'C$, $CB'A$; *mezi úhly těchto tří trojúhelníků jsou pak tyto vztahy:*
$\sphericalangle CAB' = \sphericalangle C'AB$, $\sphericalangle ABC' = \sphericalangle A'BC$, $\sphericalangle BCA' = \sphericalangle B'CA$
Dokázati jest, že přímky AA', BB', CC' *se protínají v jednom bodě.* *r.*

Řešení. (Zaslal p. *Papřok Josef*, stud. gymn, v Místku.)

Vedeme-li vrcholem A trojúhelníka ABC přímku a z bodu libovolného M této přímky spustíme kolmice na stranu AC a na stranu AB, jest poměr délek těchto kolmic stejný pro všechny body přímky bodem A vedené. Označme paty těch kolmic B_1, resp. C_1 a zaveďme toto označení

$$d_{BC} = \pm \frac{\overline{MB_1}}{\overline{MC_1}}.$$

Při tom beřme znaménko $+$, prochází-li paprsek AM vnitřním úhlem trojúhelníka u A, znaménko $-$, prochází-li vnějším úhlem trojúhelníka u A. Obdobný význam nechť mají d_{CA}, resp. d_{AB} pro přímku vedenou bodem B, resp. C.

Protínají-li se tři přímky vedené vrcholy trojúhelníka ABC v jediném bodě O, jest

$$\text{(I)} \qquad d_{BC} \,.\, d_{CA} \,.\, d_{AB} = 1,$$

jak ihned seznáme, vyjádříme-li poměry $d_{BC}\ldots$ pomocí kolmic spuštěných z bodu O. A jelikož poměrem kolmic a příslušným znaménkem jest paprsek jednoznačně ustanoven, platí také věta opačná, že, kdykoliv splněna jest podmínka (I), paprsky příslušné jdoucí body A, B, C protínají se v bodě jediném.

Ustanovme v případě úlohou daném poměr d_{BC} tím, že vypočteme kolmice spuštěné z bodu A' na strany AC, AB. Označme úhly trojúhelníka daného α, β, γ; úhly pak v trojúhelnících nad stranami BC, CA, AB označme tak, že úhly jich mající vrchol při A (a jež dle předpokladu jsou stejné) pojmenujeme α_1, γ_1 a podobně při B a C β_1 a γ_1. Dle věty sinusové jest

$$\overline{BA'} = \overline{BC}\frac{\sin\gamma_1}{\sin(\beta_1+\gamma_1)},$$

$$\overline{CA'} = \overline{BC}\frac{\sin\beta_1}{\sin(\beta_1+\gamma_1)}.$$

Kolmice na stranu AC, resp. AB z bodu C' mají tudíž délku

$$\pm\overline{BC}\frac{\sin\beta_1}{\sin(\beta_1+\gamma_1)}.\sin(\gamma+\gamma_1),$$

$$\text{resp. } \pm\overline{BC}\frac{\sin\gamma_1}{\sin(\beta_1+\gamma_1)}.\sin(\beta+\beta_1),$$

a tedy (i se správným znaménkem)

$$d_{BC} = \frac{\sin\beta_1\sin(\gamma+\gamma_1)}{\sin\gamma_1\sin(\beta+\beta_1)};$$

z čehož a z výrazů obdobných pro d_{CA}, d_{AB} ihned patrno, že

$$d_{BC}\,.\,d_{CA}\,.\,d_{AB} = 1.$$

Čímž věta úlohou vyslovená dokázána.

Úloha 28.

Sestrojíme-li nad stranami čtyřúhelníka $ABCD$, jakožto základnami, trojúhelníky rovnoramenné s pravým úhlem při vrcholu (a to buď všecky trojúhelníky na vnější stranu čtyřúhelníka anebo všechny trojúhelníky na vnitřní stranu), jsou vrcholy těchto trojúhelníků vrcholy čtyřúhelníka, jehožto úhlopříčky jsou stejny a stojí k sobě kolmo. *r.*

Řešení. (Zaslal p. *B. Kladivo*, stud. gymn. v Brně.)

