

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jan Vojtěch

Theorie geometrických konstrukcí. [IV.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 31 (1902), No. 5, 441--459

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122176>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1902

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Theorie geometrických konstrukcí.

Napsal

Jan Vojtěch v Praze.

(Dokončení.)

25. *H*) Zbývá konečně pojednati o případu, kdy při konstrukcích geometrických máme k dispozici *pouze kružítka obyčejné*, ovšem s rameny pohyblivými. Takovou geometrii kružítka podal poprvé a úplně L. Mascheroni ve spise „*La geometria del compasso*“, vyšlém v Pavii roku 1797.²²⁾ Prováděti konstrukce pouhým kružítkem je velmi výhodno. — Dílo Mascheroniovo nazývá Chasles „zvláštním a výborným“. Mascheroni byl ku své práci zvlášť povzbuzen popisem, jak slavný anglický mechanik G. Graham dělil veliké přístroje pro hvězdárnu Greenwichskou pouze pomocí kružítka. O předmět práce Mascheroniovoy zajímal se také Bonaparte, jenž v Itálii s Mascheronim se seznámil; po míru v Campo Formio vrátil se vítězný Napoleon do Francie a chtěl také ve vědecké věci jednou imponovati, zjednal si příležitost, aby v učeném shromáždění novou tu geometrickou hádanku přednesl a řešil. Jaký dojem vzbudil, vidíme ze slov Laplaceových: „*Nous attendions tout de vous, général, excepté des leçons de mathématiques!*“ —

Konstrukce, které Mascheroni podává, jsou sice dosti jednoduché, ale mnohdy tak umělkované, že vzniká u čtenáře oprávně-

²²⁾ Francouzský překlad pořídil *Carette* (1798 a 1828), německý *Gruson* (*Gebrauch des Zirkels*, Berlín, 1825). Původní dílo jest však dosti obtížné ku čtení; výtah podal *Ed. Hult*, *Die Mascheronischen Constructionen*, Halle, 1880. Také *Frischauf*, *Die geometrischen Constructionen von L. Mascheroni und J. Steiner*, Graz, 1869. Nejnověji vyšlo nové vydání spisu Mascheroniova od G. Fazzariho, Palermo, 1901.

něné přání, aby tato sestrojění neb jim podobná byla vyvozena z jednotné myšlenky základní. To učinil A. Adler²³⁾ a sice na základě inverse; podává zároveň důkaz toho, že všechny obvyklé konstrukce lze provést jediným kružítkem, což Mascheroni opomenul.

Podáme nejprve stručný obsah článku Adlerova, načež si všimneme ještě díla Mascheroniho. Pravíme, jak známo: Dva body M a M' jsou sobě vzhledem ke kružnici K přiřazeny dle principu reciprokových průvodičů, platí-li relace $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = r^2$, při čemž jest r radius a O střed kružnice K . Body M a M' jsou, jak také říkáme, inverzní. — Je-li M dán, sestrojujeme bod M' obvykle jako průsečík spojnice OM a poláry bodu M vzhledem ku K .

Pro náš účel je však nutno nalézt bod M' pouze pomocí kružítky; konstrukce taková je velmi jednoduchá. Kružnici K protneme kružnicí středu M poloměru \overline{MO} v bodech S_1 a S_2 ; kružnice středu S_1 resp. S_2 poloměru $\overline{S_1O} = \overline{S_2O}$ protnou se v bodě M' (inverzním vůči M). [Neboť $\triangle MOS_1 \sim \triangle S_1OM'$, pročež $\overline{OM} : \overline{S_1O} = \overline{S_1O} : \overline{OM'}$ čili $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \overline{S_1O}^2$]. Na této konstrukci inverzního bodu spočívá vše. Leží-li bod M vně K , lze této konstrukce vždy užití; leží-li však M uvnitř K , je možno upotřebiti tohoto sestrojění jen dokud vzdálenost MO je větší než poloviční poloměr kružnice K . Jak v opačném případě si pomáháme, bude později uvedeno. Věty platné o inverzních obrazcích (přímkách, kružnicích) viz v odst. 10. d).

Všeobecný pak důkaz, že každá geometrická úloha elementární je řešitelná pouhým kružítkem, jest docela stručný: Každá geom. konstrukce elementární, jež při neomezeném užívání pravítka a kružítky byla vskutku provedena, jest obrazec O , který sestává z přímků a oblouků kruhových. Myslíme-li si nyní v rovině obrazec O' , inverzní vůči O vzhledem k pevné kružnici K , sestává tento O' jenom z kružnic, může tedy býti sestrojeno pouhým kružítkem. Poněvadž pak od jistého bodu k jeho inverznímu lze přejíti pouhým kružítkem, jak bylo ukázáno, jest tím

²³⁾ A. Adler, Zur Theorie der Mascheronischen Constructionen ve Zprávách vídeňské akademie věd, 1890.

podán obecný důkaz našeho tvrzení ; zároveň však podán postup řešení.

Máme-li totiž řešiti geom. úlohu pouze kružtkem, myslíme si ji nejprve řešenu obyčejnou cestou, čímž obdržíme v mysli obrazec O , sestávající z přímek a kružnic. Nyní narýsuje přiměřeně základní kružnici K , potom obrazec O' inverzní k O a konečně k výsledku tak obdrženému inverzní ; tím dostaneme vlastní obrazec hledaný.

Provádějíce geom. úlohy touto methodou přicházíme často na některé konstrukce základní, které zde také buďtež podány.

1. Úsečku \overline{AB} , danou koncovými body, zdvojití (znásobiti vůbec). — Opíšme kružnici středu B poloměru AB a vepíšme do ní pravidelný šestiúhelník ; tím dostaneme už hledaný bod C jako bod na kružnici, protějšší bodu A . [Mascheroni].

2. Přímka P dána pouze dvěma svými body A a B . Jest nalézti bod N' , ležící symmetricky vůči danému bodu N vzhledem k P jako ose symetrie. — Z bodů A a B jako středů opíšme kružnice, jež by šly bodem N ; jejich druhý průsečík je bod N' . [Mascheroni].