Nechť jsou vrcholy čtyřúhelníka v pravoúhlé soustavě dány souřadnicemi (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4). Označíme-li souřadnice vrcholů trojúhelníků pravoúhlých rovnoramenných nad stranami čtyřúhelníka jakožto přeponami sestrojených (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3), (ξ_4, η_4) dostaneme

$$\xi_1 = \frac{x_1 + x_2 \mp y_1 \pm y_2}{2}, \quad \eta_1 = \frac{y_1 + y_2 \pm x_1 \mp x_2}{2},$$

$$\xi_2 = \frac{x_2 + x_3 \mp y_2 \pm y_3}{2}, \quad \eta_2 = \frac{y_2 + y_3 \pm x_2 \mp x_3}{2},$$

$$\xi_3 = \frac{x_3 + x_4 \mp y_3 \pm y_4}{2}, \quad \eta_3 = \frac{y_3 + y_4 \pm x_3 \mp x_4}{2},$$

$$\xi_4 = \frac{x_4 + x_1 \mp y_4 \pm y_1}{2}, \quad \eta_4 = \frac{y_4 + y_1 \pm x_4 \mp x_1}{2},$$

při čemž znaménko horní platí pro vrcholy trojúhelníků vně sestrojených a dolní pro vrcholy trojúhelníků dovnitř sestrojených.

Z čehož

$$\sqrt{(\xi_3 - \xi_1)^2 + (\eta_3 - \eta_1)^2} = \sqrt{(\xi_4 - \xi_2)^2 + (\eta_4 - \eta_2)^2},$$

t. j. spojnice protějších vrcholů se rovnají.

Směrnice úhlopříček vzniklých čtyřúhelníků jsou v prvém případě (trojúhelníků vnějších):

$$\frac{y_1 + y_2 - y_3 - y_4 + x_1 - x_2 - x_3 + x_4}{-y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + x_1 + x_2 - x_3 - x_4}$$

a

$$\frac{-y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + x_1 + x_2 - x_3 - x_4}{-(y_1 + y_2 - y_3 - y_4 + x_1 - x_2 - x_3 + x_4)};$$

a v druhém případě:

$$\frac{y_1 + y_2 - y_3 - y_4 - x_1 + x_2 + x_3 - x_4}{y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + x_1 + x_2 - x_3 - x_4}$$

a

$$\frac{-(y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + x_1 + x_2 - x_3 - x_4)}{y_1 + y_2 - y_3 - y_4 - x_1 + x_2 + x_3 - x_4)};$$

z rovnic těch je patrno, že úhlopříčky ty stojí na sobě kolmo.

Úloha 29.

Sestrojíme-li nad stranami trojúhelníka, jakožto základnami trojúhelníky rovnoramenné s úhlem 120 stupňů při vrchole a to všecky trojúhelníky buď na zevnější stranu anebo všechny na vnitřní stranu daného trojúhelníka, jsou vrcholy těchto trojúhelníků vrcholy trojúhelníka rovnostranného; dostáváme pak tak dva trojúhelníky rovnostranné. Jestliže ω jest úhel, který svírá strana jednoho z těchto rovnostranných trojúhelníků s jednou stranou druhého trojúh. rovnostr., jest mezi ω a stranami původního trojúhelníka a, b, c vztah:

$$tg\, 3\,\omega = 3\sqrt{3}\,\frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{(a^2 + b^2 - 2c^2)(c^2 + a^2 - 2b^2)(b^2 + c^2 - 2a^2)}.$$

Tento vztah jest dokázati. r.

Řešení. (Zaslal p. *Vlad. Živanský,* stud. gymn. v Brně.) Buď v trojúhelníku ABC vrchol A počátkem souřadnic orthog. a AB osou úseček. Buďtež nad stranami AC a AB trojúhelníky ACM a ABN vně, ACM' a ABN' vnitř tak, že jsou rovnoramennými s úhlem 120^0 při vrcholech M, M', N, N'. Body M, M', N, N' určeny jsou souřadnicemi:

$$M\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\cos(\alpha + 30), \frac{b}{\sqrt{3}}\sin(\alpha + 30)\right),\quad N\left(\frac{c}{2}, -\frac{c}{2\sqrt{3}}\right),$$

$$M'\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\cos(\alpha - 30), \frac{b}{\sqrt{3}}\sin(\alpha - 30)\right),\quad N'\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2\sqrt{3}}\right).$$

Směrnice přímky $\overline{MN}$ je

$$A = \frac{\frac{b}{\sqrt{3}}\sin(\alpha + 30) + \frac{c}{2\sqrt{3}}}{\frac{b}{\sqrt{3}}\cos(\alpha + 30) - \frac{c}{2}},$$

měrnice přímky $\overline{M'N'}$ je

$$B = \frac{\frac{b}{\sqrt{3}}\sin(\alpha - 30) - \frac{c}{2\sqrt{3}}}{\frac{b}{\sqrt{3}}\cos(\alpha - 30) - \frac{c}{2}}.$$

Pak

$$tg\omega = \frac{A-B}{1+AB} = \sqrt{3}\,\frac{b^2-c^2}{c^2+b^2-4bc\cos\alpha} = \sqrt{3}\,\frac{b^2-c^2}{2a^2-b^2-c^2};$$

$$\operatorname{tg}3\omega = \operatorname{tg}(\omega+2\omega) = \operatorname{tg}\omega\,\frac{3-\operatorname{tg}^2\omega}{1-3\operatorname{tg}^2\omega} =$$

$$tg\omega\,\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\omega}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\omega}\cdot\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\omega}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}\omega}.$$

Jest však

$$\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\omega}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\omega} = \sqrt{3}\,\frac{a^2-c^2}{b^2+a^2-2c^2},$$

$$\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\omega}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}\omega} = \sqrt{3}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2-2b^2}.$$

Dosazením vyjde pro $tg3\omega$ daný výraz (nehledě ku znaménku, které dle povahy úlohy možno libovolně zvoliti).

Úloha 30.

Budiž O střed a r poloměr kruhu opsaného trojúhelníku ABC. Na obvodě kruhu s týmž středem O a o poloměru R zvolme si libovolně bod M. Paty kolmic z tohoto bodu spuštěných na strany trojúhelníka BC, CA, AB buďtež A_1, B_1, C_1. *Jest dokázati, že plocha trojúhelníka* $A_1B_1C_1$ *jest nezávisla na poloze bodu M na kruhu a že jest rovna*

$$\pm\frac{1}{2}(r^2-R^2)\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

kde α, β, γ *jsou úhly trojúhelníka ABC.* r.

Řešení. (Zaslal p. *Boh. Němec*, stud. gymn. na Král. Vinohradech.)

Buďtež ($r\cos A$, $r\sin A$) souřadnice bodu A v pravoúhlé soustavě a podobně buďtež souřadnice bodu B a C ($r\cos B$, $r\sin B$), ($r\cos C$, $r\sin C$). Pak jsou body A, B, C na kruhu s poloměrem r o středu O v počátku souřadnic. Bod M nechť má souřadnice $(R \cos M, R \sin M)$. Známým způsobem vypočteme souřadnice paty kolmice spuštěné z bodu M na přímku BC; dostaneme snadno

$$2x_1 = r(\cos B + \cos C) + R(\cos M - \cos(B + C - M)),$$
$$2y_1 = r(\sin B + \sin C) + R(\sin M - \sin(B + C - M)).$$

Cyklickou záměnou obdržíme souřadnice bodu B_1 (x_2, y_2) a bodu C_1 (x_3, y_3). Dvojnásobná plocha $2\triangle$, trojúhelníka $A_1 B_1 C_1$ jest, jak známo,

$$2\triangle = (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3).$$

Stačí vypočítati pouze jednu závorku z tohoto výrazu, ostatní obdržíme opět cyklickou záměnou; obdržíme pak zcela snadným počtem

$$\begin{aligned} 4(x_1 y_2 - x_2 y_1) = {} & r^2 [\sin(A - B) + \sin(A - C) + \sin(C - B)] \\ & + rR[\sin(-A + B + C - M) - \sin(A - B + C - M)] \\ & + R^2 [\sin(A - B) + \sin(B + C - 2M) - \sin(A + C - 2M)] \end{aligned}$$

a tudíž

$$8\triangle = (R^2 - r^2)[\sin(A - B) + \sin(B - C) + \sin(C - A)].$$

Zvolíme-li si pro vrcholy trojúhelníka označení tak, aby pro úhly A, B, C byly splněny nerovniny

$$O < A < B < C < 2\pi, \quad \text{jest}$$
$$A - B = -2\gamma, \quad B - C = -2\alpha, \quad C - A = -2\beta + 2\pi.$$

Jelikož pak pro úhly trojúhelníka platí, že

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

jest konečně

$$\triangle = -\frac{1}{2}(R^2 - r^2) \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

Tento výsledek nezávisí na úhlu M a jest pro všechny body na kruhu s poloměrem R kolem bodu O opsaném stejný, jakož bylo dokázati.

Výsledek jest kladný, když $R < r$, a záporný, když $R > r$; t. j. když $R < r$, jest čára lomená $A_1 B_1 C_1 A_1$ kolem trojúhelníka $A_1 B_1 C_1$ probíhána ve směru kladném; když $R > r$, ve směru záporném (protivném směru $ABCA$ kolem trojúhelníka ABC).