3. Nalézti průsečky vyrýsované kružnice K o středu O a přímky P , dána-li tato pouze dvěma svými body A a B a nejde-li mimo to P středem O kružnice K . — Určeme bod O' ležící symmetricky vůči O vzhledem k přímce P ; opíšme-li pak z O' kružnici poloměru takového, jaký má kružnice K , protne tato kružnici danou v hledaných bodech. [Mascheroni].

4. Jest určiti střed S kružnice Q' , jež jest přiřazena přímce Q vzhledem ke kružnici K dle principu reciprokých průvodičů. — Najdeme předně bod S' , souměrný s O vzhledem ku Q ; body S' a S jsou pak sobě vzhledem ke K přiřazeny, i nalezneme S z S' známou již cestou. Potom snadno sestrojíme kružnici Q' . [Adler].

5. Jest sestrojiti střed S_1 kružnice K_1 , která odpovídá kružnici K_2 vzhledem ku K dle principu recipr. průvodičů. — Najdeme napřed bod O' , inverzní vůči bodu O , středu to kružnice K , vzhledem ku K_2 ; hledaný bod S_1 jest pak inverzním bodem bodu O' vzhledem ku K . [Adler].

6. K bodu M ležícímu uvnitř kružnice K nalézti inverzní

bod M' . — Je-li vzdálenost daného bodu M od středu O kružnice K větší než poloviční poloměr kružnice K , můžeme užiti základní konstrukce uvedené na počátku. Je-li však \overline{OM} menší než poloviční onen poloměr, znásobme nejprve \overline{OM} tolikrát (n -krát), až obdržíme bod Q , jehož vzdálenost od O je větší než poloviční poloměr; ku Q sestrojíme nyní korrespondující bod Q' dle zmíněného udání; hledaný bod M' jest pak od O v n -krát větší vzdálenosti než Q' . [Adler].

7. Délku \overline{AB} rozdělití v n stejných dílů. Nanesme nejprve délku \overline{AB} n -krát za sebou, čímž obdržíme jako koncový bod M ; vyhledáme-li nyní bod M' přiřazený bodu M vzhledem ke kružnici o středu A a poloměru \overline{AB} , jest $\overline{AM'} = \frac{1}{n} \cdot \overline{AB}$. [Mascheroni-Adler.]

Uvedené konstrukce usnadní nám velmi řešení všech geom. úloh pouhým kružítkem.

Můžeme konečně, jak podotýká Adler, k řešení všech geom. úloh konstruktivních pouhým kružítkem nastoupiti ještě jinou cestu. Vyjděme od konstrukcí Steinerových, prováděných pouhým pravítkem při dané vyrýsované kružnici. Myslíme-li si geometrickou úlohu řešenu tímto Steinerovým způsobem, vznikne obrazec O , jenž — nehledě k pevné kružnici — sestává ze samých přímek; sestrojíme-li k O obrazec O' , přiřazený jemu dle principu reciprokových průvodičů vzhledem k oné pevné kružnici, sestává obrazec tento O' z kružnic, jež vesměs procházejí středem pevné kružnice. Lze tedy O' a — jakož bylo dokázáno — i přechodní konstrukce od O' k O provésti kružítkem. Kružnice sestojené v této přechodní konstrukci jdou rovněž středem oné kružnice.

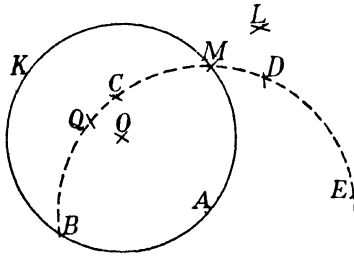
Metoda posledně uvedená je sice delší než předcházející, ale důležitá z jiného hlediska. Neboť poznáváme, že nejen lze, jak Mascheroni ukázal, všechny geometrické konstrukce prováděti pouhým kružítkem, nýbrž že můžeme jíti dále a přiřipojiti ještě podmínku, aby všechny při konstrukci se vyskytující kružnice, vyjímaje jedinou, procházely jedním a týmž, libovolným bodem. — Podobně bychom mohli stanoviti jinou podmínku pro konstrukce kružítkové.

Vraťme se ještě k spisu Mascheroniho. Obsahuje 12 oddílů, z nichž první podává úvodní poznámky, poslední pak řešení přibližná. Z 2. oddílu „O dělení kružnice a oblouků kruhových“ uvádíme:

a) Rozdělit kružnici ve 4 stejné díly,

b) v pět stejných dílů. — Řešení je toto: a) Rozdělme polokružnici ve 3 díly poloměrem daného kruhu: dostaneme postupně body B, C, D, E . Poloměrem BD opišme z bodu B a z E oblouky, čímž obdržíme průsečík H ; je-li O střed kruhu, jest OH strana čtverce vepsaného ($BFEH$).

b) Viz před. řešení. Poloměrem BO opišme z F (F leží uprostřed mezi C a D na dělené polokružnici) oblouky, čímž dostaneme na základní kružnici body M a N . Poloměrem OH opišme z N a M oblouky, i dostaneme průsečík P (uvnitř kruhu). Délka BP je hledaná strana pětiúhelníka vepsaného.



Obr. 20.

Z 10. dílu „O středech“ budiž reprodukováno řešení úkolu: Naléztí střed dané kružnice.

Zvolme (obr. 20.) na K lib. bod A a opišme lib. poloměrem BA polokružnici, která protne K mimo bod B ještě v M ; na tuto půlkružnici nanese $BC = CD = DE = AB$. (E tedy je bod diametrálně ležící proti B). Z E a A opišme poloměrem EM oblouky, čímž dostaneme bod L . Z L opišme týmž poloměrem oblouk, čímž obdržíme bod Q na polokružnici; konečně z bodů B a A opišme poloměrem BQ oblouky, které se sekou v hledaném středu O . (Důkaz provede si čtenář bez obtíží.)

V 11. oddílu „Různé úlohy“ řešen na př. úkol: „Do kružnice, jejíž poloměr je dán, vepsati 3 kružnice, jež by se jí

a sebe vespolek dotýkaly.“ Konstrukce tu podaná je hodně složitá a hledaná.