Jestliže $R = r$, jest plocha $\triangle$ rovna nulle; t. j. body A_1, B_1, C_1 leží na přímce nazvané *Simpsonova* přímka.

Úloha 31.

Budiž M bod na obvodě kruhu opsaného trojúhelníku ABC a nechť značí d_A, d_B, d_C vzdálenosti tohoto bodu od bodů A, B, C; d pak vzdálenost téhož bodu od příslušné Simpsonovy přímky a r poloměr opsaného kruhu. Jest dokázati vztah

$$d = \frac{d_A \cdot d_B \cdot d_C}{4r^2}.$$

Řešení.

Při řešení této úlohy lze s výhodou použiti vzorců v úloze předešle vyvozených. Při tom, jelikož M nachází se na kružnici trojúhelníku ABC opsané, jest klásti $R = r$. Podržíme-li tudíž označení jakož i soustavu souřadnic jako v úloze předcházející, má pata kolmice spuštěné z bodu M na stranu BC souřadnice

$$2x_1 = r[\cos B + \cos C + \cos M - \cos(B + C - M)],$$
$$2y_1 = r[\sin B + \sin C + \sin M - \sin(B + C - M)],$$

a cyklickou záměnou dostáváme souřadnice pro paty druhých kolmic. Z toho dostaneme rovnici přímky procházející patami kolmic, rovnici přímky *Simpsonovy* příslušné ku M snadno ve tvaru

$$x \sin\frac{A + B + C - M}{2} - y \cos\frac{A + B + C - M}{2}$$
$$-r\left[\sin\frac{A + B + C - 3M}{2} + 2\sin\frac{A - M}{2}\sin\frac{B - M}{2}\sin\frac{C - M}{2}\right] = 0.$$

Pro vzdálenost bodu M ($r\cos M$, $r\sin M$) od Simpsonovy přímky plyne ihned z této rovnice

$$d = \pm 2r \sin\frac{A-M}{2} \sin\frac{B-M}{2} \sin\frac{C-M}{2}.$$

Avšak vzdálenost bodu A od M jest, (jak lze vypočísti z příslušného trojúhelníku rovnoramenného),

$$d_A = \pm 2r \sin\frac{A-M}{2};$$

a podobné výrazy platny jsou pro d_B, d_C a lze tudíž výsledek pro d psáti v žádaném tvaru

$$d = \frac{d_A \,.\, d_B \,.\, d_C}{4r^2}.$$

Úloha 32.

Válec $v = 4\,cm$ vysoký, jehož podstava má poloměr $r = 5\,cm$, proměň v přímý kužel o témž povrchu i obsahu.

Prof. *Ant. Sýkora* v Rakovníku.

Řešení. (Zaslal p. *Ant. Šprinc*, stud. gymn. v Olomouci.)

Znamená-li x poloměr podstavy, y výšku kužele, vyjadřují požadavek úlohy rovnice

$$\pi x^2 + \pi x\sqrt{x^2+y^2} = 2\pi r^2 + 2\pi r v,$$
$$\frac{\pi}{3} x^2 y = \pi r^2 v;$$

aneb

$$x\sqrt{x^2+y^2} = 2r(r+v) - x^2,$$
$$x^2 y = 3r^2 v.$$

Vyloučením x dostaneme:

$$y^2 - \frac{4}{3}\frac{(r+v)^2}{v} y + 4r(r+v) = 0.$$

Tato rovnice podává při $r = 5$, $v = 4$:

$$y_1 = 15,\ y_2 = 12.$$

Těmto hodnotám přísluší

$$x_1 = 2\sqrt{5}, \quad x_2 = 5.$$

Úloha 33.

Středem podobnosti dvou daných kruhů (O, OM), (O_1, O_1M_1) *vedený paprsek nechť protíná kruhy tyto v bodech podobně položených* M, M_1. *Rovnoběžka vedená bodem* M_1 *ku* OO_1 *nechť seče kolmici* MQ *s bodu* M *na* OO_1 *spuštěnou v bodu* P. *Jaké jest geometrické místo bodu tohoto?*

Řed. *V. Jeřábek.*

Řešení. (Zaslal p. *Šejna J.*, stud. reálky v Č. Budějovicích.)