Jako konstrukce Steinerovy hodí se inženýrům, tak Mascheroniovy zase jsou prospěšné pro mechaniky.

26. *Tím vyčerpali jsme všech osm pomůcek obvyklých*, uvedených v předu. Každou pomůcku brali jsme samu o sobě; nebylo-li možno jí jedinou provést všechny konstrukce, přijímali jsme na pomoc druhou z ostatních. Že ovšem kombinováním pomůcek, které jednotlivě samy stačí k provedení všech obvyklých úloh geometrických, dojde se nových konstrukcí značně zjednodušených, je samozřejmo. Pokud se tím zvýší jednoduchost a přesnost určitých konstrukcí a které konstrukce jakými pomůckami prováděné jsou pak nejjednodušší a nejpřesnější, bylo by zajímavo vyšetřiti a nebylo by bez praktického užitku. — Často zmíněné kombinace skutečně činíme, ovšem nesoustavně; máme obvykle k ruce pravítko, kterým lze po případě i měřiti, nebo dvě pravítka, máme kružítko, trojúhelníkové pravítko s pravým i ostrým úhlem a pod.

27. Vedle pomůcek, o nichž jednáno, jsou ovšem ještě jiné, méně rozšířené nebo novější. Zmiňujeme se v tom ohledu o jednoduchém způsobu, dle kterého konstrukce provádějí se zahýbáním papíru a jako pomůcky jsou připuštěny pouze nožik, jímž se papír rozřezuje podél záhybu, a proužek papíru, kterým přenášíme délky. Indický matematik Sundara Row provádí geom. konstrukce tímto způsobem ve spisku „Geometrical exercises in paper folding“²⁴⁾; papír můžeme předpokládati ve tvaru čtverce (z jakéhokoli kusu papíru zjednáme si lehce obdélník a čtverec). Rovnostranný trojúhelník sestrojíme, přeložíme-li čtvercový papír $ABCD$ v půli tak, aby jedna strana padla na protější a druhé dvě se rozpúlily (B ať přijde na A , C na D), rozvineme a potom rohem B zahneme papír v rohu A tak, aby B padl na půlci onu přímku, čímž dostaneme třetí vrchol trojúhelníka (druhé dva jsou A a B). Snadno a podobně zjednáme si osmiúhelník, šestiúhelník atd. Uvedeme zde aspoň jednu konstrukci: Danou úsečku $\overline{AB} = a$ rozděliti dle zlatého řezu. — U čtverce $ABCD$ rozpúlíme záhybem stranu AD v bodě E , učiňme

²⁴⁾ Vyšel v Madrasu 1898 (Addison a Co.)

záhyb v přísmce BE , rozvíňme, položme EA — kol E zahnouce — na BE tak, že roh A vyznačí na BE bod F , rozvíňme a položme konečně BA kol B zahýbajíce na BE ; bod F tam znamenáný určí nám na AB hledáný bod X . [Neboť $\overline{BE} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$,

$\overline{BF} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) = \overline{BX}$]. — Odtud plynou konstrukce pravidelného pětiúhelníka a desetiúhelníka; mezi jiným také libovolný počet bodů ellipsy, cissoidy si můžeme zjednati a pod.²⁵⁾

V praksi užívá se i jiných přístrojů ke konstrukcím, o nichž zde jednati není záhodno; přicházíme tím na pole mechanismů.

III. Konstrukce vyšší. O jednoduchosti a přesnosti konstrukcí geometrických.

28. V předešlém oddílu pojednáno o geometrických konstrukcích elementárních, theoreticky přesných; upuštěno bylo od podmínky týkající se pomůcek, která spolu s dvěma právě citovanými byla postavena v čelo článku. Nyní půjdeme dále: emancipujeme se od podmínky, aby geom. úloha konstruktivní byla elementární. Při tom nemůžeme, jak pochopitelně, trvati při podmínce druhé, vypuštěné v oddílu II.; neboť geometrické konstrukce třetího a vyšších stupňů nelze prováděti přesně pouhým pravítkem a kružítkem. Platí tedy nyní jen požadavek, aby konstrukce byly theoreticky přesné.

Již zpředu bylo vyloženo, jak určujeme stupeň dané geom. úlohy konstruktivní; problém vyjadřujeme rovnicí, řešíme-li rovnici, je tím řešena zároveň geometrická úloha; ovšem žádáme, aby řešení rovnice dalo se sestrojením. Náš úkol je takto redukován na grafické řešení rovnic.

K informaci o věci odkazujeme na pojednání A. Adlera.²⁶⁾ Všechny metody grafického hledání kořenů rovnice rozřaďuje

²⁵⁾ Ukázký takové podává W. Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, Lipsko, Teubner, 1901. F. Klein podotýká v cit. knize (pozn. 1.), že Wiener současně udal, jak konstruovati sítě pravidelných těles touto methodou.

²⁶⁾ A. Adler, *Graphische Auflösung der Gleichungen* ve výr. zprávě státní reálky v Celovci, 1891.

tam ve 3 kategorie: Do první patří metody, které se snaží nalézt hodnotu funkce $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ pro jisté x a zkusmo pak hledají ono x , pro něž y stane se nullou. Metody této skupiny jsou nezávislé na stupni rovnice. — Do druhé kategorie sluší počítati metody, jež v jistém smyslu přímo postupují, určující kořeny rovnic tím, že rýsují vhodné křivky a jich průsečíkům přiřadují nějakým způsobem čísla; tyto průsečíky dávají nám žádané kořeny. — Úzce souvisí s těmito methodami třetí druh method, při nichž klademe již konstruované tabulky za základ a kořeny rovnice určujeme pak zase z průsečíků křivek.

Omezíme se v následujícím na úlohy stupně 3. a 4., které těmito methodami obzvlášť snadno lze řešiti; vedle toho však nalezneme při úlohách těchto stupňů ještě zvláštní zjednodušení, pomůcky omezeny na minimum, a to právě nás zajímá.

29. *Geometrické úlohy 3. a 4. stupně* vyjádřené rovnicemi byly řešeny již v době nejstarší a sice pomocí křivek. Ryze kubická rovnice byla konstruktivně řešena již od Řeků; ²⁷⁾ podnět k tomu zaval proslulý problém délský (zdvojení krychle). Menaechmos řešil tuto rovnici ($x^3 - a = 0$) pomocí kuželoseček $x^2 = y$ a $y^2 = ax$. Řekové také k vůli řešení vyšších úloh schválně konstruovali vyšší křivky, z nichž budiž uvedena aspoň cissoida Dioklova, konchoida Nikomedova a kvadratrix Dinostratova.

K řešení úloh 3. a 4. stupně jest potřebí vždy dvou kuželoseček, nechceme-li užívatí křivek vyššího stupně. Ve volbě těch křivek vládne veliká volnost. Ale ovšem, abychom se vrátili k své věci, kuželosečku obecnou a křivku vyššího stupně nedovedeme konstruovati obvyklými prostředky. Dovedeme sestrojiti pouze libovolný počet bodů žádané křivky, jinak užívá se mechanismu.

Snažme se proto užívání vyšších čar, totiž obecných kuželoseček a čar 3., 4., . . . stupně, redukovati na minimum. Při úlohách 3. a 4. stupně redukce tato byla provedena, a sice doká-

²⁷⁾ Historické poznámky hojnější viz v Cantorové knize a j. na př. Favaro, *Notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni*, Modena, 1879.

zali Kortum²⁸⁾ a Stephen Smith,²⁹⁾ že všechny kubické konstrukce lze provéstí pouhým kružítkem a pravítkem, jakmile v rovině jest vyrýsována pevná kuželosečka (ne však kružnice). Ještě většího zjednodušení dosáhl Fr. London;³⁰⁾ dokázal totiž a vyložil, že všechny konstrukce kubické i bikvadratické lze provéstí pouhým pravítkem, jakmile jest vyrýsována pevná křivka třetího stupně; tato může býti co nejjednodušší. Úvahy Smithovy i Kortumovy a z větší části i Londonovy jsou ryze syntetické; metoda Londonova jest výhodnější.

30. *Smith i Kortum* pojali úlohy 3. a 4. stupně ze stejného hlediska a dospěli k tomu, dokázati, že každý geometrický problém, jenž má 3 neb 4 řešení, může lineární konstrukcí býti redukován na vyhledání průsečíků pevné kuželosečky předem vyrýsované s kružnicí. Methody jejich sice v principu souhlasí, ale liší se v jednotlivostech.

Při methodě Londonově volíme za základ co možná speciální křivku třetího stupně, snadno a jednoduše sestrojitelnou, a pracujeme potom pouhým pravítkem. Takovou křivkou pevnou 3. stupně může býti kterákoli křivka 3. stupně s dvojným bodem; provádění konstrukcí je však zvláště jednoduché, je-li dvojný bod křivky zároveň bodem úvratu. Pro praktické provedení volí London cissoidu jako křivku základní, jednak proto, že velmi jednoduše lze ji konstruovati jak bodově tak i jedním tahem pomocí mechanismu (již od Newtona udaného), jednak že jí přísluší nekonečně vzdálené body kruhové; neboť následkem toho má tutéž přednost jako kružnice při úlohách kvadratických, že totiž dovoluje lineární konstrukci absolutní involuce a tedy i pravých úhlů.

London rozbírá věc takto :

Geometrickou úlohu konstruktivní, při níž se žádá, sestrojiti z jistých daných částí tři resp. čtyři elementy neznámé, nazý-

²⁸⁾ *Kortum*, Ueber geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades. Bonn, 1869.

²⁹⁾ *Smith*, Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques (Annali di matematica, ser. II., tom. 3.).

³⁰⁾ *London*, Die geometrischen Constructionen dritten und vierten Grades, ausgeführt mittelst der geraden Linie und einer festen Curve dritter Ordnung. (Zeitschrift für Math. und Ph., roč. 41., 1896).

váme kubickou resp. bikvadratickou úlohou, je-li vztah mezi danými a hledanými veličinami algebraický, t. j. dá-li se vyjádřiti křivkami a plochami stupně jakkoli vysokého, ale konečného. Pojmáme-li neznámé prvky jako body, lze každou kubickou a bikvadratickou konstrukci analyticky formulovati takto: Homogenní souřadnice x_1, x_2, x_3, x_4 hledaných bodů jsou racionální celistvé funkce parametru λ , jenž má hověti rovnici 3. resp. 4. stupně, takže tedy jest

$$(1) \quad \varrho x_i = \sum_{k=0}^n a_{ik} \lambda^k, \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

kde ϱ je faktorem úměrnosti a λ má vyhovovati rovnici

$$(2) \quad f(\lambda) \equiv a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + a_4 \lambda^4 = 0;$$

problém je kubický nebo bikvadratický podle toho, je-li $a_4 = 0$ nebo ≥ 0 . Koefficienty $a_{ik}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ jsou při tom veličiny sestrojitelné z dat úlohy. Geometricky interpretovány představují rovnice (1) racionální křivku R ; rovnice (2) reprezentuje systém čtyř, resp. tří bodů na křivce R , jichž parametry λ jsou kořeny této rovnice.

Vezměme nejprve v úvahu úlohy bikvadratické ($a_4 \geq 0$) a utvořme rovnici poláry

$$(2) \quad a_0 + \frac{1}{4} a_1 (\lambda + \mu + \nu + \xi) + \frac{1}{6} a_2 (\lambda\mu + \lambda\nu + \lambda\xi + \mu\nu + \mu\xi + \nu\xi) + \frac{1}{4} a_3 (\lambda\mu\nu + \lambda\mu\xi + \lambda\nu\xi + \mu\nu\xi) + a_4 \lambda\mu\nu\xi = 0.$$

Interpretujeme-li proměnné λ, μ, ν, ξ jako body racionální křivky R , jest každý systém bodů $\lambda \mu \nu \xi$, jenž hověti této rovnici poláry, určen jednoznačně kterýmikoli třemi body jeho; každý takový systém čtyř bodů at sluje čtveřina. Existuje ∞^3 čtveřin, jichž souhrn nazýváme bikvadratickou involucí třetí třídy a označujeme I_4^3 . (Viz Emil Weyr, Über Involutionen n^{ten} Grades, k^{ter} Stufe. Sitzungsber. der Wiener Ak. 1879 nebo Aug. Pánek, O životě a působení Emila Weyra. Časopis XXIV.)