Budiž O počátkem pravoúhlé soustavy, OO_1 osou X, A budiž vnějším středem podobnosti. Jsou-li (x, y_1), (x_2, y) souřadnice bodu M, resp. M_1, jsou souřadnice bodu $P(x, y)$. Označme $\overline{OM} = a$, $\overline{O_1M_1} = b$, proměnný úhel

$$\sphericalangle AOM = \sphericalangle AO_1M_1 = \alpha;$$

potom jest

$$\frac{x}{a} = \cos\alpha,$$

$$\frac{y}{b} = \sin\alpha.$$

Vyloučíme-li z těchto dvou rovnic proměnné α, přijdeme k výsledku

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Jest tedy hledané geometrické místo ellipsa poloos a, b.

Sestrojení jednotlivých bodů ellipsy tímto způsobem provedené jest zevšeobecnění známé konstrukce ellipsy z kružnic opsaných nad osami jako průměry.

Úloha 34.

Krajní body M, N průměru kruhu (ω, b) promítají se s daného bodu A na průměr x kolmý ku MN do bodů M_1, N_1. Body těmito vedené rovnoběžky s MN protínají kruh (ω, b) v bodech P, P_1; Q, Q_1. Jaké jest geometrické místo bodů těchto, šine-li se střed ω při daném poloměru b po přímce x?

Řed. *V. Jeřábek.*

Řešení. (Zaslal p. *Šejna Jos*, stud. reálky v Č. Budějovicích.)

Přímku x učiňme osou X, kolmici k ní z bodu A osou Y pravoúhlé soustavy. Bod A mějž souřadnice (a, o), střed šinoucího se kruhu ω (p, o). Rovnice křivky kruhové (ω, b) jest

$$(x-p)^2+y^2=b^2.$$

Přímka MA $(M[p, b], A[a, o])$ určená rovnicí

$$y-b=\frac{b-a}{p}(x-p)$$

protíná osu X v bodě, pro nějž

$$x=\frac{a}{a-b}\cdot p.$$

Body P, P_1 jeví se nám jako průsečíky přímky

$$x=\frac{a}{a-b}\cdot p$$

s kružnicí $(x-p)^2+y^2=b^2$, obdržíme tudíž rovnici hledaného místa, vyloučivše z těchto rovnic proměnnou p.

Tím obdržíme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

z čehož patrno, že žádaným místem geometrickým jest ellipsa poloos a, b.

Touž rovnici bychom obdrželi, kdybychom místo bodu $M(p, b)$, byli v úvahu vzali bod $N(p, -b)$, neboť ve výsledku se vyskýtá jenom b^2; jsou tedy všecky čtyři body P, P_1, Q, Q_1 na ellipse, jejíž rovnici jsme odvodili.

Úloha 35.

Dokázati jest, že trojúhelníky ellipse opsané a mající těžiště ve středu ellipsy mají stejný ploský obsah. Tento ploský obsah jest nejmenší ze všech ploských obsahů trojúhelníků ellipse opsaných tak, že ellipsa jest uvnitř těchto trojúhelníků.

Dr. *M. Haas.*

Řešení. (Zaslal p. *R. Kučera*, stud. reálky v Kutné Hoře.)

Ellipsu, jakož i všecky trojúhelníky jí opsané a mající těžiště v jejím středu můžeme pokládati za pravoúhlý průmět kruhu a trojúhelníků opsaných kolem kruhu o těžišti ve středu kruhu. Ale všecky trojúhelníky, jež mají těžiště ve středu kruhu vepsaného, jsou rovnostranné a mají tudíž vesměs stejný ploský obsah a to ze všech ostatních trojúhelníků kruhu opsaných (tak, že kruh nachází se uvnitř trojúhelníka) obsah nejmenší. Následkem toho, poněvadž poměr ploských obsahů rovnoběžným promítáním se nemění, mají i všechny trojúhelníky ellipse opsané tak, že těžiště nachází se ve středu ellipsy, stejný ploský obsah a to ze všech ostatních trojúhelníků ellipse opsaných (tak, že ellipsa nachází se uvnitř trojúhelníka) obsah nejmenší. Srovnej s řešením třetím úlohy 7.

Úloha 36.

Které křivky zobrazují v pravoúhlé soustavě souřadnic rovnici

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = c,$$

$|c| < 1$.

Dr. *M. Haas.*

Řešení. (Zaslal p. *Arn. Barbořík*, stud. gymn. v Olomouci.)