Tato involuce I_4^3 je dána koeficienty rovnice (2). Tážeme-li se po čtveřinách, jichž body splývají v jeden jediný, obdržíme je, klademe-li $\lambda = \mu = \nu = \xi$; jsou tedy čtyři, jež jsou

definovány původní rovnicí (2). Tyto čtyři body, z nichž v každém jedna čtveřina involuce I_3^2 je sloučena, nazýváme čtyřnásobnými body involuce I_4^3 ; můžeme tedy každou bikvadratickou úlohu redukovati na problém: Dána jest racionální křivka R a na ní bikvadratická involuce třetí třídy (I_4^3), jest konstruovati pro tuto involuci body čtyřnásobné.

Myslíme-li si body křivky R projektivně vztaženy na body libovolné kuželosečky, odpovídají čtveřinám involuce I_4^3 na R systémy čtyř bodů na K , jež rovněž tvoří involuci I_4^3 ; čtyřnásobným bodům involuce I_4^3 na R odpovídají čtyřnásobné body involuce I_4^3 na K ; těmito jsou tedy také ony spolu nalezeny. Avšak čtyři ony body involuce I_4^3 na kuželosečce K lze vyznačiti kuželosečkou K' , pomocí I_4^3 lineárně sestrojitelnou. Každá konstrukce 4. stupně dá se tedy redukovati na konstrukci čtyř průsečíků dvou daných kuželoseček, což už Descartes uvádí ve své geometrii. — Tyto čtyři průsečíky dostaneme však, jak bezprostředně seznáváme, kvadratickými konstrukcemi, dovedeme-li sestrojiti společný polární trojúhelník obou kuželoseček, toto pak vyžaduje konstrukce kubické. Odtud tedy plyne, že konstrukce stupně čtvrtého lze převésti na konstrukce nižšího stupně.

Máme-li provésti konstrukci kubickou, přejde rovnice (2) v

$$(2') \quad a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 = 0;$$

jest pak konstruovati tři body racionální křivky R dané rovnicemi (1), jejichž parametry jsou kořeny rovnice (2'). Rovnice poláry zní zde:

$$a_0 + \frac{1}{3} a_1 (\lambda + \mu + \nu) + \frac{1}{3} a_2 (\lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda) + a_3\lambda\mu\nu = 0.$$

Každý systém tří bodů (trojina) na R , jehož parametry λ , μ , ν hovějí této rovnici poláry, jest určen jednoznačně kterýmikoli dvěma ze svých bodů. Existuje ∞^2 takových trojin, jichž souhrn nazýváme kubickou involucí druhé třídy a označujeme I_3^2 . Tato I_3^2 je dána koeficienty rovnice (2'). Existují tři trojiny, jichž elementy se sjednocují, a obdržíme je, klademe-li $\lambda = \mu = \nu$; jejich parametry hovějí rovnici (2'). Tři tyto body, trojnásobné body involuce I_3^2 , jsou tedy tři hledané body úlohy kubické, takže přicházíme k tomuto:

Každou kubickou konstrukci lze převést na konstrukci tří trojnásobných bodů racionální křivky R dané involuce I_3^2 . — Myslíme-li si opět body křivky R projektivně vztahy na body kuželosečky K , odpovídají trojinám involuce I_3^2 na R systémy po třech bodech na K , jež rovněž tvoří I_3^2 . Trojnásobným bodům involuce I_3^2 na R odpovídají trojnásobné body involuce I_3^2 na K , těmito jsou proto také ony nalezeny. Avšak tři trojnásobné body involuce I_3^2 na kuželosečce K lze na K vyznačiti kuželosečkou jinou, danou involucí I_3^2 , z níž jeden průsečík s K jest znám. Lze tedy každou konstrukci kubickou redukovati na úlohu:

Je-li ze dvou daných kuželoseček znám jeden průsečík, jest sestrojiti ostatní tři průsečíky.

Obě úlohy: Konstrukce trojnásobných bodů involuce I_3^2 a konstrukce tří ostatních průsečíků dvou kuželoseček jsou tedy ekvivalentní; jest snadno převést jednu na druhou.

Chceme-li nyní pomocí pevné křivky 3. stupně, užívající výhradně jen pravítka, provést konstrukce kubické, musíme řešiti těmito prostředky jednu ze dvou úloh právě uvedených, na něž všechny kubické konstrukce v poslední instanci se redukují.

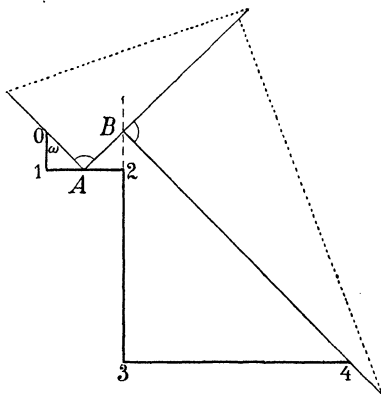
Do další reprodukce rozboru, jímž se dokazuje, že při pevné křivce kubické stačí pravítko na všechny konstrukce kubické i bikvadratické, a také návod ke konstrukcím se podává, nelze se zde pro omezenost místa pouštěti.

Podotýkáme ještě, že ku konci uvádí London praktický způsob, jak řešiti metrické problémy a jak graficky řešiti numerické rovnice kubické; jako příklady pak probírá zmnohonásobení krychle a trisekci úhlu.

31. V předešlém bylo nutno míti vyrýsovanou pevnou kuželosečku obecnou nebo křivku třetího stupně. Ale ani toho není potřebí, *disponujeme-li dvěma nebo několika pravými úhly* (pravoúhlými trojúhelníky). Adler ukázal v citovaném pojednání, že k řešení úlohy 3. stupně stačí 2 pravé úhly. Methodou Lillovou ³¹⁾ lze pak řešiti každou rovnici 3. stupně $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ krátce takto: Narýsujeme soustavu úseček, jednu k druhé kolmo,

³¹⁾ Lill, Résolution des équations etc., Nouvelles Annales, 1860; viz též na př. Šoltn, Grafické řešení rovnic 3. st., Časopis, XV.

01234, jejichž délky po řadě jsou úměrné koeficientům předložené rovnice a kde vždy dvě rovnoběžné strany soustavy jsou stejného nebo různého směru podle toho, zda koeficienty jim odpovídající mají nestejně nebo stejně označení. Je-li nyní $OAB4$ druhá přímka pravouhle lomená, která má s onou stejný počátek a konec $(0, 4)$ a jejíž vrcholy (rohy) A a B leží na stranách $\overline{12}$ a $\overline{23}$ první soustavy, jest již $tg(AO1) = x$ kořen rovnice předložené. — Obrazcem 21. řešena rovnice $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$; nalezeno pravými úhly, že $\omega = 45^\circ$, tedy $tg\omega = x = 1$ (také na druhé dva kořeny snadno přijdeme). K řešení rovnice 3. stupně potřebujeme totiž, když soustava 01234 jest již narýsována, (což lze provésti pouhým pravým úhlem bez kružítko), hledati jen druhou „řešící soustavu“ $OAB4$; to snadno provedeme pomocí dvou pravých úhlů. Stačí k tomu cíli jen dva pravé úhly tak dlouho posouvati a točiti, až přijdou do správné polohy. Tento způsob řešení není ovšem přibližný, nýbrž přesný.



Obr. 21.

32. Ze vzpomenutých už několikrát podmínek, postavených na počátek článku, nevypustili jsme *podmínku theoretické přesnosti*.

Pravíme, že úloha je řešena přibližně, jestliže ani při ideálních pomůckách nedostaneme naznačenou cestou řešení úlohy matematicky přesné nebo vyžaduje-li řešení nekonečného počtu konstrukcí.

Mohlo by se zdáti, že některá řešení v oddílu II., zvl.

řešení prováděná pravítkem dvojhřanným a pravým i ostrým úhlem, jsou jen přibližná. Vezměme na př. úlohu: Na přímce P naléztí bod B tak, aby z toho bodu jevila se úsečka \overline{MN} pod pravým úhlem. Tuto úlohu můžeme řešiti jednoduše tím, že položíme pravý úhel body M a N a že jím tak dlouho posouváme, až současně vrchol jeho přijde na přímku P . Ačkoliv úlohu tu řešíváme obvykle jinak, není uvedený způsob přibližný, neboť při dokonalém pravém úhlu dostali bychom bod B přesně. Že musíme pravým úhlem nějaký čas posouvat, než přijde do žádoucí polohy, nečiní konstrukci přibližnou; neboť i při obyčejném pravítku, máme-li jím na př. vésti přímku dvěma body, musíme pravítkem posouvat, aby přišlo do příslušné polohy.

33. Ku konci proslulého svého spisku¹²⁾ poznamenává J. Steiner: „Zdá se, že celkem dosud ještě příliš málo péče věnováno geometrickým konstrukcím. Od starých nám dochovaný způsob, dle něhož totiž úlohy považujeme za řešené, jakmile dokázáno, jakými prostředky dají se převést na jiné, dříve uvažované, jest velmi na závadu správnému posuzování toho, čeho jejich úplné řešení vyžaduje. Tak se také stává, že často udávají se konstrukce, kterých bychom brzo zanechali, kdybychom byli nuceni vše vskutku a přesně prováděti, co obsahují, poněvadž bychom jistě brzo se přesvědčili, že je něco zcela jiného prováděti konstrukce ve skutečnosti, t. j. s nástroji v ruce, a prováděti je pouze ústy, bych užil toho výrazu.“²²⁾ Lze zcela snadno říci: učiním to a potom to a potom ono; avšak obtíž a v jistých případech nemožnost, skutečně provést konstrukce, jež jsou u vysokém stupni složité, vyžaduje, bychom při dané úloze přísně uvážili, který postup z různých možných při celém provedení je nejjednodušší nebo který za zvláštních okolností je nejúčelnější, a kolik z toho, co jazyk snadno provádí, jest obejítí, záleží-li na tom, abychom si uspořili zbytečnou námahu nebo dosáhli největší přesnosti nebo co možná šetřili předmětu (papíru), na němž rýsuje atd. Záleželo by tedy, jedním slovem, na tom: *vyšetřiti, jakým způsobem každá geometrická úloha dá se — theoreticky nebo prakticky — sestrojiti nejjednodušeji, nejpřesněji*

²²⁾ Stačí tu poukázati na konstrukci kružnice, která by se dotýkala tří daných kružnic, podobných příkladů i ve školním vyučování je dosti.

nebo nejbezpečněji, a sice, který postup je nejúčelnější 1. obecně, 2. který při omezených pomůckách a 3. který při určitých překážkách.“ Některá úloha má na př. při neomezeném užívání kružítka a pravítka celou řadu různých řešení; z těch vybrati by bylo konstrukci nejjednodušší a nejpřesnější.

Uvádíme jako příklad *nejjednodušší konstrukci kolmice na dané přímce*. — Dána-li přímka P a jest na ní vztyčiti kolmici v bodě F , opišme z libovolného bodu O oblouk kruhový, který protne přímku P v bodech A a F . Spojíme-li bod A se středem oblouku O a prodloužíme-li tuto spojnicí za bod O , dostaneme jako průsečík spojnice a oblouku bod G ; přímka GF je hledaná kolmice. Nepotřebujeme celou kružnici kol O , nýbrž jen něco málo přes půlkružnici, abychom našli bod G ; konstrukce je tím přesnější, čím dále od AF bod O volíme. Konstrukce uvedená, která je zvlášť prospěšna v případě, kdy bod F je koncovým bodem přímky, přes nějž nemá nebo nemůže přímka P býti prodloužena, má vskutku přednost před obvyklou, ježto jest při ní potřebí pouze jednou zasaditi kružítko.