Odstraníme-li irracionalitu z dané rovnice, obdržíme rovnici

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2c^2 - 2y^2c^2 + 4x^2y^2c^2 + c^4 = 0,$$

aneb

$$(x^2 + y^2 - c^2)^2 = 4x^2y^2(1 - c^2).$$

Odmocníme-li tuto rovnici, obdržíme dvě rovnice

1. $$x^2 - 2xy\sqrt{1 - c^2} + y^2 = c^2$$

2. $$x^2 + 2xy\sqrt{1 - c^2} + y^2 = c^2.$$

Zavedeme-li novou soustavu pravoúhlou X', Y' se stejným počátkem o 45^0 otočenou, obdržíme tyto vzorce transformační:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'),$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y').$$

Dosadíce hodnoty ty do hořejších rovnic, nabýváme

$$1.\quad \frac{x'^2}{1 + \sqrt{1 - c^2}} + \frac{y'^2}{1 - \sqrt{1 - c^2}} = 1$$

a

$$2.\quad \frac{x'^2}{1 - \sqrt{1 - c^2}} + \frac{y'^2}{1 - \sqrt{1 - c^2}} = 1.$$

Zřejmo, že jsou to rovnice dvou shodných ellips, jichž hlavní poloosa $a = 1 + \sqrt{1 - c^2}$, vedlejší poloosa $b = 1 - \sqrt{1 - c^2}$; osy jejich stojí na sobě kolmo.

Zvláštní případy nastávají, je-li $c = 1$; pak přecházejí obě křivky v jedinou kružnici středovou. Je-li $c = 0$, pak přecházejí v přímky o 45^0 odchýlené od osy X a stojící na sobě kolmo.

Správné řešení úloh v tomto ročníku obsažených zaslali pp.:

Babor Josef, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 1. až 11., 17., 21., 26., 30. až 34.

Barbořík Arnošt, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 15. 17., 20. až 23., 25., 26., 28. až 36.

Bartůněk Arnošt, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 2. až 7., 13. až 15., 21., 25., 26., 32.

Beck Emil, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 7., 9. až 15., 17., 20. až 23., 25., 26., 32. až 35.

Bochořák Jaroslav, stud. VI. tř. r. v Kroměříži, úl. 1. až 4., 6., 32.

Čaloud Václav, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 2., 6., 13., 26., 32., 33.

Čapek František, stud. VII. tř. g. ve Valašském Meziříčí, úl. 1. až 3., 6., 12. až 14., 32.

Čech Břetislav, stud. VI. tř. r. v Novém Městě, úl. 1. až 7., 11., 13., 26.

Číhalík Emilian, stud. VI. tř. r. v Hodoníně, úl. 1. až 4., 10., 13., 32.

Dienel Josef, stud. VI. tř. r. v Rakovníce, úl. 1., 2., 13., 32.

Doležel Václav, stud. VI. tř. I. g. v Brně, úl. 1. až 4., 6., 12., 13., 21., 25., 26., 32.

Haklová Vlasta, stud. V. tř. g. ve Slaném, úl. 1., 2., 4., 6., 21., 26., 32.

Halavanja Pavel, , stud. VI. tř. r. v Brně, úl. 4., 6., 11.

Hlaváček Jan, stud. VI. tř. r. v Jičíně, úl. 4., 6., 26., 32.

Hraše Josef, stud. VI. tř. g. v Praze III., úl. 2. až 4., 6., 13., 32., 33.

Holub Karel, stud. VII. tř. g. v Praze v Truhlářské ul., úl. 2., 4., 13., 26., 32.

Hruban Jaroslav, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 17., 20. až 36.

Hruška Václav, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1. až 4., 6., 10., 12., 14,, 26., 32.

Janoušek Jan, stud. VIII. tř. g. ve Strážnici, úl. 1. až 4., 6., 7., 10. až 21,, 24. až 26., 32. až 34.

Jelínek František, stud. VI. tř. g. v Praze (Křemencová ul.), úl. 4.

Kladivo Bohumil, stud. VI. tř. I. g. v Brně, úl. 1. až 18., 20., 21., 23., 25. až 36.

Klier Eman., stud. VII. tř. r. v Plzni, úl. 1., 2., 4., 6., 7., 10. až 13., 15., 21., 25., 26.

Kofránek Karel, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 1. až 4., 6., 9. až 16., 22., 25,, 26., 32. až 34.

Kovář Jan, stud. VII. tř. g. v Benešově, úl. 2. až 4., 6., 13., 32.

Kratochvíl Antonín, stud. VII. tř. r. v Praze-III., úl. 1. až 4. 6., 9. až 15., 18., 23.

Kružík Josef, stud. VII. tř. I. g. v Brně, úl. 1., 2., 6., 13., 26., 32.