Abychom konečně doložili příkladem případ, kdy *konstrukci položeny jsou jisté překážky*, řešme dle Steinerja úlohu: Dán-li některý bod A_1 kružnice a její střed S_1 , jest nalézti libovolný počet jiných bodů této kružnice — předpokládáme-li, že střed S_1 je nepřístupný. Bod S_1 je dán na př. nějakým vysokým předmětem, třeba věží nebo stromem a p., který se nalézá na malém ostrově nebo uprostřed města, takže nelze snadno dospěti k němu se všech stran; jest však viditelný z bodu A_1 a z jiných bodů A, E, B, \dots Žádá se pak vésti kol města nebo vody, která ostrov obtéká, kruhovitou cestu, kanál a pod., jež by měla S_1 za střed a šla daným bodem A_1 . I může jediný muž sám s málo pomůckami nalézti libovolný počet bodů, kterými cesta ona půjde; a sice takto:

Položme bodem A_1 tyč směrem k bodu S_1 ; libovolným bodem A položme jinou tyč BC rovnoběžně k této tak, by $AB = AC$ (A tedy uprostřed, tyč BC ať se může otáčeti kol pevného bodu A). V bodech E a J , v nichž se protínají přímky A_1B a S_1A , resp. přímky A_1C a S_1A , zatkneme tyče. (E a J jsou patrně středy podobnosti kružnic středů S_1 a A a polo-měrů S_1A_1, AB .) Na základě těchto příprav lze pak snadno

naléztí libovolný počet bodů kružnice S_1 ; otočme tyč BAC kol bodu A , i dostaneme body D a F , průsečík přímek EF a DJ , pak přímek ED a FJ jsou body hledané.

34. O část úkolu, který Steiner v citované poznámce vytkl, aby totiž konstrukce skutečně prakticky prováděné byly vyšetřeny co do jednoduchosti a přesnosti, pokusil se *E. Lemoine*³³). Jsou dva druhy jednoduchosti v geometrii: jednoduchost didaktická ve výkladu vědy a jednoduchost konstrukcí. Snaha naše nese se obyčejně k tomu, by docíleno bylo stručnosti ve slovech, bezděky se myslí, že konstrukce bude tím jednodušší, čím kratěji bude pověděna, tomu však tak není. Lemoine první jal se za jistých supposicí studovati jednoduchost druhou, což nazval *géométrographie*. „La géométrographie est l'étude de la simplicité des constructions; elle donne un critère pour comparer deux constructions, critère qui manquait absolument et elle indique des règles pour arriver à construire simplement.“

Každá konstrukce geometrická skládá se z řady jednoduchých výkonů založených na užití pravítka neb kružítká. *Základní výkony* jsou tyto:

a) pravítkem: 1. Přiložití hranu pravítka k danému bodu (operace R_1). Přiložití hranu pravítka k dvěma daným bodům budou dvě takové operace ($2R_1$). 2. Vyrýsovati přímou čáru podle pravítka (op. R_2).

b) kružítkem: 1. Zasaditi špičku kružítká do daného bodu (op. C_1). Odtud soudíme, že „vzítí délku danou do kružítká“ bude $2C_1$. 2. Zasaditi špičku kružítká do libovolného bodu dané čáry (op. C_2). Operace C_1 a C_2 zdají se stejnými, ač jsou rozdíly zde. 3. Vyrýsovati kružnici (operace C_3).

Tato ustanovení dostačí, bychom vyjádřili každou konstrukci geometrie přímkou a kruhu symbolem $op (l_1 R_1 + l_2 R_2 +$

³³) Metodu svou vyložil *É. Lemoine* v mnohých pojednáních. Souvislé úhrnné podání jeho metody nalezneme v článku jeho *La géométrographie etc.* v 6. svazku 2. serie ruského časopisu *fys.-math.* v *Kazani* (1896). Vedle toho na př. nejnověji v *Archiv der Math. und Ph.*, 3. serie 1. sv. (1900); referát o vyšetřováních Lemoinových podán v různých časopisech (též v *Časopise*, XVIII.). Jak se oznamuje, vyšel právě samostatný spisek *Lemoineův*, *Géométrographie ou l'art des constructions géométriques* (ve sbírce *Scientia* u C. Nauda, Paříž, 2 frs).

$l_3C_1 + l_4C_2 + l_5C_3$); R_1 , C_1 a C_2 jsou operace přípravné, R_2 a C_3 jsou operace rýsojící. Úhrnný počet základních výkonů $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5$ nazýváme koeficientem jednoduchosti; počet operací přípravných $l_1 + l_3 + l_4$ pak koeficientem přesnosti.

Supponujeme, že máme jen jedno kružítko, což nás nutí měniti jeho rozevření a vrátiti se někdy znova k délce, která už byla pojata v kružítko; máme jen jedno pravítko obyčejné. Na délku přímky a oblouku při rýsování jich nehledíme.

Na objasnění stůjtež zde tyto příklady:

1. Věsti rovnoběžku $B'C'$ ku přímce BC . — Opišme kružnici libovolnou, jež protne BC v bodech B a C , opišme $B(r)$ [t. j. oblouk z bodu B poloměrem r] a $C(r)$ [r libovolné], dostaneme jako průsečíky první kružnice a těchto body B' a C' . Op. ($2R_1 + R_2 + 2C_1 + 3C_3$). — Jednoduchost: 8, přesnost: 4.

2. Bodem A ležícím mimo přímku BC věsti rovnoběžku AA' k této. — Postup klassický: Opišme kružnici $A(r)$ [r libovolné], jež protne BC v bodě C , opišme $C(r)$, která protne BC v B , vezměme AB do kružítka, opišme $C(\overline{AB})$, která zasáhne $A(r)$ v A' , vedme konečně AA' . Op. ($2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3$). — Jednoduchost: 11, přesnost: 7. — Postup geometrografický: Vyrýsujme kružnici $A(r)$, jež protne BC v B , opišme $B(r)$, která zasáhne BC v C , dále $C(r)$, která zastihne $A(r)$ v A' . Op. ($2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3$). — Jedn.: 9, přesn.: 5.