Křížek Josef Tom., stud. VI. tř. r. v Hoře Kutné, úl. 1. až 4., 6. až 8., 10. až 13., 20., 26., 28., 32., 34., 35.

Kubíček Jindřich, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1., 2., 6., 13., 32., 33.

Kučera Rudolf, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 1. až 4., 6., 7., 9. až 13., 21., 25., 26., 28., 32. až 36.

Kudláček František, stud. VI. tř. g. v Třebíči, úl. 32.

Lavický Antonín, stud. VI. tř. g. v Třebíči, úl. 4., 6., 11., 26., 31., 32.

Lepšík Karel, stud. VIII. tř. g. v Chrudimi, úl. 1., 4., 6.

Mareda Jar., stud. Vb. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 4., 32.

Melichar Václav, stud. VII. tř. g. v Rychnově, úl. 4., 6, 13., 25., 32,

Míchal Bohumil, stud. VII. tř. r. v Novém Městě n. M., úl. 1. až 7., 9. až 14., 26., 30. až 34.

Navrátil František, stud. VI. tř. r. v Hodoníně, úl. 3., 4., 10., 13., 32.

Nekula Ludvík, stud. VIIa. tř. I. g. v Brně, úl. 1. až 3., 13., 26., 32.

Němec Bohuslav, stud. VIII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 1. až 11., 13. až 18., 20., 21., 23. až 36.

Papřok Josef, stud. VIII. tř. g. v Místku, úl. 1. až 18., 20. až 22,, 25. až 36.

Paradeiser Ludvík, stud. VII. tř. r. v Hodoníně, úl. 1. až 4., 6. až 15.

Pik Otto, stud. V. tř. g. v Hradci Králové, úl. 1. až 14., 22., 26., 31. až 36.

Polášek Josef, stud. V. tř. g. ve Strážnici, úl. 2., 4., 32.

Raus František, stud. gymn. v Pelhřimově, úl. 1. až 7., 9., 10., 12. až 16., 21., 25., 26., 28., 31. až 36.

Regentík Miroš, stud. VIIIa. tř. g. v Kroměříži, úl. 1., 2., 5. až 7., 12. až 14., 19., 26., 32., 35., 36.

Rychlíková Jana v Praze II., úl. 1. až 36.

Říha Jan, stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 1., 2., 4., 13., 26., 32.

Schindler Antonín, stud. VIb. tř. r. v Plzni, úl. 1., 2., 6., 13., 32.

Schmied Vilém, bohoslovec v Olomouci, úl. 1. až 4., 11., 13.

Scholz Otto, stud. VI. tř. g. ve Vyškově, úl. 32.

Schubert Mil., stud. V. tř. r. na Žižkově, úl. 4., 9. až 11., 26., 32.

Ščerba Josef, stud. VI. tř. g. v Místku, úl. 1., 2., 6., 32.

Sedlo Jindřich, stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 1. až 6., 10. až 13., 15.

Seifert Mil, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 1. až 7., 10., 11., 13. až 15., 17., 20, 21., 25. až 28., 30. až 36.

Simandl Václav, stud. VII. tř. g. v Mladé Boleslavi, úl. 1. až 7., 9. až 16., 31. až 34.

Snížek Bohumil, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 1. až 7., 9. až 12., 19., 26., 27., 32., 33., 35.

Sova Eman., stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 1. až 4., 6., 7., 10., 12., 13., 26., 32.

Sova František, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1. až 3., 12. až 14., 32.

Sovík Jaroslav, stud. VIII. tř. g. v Přerově, úl. 4., 6., 7.

Spáčil Josef, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 4., 6., 13., 21., 32.

Stempel Bohuslav, stud. r. v Praze II., úl. 1. až 7., 10., 12. až 16., 21. až 23., 25., 26., 32. až 36.

Šejna Josef, stud. VII. tř. r. v Č. Budějovicích, úl. 1. až 7., 9. až 15., 25., 26., 32. až 35.

Šprinc Antonín, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 4., 6., 7., 13. až 15., 21., 22., 25., 26., 32.

Šrom Josef, stud. VIb. tř. r. v Kroměříži, úl. 3., 4., 6., 13., 15., 25., 32.

Trkal Viktor, stud. VII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 1. až 36.

Tuček Karel, stud. VII. tř. r. v Mladé Boleslavi, úl. 1., 2., 4., 6., 13., 32.

Veber Bohumil, stud. VIII. tř. g. v Kolíně, úl. 1. až 4., 6., 7., 9., 12. až 15., 25., 32., 35.