3. V bodě A dané kružnice věsti tečnu k ní. — Řešení klassické, pozůstávající v tom, že se vede kolmice v bodě A ku poloměru jdoucímu tímto bodem, konstruováno co nejspřívěji. má symbol op. ($6R_1 + 3R_3 + C_1 + C_3$); $j. = 11$, $p. = 7$. — Řešení, které Lemoine uvádí jako nejjednodušší: Opišme $B(\overline{BA})$, B je bod libovolný na kružnici; $B(\overline{BA})$ protne danou kružnici v A' ; opišme $A(\overline{AA'})$, jenž zasáhne $B(\overline{BA})$ v C ; CA je hledaná tečna. Zde op. ($2R_1 + R_2 + 3C_1 + C_2 + 2C_3$); $j. = 9$, $p. = 6$.

Mnohdy řešení geometrografické, to jest řešení nejjednodušší ku konstrukci, dle způsobu Lemoineova vyšetřené a za takové prohlášené, vykazuje překvapující rozdíl koeficientů jednoduchosti a přesnosti proti řešení klassickému.

Proti geometrografii Lemoineově, proti jeho metodě určovati složitost a přesnost konstrukce lze leccos namítati. Lemoine supponuje, že všechny základní operace R_1 , R_2 , C_1 , C_2 a C_3

jsou ekvivalentní, nehledí k tomu, musíme-li rýsovat celou kružnici nebo jen malý oblouk, přesnost nezávisí jen na přípravných výkonech, také na přímkách rýsovaných (jich počtu), z nichž každá je nedokonalá a pod.

35. Jinak byla přesnost konstrukcí geometrických dosud málo vyšetřována. Pokud se týče obvyklých přístrojů našich, jest *kružítko rozhodně přístroj mnohem přesnější než pravítko*. Na to poukázal už Mascheroni v předmluvě ku své geometrii kružítka; praví tam, že i zcela krátké pravítko bývá zřídka v celé své délce přímé a že nejsme mimo to jisti, zda příмка, rýsovaná podél pravítka, je rovnoběžna s hranou jeho, ježto osa rýsojícího hrotu se pohybuje a ne vždy přidržujeme dokonale hrot ten ku hraně pravítka.

Jsou tedy konstrukce prováděné pouhým kružítkem přesnější než jiné. Při tom bylo by nejlépe, kdyby všechny kružnice, jichž je potřeba, měly stejný poloměr, kdybychom tedy mohli celou konstrukci provést kružítkem se stálým rozevřením.

36. Úlohu určití přesnost při každé konstrukci a dle toho pak předložený úkol konstruktivní provést tak, aby pravděpodobná chyba výsledku byla nejmenší, lze konečně řešiti *methodou nejmenších čtverců* asi tak, jak se provádějí podobné úlohy v geodasii. Takové vyšetření geom. úkolů není provedeno; *Chr. Wiener*, který ve své deskriptivní geometrii věci té se dotýká, uvádí pouze několik vět více méně jistých, jež zakládají se na zkušenosti, názoru a odhadu:

1. Příмка jest ve svém celém průběhu tím jistěji určena, čím dále od sebe leží ony dva body, jež ji stanoví.

2. Průsečík dvou přímek jest tím bezpečněji určen, čím blíže při průsečíku leží body, které každou přímkou stanoví.

3. Bod určený jako průsek dvou čar slouží tím bezpečněji k stanovení libovolných přímek, čím více se blíží pravému onen úhel, v němž se čáry ty protínají.

4. Průsečík dvou přímek protínajících se v ostrém úhlu slouží přece bezpečně k stanovení třetí přímky, tvoří-li tato malý úhel s některou ze dvou prvních přímek, na př. leží-li uvnitř ostrého úhlu, jež svírají ony přímky.

5. Kružnice a bod určený nějakou délkou stávají se,

když užíváme obyčejného kružítka, nejistými, je-li rozevření kružítka větší než rameno jeho.

Na základě těchto vět řeší pak Wiener zvl. tyto úlohy:

a) K dané přímce P v daném jejím bodě M vztyčiti kolmici co nejpřesněji.

Nanesme na P délky $MA = MB = \text{asi } \frac{l}{2}$ [$l = \text{délka ramene kružítka}$]. Opišme z A i B oblouky kruhové s poloměry stejnými $= \text{asi } l$, jež se protnou v C ; MC je žádaná kolmice. (K vůli 3. větě musili bychom učiniti $AC = BC = \sqrt{0.5} l = 0.7 l$, v kterémž případě by se oblouky kruhové protínaly v pravém úhlu, k vůli 1. činíme však AC větší, asi $= l$.)

b) Z daného bodu M spustiti kolmici na danou přímku P .

Opišme z M otvorem kružítka rovným l , který však musí býti větší než asi 1.4 vzdálenosti M od P (není-li to možno, je kružítko příliš malé), kružnici, jež protne P v bodech A a B ; opišme z A i B stejným poloměrem, jehož velikost hned ustanovíme, kružnice, které se protnou na druhé straně (vůči M) přímky P v bodě C ; MC je hledaná kolmice. Podle toho, jedná-li se o celou přímku kolmou nebo jen o patu její, učiníme $AC = BC$ ne větší, než jest menší z délek \overline{AB} a l nebo jen málo větší než $\frac{1}{2} \overline{AB}$.

V Praze v lednu r. 1900.

Úlohy.

(Řešení úloh.

Úloha 21.

Do rovnostranného trojúhelníka o straně s vepsány kruhy stejné tak, že se navzájem i stran trojúhelníka dotýkají. Je-li jich při každé straně trojúhelníka n , který jest poloměr kruhů těch a kterou část plochy trojúhelníkové zaujímají? Která jest tato část při lím $n = \infty$?

Stud. fil. Jiří Nerad.