Večeř Miloš, stud. Vb. tř. r. v Žižkově, úl. 4., 5., 11.

Viklický Jan, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 1. až 7., 9. až 11., 13., 15., 16., 22., 23., 25., 26., 28., 31. až 36.

Záleský Ed., stud. VII. tř. r. v Plzni, úl. 4., 5., 10., 13.

Zelený Jan, stud. VI. tř. r. v Novém Městě, úl. 1. až 4., 6., 13.

Zeman Ladislav, stud. VIIa. tř. I. g. v Brně, úl. 1., 2., 6., 26., 32., 33.

Žáček Augustin, stud. gymn. v Budějovicích, úl. 1. až 16., 19. až 22., 25., 26., 32. až 36.

Živanský Vladimír, stud. VIb. tř. I. g. v Brně, úl. 1. až 18., 20., 21., 23. až 36.

Ceny udělené za řešení úloh.

Redakce „Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky“ přisoudila těmto řešitelům ceny vypsané výborem „Jednoty českých mathematiků“.

I. Ceny první.

1. *Barbořík Arnošt,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
2. *Hruban Jaroslav*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
3. *Kladivo Bohumil*, stud. VI. tř. I. g. v Brně.
4. *Němec Bohuslav,* stud. VIII. tř. g. na Král. Vinohradech.
5. *Papřok Josef,* stud. VIII. tř. g. v Místku.
6. *Rychlíková Jana* v Praze-II.
7. *Seifert Mil.*, stud. VII. tř. r. v Karlíně.
8. *Trkal Viktor*, stud. VII. tř. g. ve Vys. Mýtě.
9. *Žáček Augustin,* stud. g. v Budějovicích.
10. *Živanský Vladimír,* stud. VIb. tř. I. g. v Brně.

II. Ceny druhé.

1. *Babor Josef,* stud. VII. tř. r. v Písku.
2. *Beck Emil*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
3. *Janoušek Jan*, stud. VIII. tř. g. ve Strážnici.
4. *Kofránek Karel*, stud. VIII. tř. g. v Třebíči.
5. *Kratochvíl Antonín*, stud. VII. tř. r. v Praze-III.
6. *Křížek Josef Tom.*, stud. VI. tř. r. v Hoře Kutné.
7. *Kučera Rudolf*, stud. VII. tř. r. v Hoře Kutné.
8. *Míchal Bohumil*, stud. VII. tř. r. v Novém Městě n. M.
9. *Pik Otto,* stud. V. tř. g. v Hradci Králové.
10. *Raus František*, stud. gymn. v Pelhřimově.
11. *Simandl Václav,* stud. VII. tř. g. v Ml. Boleslavi.
12. *Snížek Bohumil,* stud. VII. tř. r. v Hoře Kutné.
13. *Stempel Bohuslav,* stud. r. v Praze-II.

14. *Šejna Josef*, stud. VII. tř. r. v Č. Budějovicích.
15. *Viklický Jan*, stud. VIII. tř. g. v Třebíči.

III. Ceny třetí.

1. *Bartůněk Arnošt*, stud. VII. tř. g. v Olomouci.
2. *Čapek František*, stud. VII. tř. g. ve Valašském Meziříčí.
3. *Čech Břetislav*, stud. VI. tř. r. v Novém Městě.
4. *Čihalík Emilian*, stud. VI. tř. r. v Hodoníně.
5. *Doležel Václav*, stud. VI. tř. I. g. v Brně.
6. *Haklová Vlasta*, stud. V. tř. g. ve Slaném.
7. *Hraše Josef*, stud. VI. tř. g. v Praze-III.
8. *Hruška Václav*, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech.
9. *Klier Eman.*, stud. VII. tř. r. v Plzni.
10. *Paradeiser Ludvík*, stud. VII. tř. r. v Hodoníně.
11. *Regentík Miroš*, stud. VIIIa. tř. g. v Kroměříži.
12. *Schubert Mil.*, stud. V. tř. r. na Žižkově.
13. *Sedlo Jindřich*, stud. VI. tř. r. v Plzni.
14. *Sova Eman.*, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře.
15. *Sova František*, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí.
16. *Spáčil Josef*, stud. VII. tř. g. v Olomouci.
17. *Šprinc Antonín*, stud. VII. tř. g. v Olomouci.
18. *Šrom Josef*, stud. VIb. tř. r. v Kroměříži.
19. *Veber Bohumil*, stud. VIII. tř. g. v Kolíně.
20. *Zelený Jan*, stud. VI. tř. r. v Novém Městě.