V. Sukdol

Steinerovy elipsy. [I.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 63 (1934), No. 3, R40--R47

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122154`

a libovolného poloměru SP^0 procházející body A, B může býti kolineárně parabole přiřazena: střed kolineace V je opět v průsečíku spojnice MU s kolmicí v N na σ vztyčenou (body M, N jsou koncové body průměru kružnice k v ose y), ježto tato kolmice je spojnice bodu N s úběžným bodem paraboly: $MU \times NU \equiv V$, resp. $MU \times NU \equiv V'$.

Mění-li kružnice k ve svazku polohu, vyplňují body V geometrické místo. Jak vidno, jsou průměty bodů V vždy v bodech M, N. Zvolíme-li na př. na kružnici bod P^0, pak jemu bude odpovídati v kolineaci na parabole bod P, jehož průmět P na ose x obdržíme v průsečíku spojnic NP^0, resp. P^0M. Svazku kružnic k patří kružnice k^0 nad průměrem AB opsaná; tuto seče kružnice l^0 o středu T a poloměru rovném délce tečny TP^0 ortogonálně v bodech E, F, do nichž promítá se bod P z bodů V^0, $V^{0\prime}$, jejichž průměty jsou v bodech M^0, N^0, ve kterých k^0 seče osu y; lze tedy body P_1 jednotlivě rýsovati pomocí pevné kružnice k^0 a proměnlivé kružnice l. Kružnice l tvoří druhý svazek. Kružnice l^0 a bod P určují opět kuželovou plochu ortogonálnou s površkou PP_1 kolmou k σ. Rovina ϱ' jsouc s tečnou rovinou podél površky PP_1 rovnoběžná, seče kuželovou plochu v parabole p', jakožto geom. m. středů kolineací V, které danou parabolu p převádějí ve svazek kružnic k. Obě paraboly jsou shodné, neboť mají společnou osu, týž vrchol U a stejný parametr (do bodů M^0, N^0 promítá se vrchol U z bodů V^0, $V^{0\prime}$ paraboly p', kteréžto body mají dvojnásobnou výšku nad σ jako U; tečny k parabole p' v bodech V^0, $V^{0\prime}$ jsou průsečnicemi roviny ϱ' s rovinami tečnými kuželové plochy podél površek PE, PF, stopy těchto rovin protínají se ale v bodě U). Tedy paraboly jsou shodné o společném vrcholu a o 90^0 otočené, z bodů jedné z nich promítá se druhá do svazků kruhových.

Kdyby roviny ϱ, σ nestály na sobě kolmo a daná elipsa určena byla sdruženými průměry, pak postup řešení by byl týž a přidružené kuželosečky (hyperboly) obdrželi bychom ve průměrech sdružených.

Steinerovy elipsy.

Prof. Dr. *V. Sukdol.*

Rovnice kuželosečky v trimetrických souřadnicích*) zní

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0. \quad (1)$$

Pro převod souřadnic trimetrických na pravoúhlé platí transformační rovnice

*) Viz článek prof. Karla Koutského v *Rozhledech*, roč. II, str. 147.

$$kx_n = x \cos \varphi_n + y \sin \varphi_n - d_n, \quad (n = 1, 2, 3), \tag{2}$$

při čemž

$$\varphi_2 - \varphi_3 = \alpha - 2R, \quad \varphi_3 - \varphi_1 = \beta + 2R, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \gamma - 2R, \tag{3}$$

značí-li α, β, γ úhly základního trojúhelníka.

Dosazením z (2) do (1) obdržíme rovnici dané kuželosečky v souřadnicích pravoúhlých:

$$b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0, \tag{4}$$

kdež

$$Cb_{11} = \Sigma a_{mn} \cos \varphi_m \cos \varphi_n, \tag{5}$$
$$Cb_{12} = \Sigma a_{mn} \sin \varphi_m \cos \varphi_n, \tag{6}$$
$$Cb_{22} = \Sigma a_{mn} \sin \varphi_m \sin \varphi_n, \tag{7}$$
$$Cb_{13} = - \Sigma a_{mn} d_n \cos \varphi_m, \tag{8}$$
$$Cb_{23} = - \Sigma a_{mn} d_n \sin \varphi_m, \tag{9}$$
$$Cb_{33} = \Sigma a_{mn} d_m d_n, \quad (m = 1, 2, 3 \quad n = 1, 2, 3) \tag{10}$$

Při tom sluší pamatovati, že $a_{nm} = a_{mn}$.

Z rovnic (5) až (10) odvodíme tyto tři vztahy mezi koeficienty rovnic (1) a (4):

$$C(b_{11} + b_{22}) = a_{11} + a_{22} + a_{33} - 2a_{23} \cos \alpha - 2a_{13} \cos \beta - 2a_{12} \cos \gamma, \tag{11}$$

$$C^2 . \begin{vmatrix} b_{11}, & b_{12} \\ b_{12}, & b_{22} \end{vmatrix} = A_{11} \sin^2 \alpha + A_{22} \sin^2 \beta + A_{33} \sin^2 \gamma +$$
$$+ 2A_{12} \sin \alpha \sin \beta + 2A_{13} \sin \alpha \sin \gamma + 2A_{23} \sin \beta \sin \gamma, \tag{12}$$

$$C^3 . \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{vmatrix} = 4r^2 D \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma, \tag{13}$$

kdež značí

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

A_{mn} pak minory tohoto determinantu, r poloměr kružnice opsané základnímu trojúhelníku.

Prochází-li kuželosečka vrcholem A (1 : 0 : 0) základního trojúhelníka, jest $a_{11} = 0$; prochází-li vrcholem B (0 : 1 : 0), jest $a_{22} = 0$; prochází-li vrcholem C (0 : 0 : 1), jest $a_{33} = 0$. Je tedy rovnice kuželosečky opsané základnímu trojúhelníku

$$a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 = 0. \tag{14}$$

Je-li přímka $BC \equiv x_1 = 0$ tečnou kuželosečky, jest

$$a_{23}^2 = a_{22}a_{33},$$

je-li $CA \equiv x_2 = 0$ tečnou, jest

$$a_{13}^2 = a_{11}a_{33},$$

a je-li $AB \equiv x_3 = 0$ tečnou, jest

$$a_{12}^2 = a_{11}a_{22}.$$

Je-li tedy kuželosečka (1) vepsána do základního trojúhelníka, platí

$$a_{12}a_{13}a_{23} = \pm\, a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Znaménko musíme voliti —, neboť pro + by rovnice (1) nabyla tvaru

$$\left(\frac{x_1}{a_{23}} + \frac{x_2}{a_{13}} + \frac{x_3}{a_{12}}\right)^2 = 0$$

a značila by kuželosečku degenerovanou. Volíme-li tedy znaménko —, obdržíme rovnici kuželosečky vepsané do základního trojúhelníka

$$c_1^2x_1^2 - 2c_1c_2x_1x_2 + c_2^2x_2^2 - 2c_1c_3x_1x_3 - 2c_2c_3x_2x_3 + c_3^2x_3^2 = 0, \quad (15)$$

kdež jsme položili

$$c_1 = 1/a_{23},\ c_2 = 1/a_{13},\ c_3 = 1/a_{12}.$$

I.

Po pevné přímce p, dané rovnicí

$$lx_1 + mx_2 + nx_3 = 0,$$

pohybuje se bod $P\,(p_1 : p_2 : p_3)$. Spojnice bodu P s vrcholem A

$$p_3x_2 - p_2x_3 = 0$$

protne stranu BC v bodě

$$A'\left(0,\ \frac{2rp_2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{p_2 \sin\beta + p_3 \sin\gamma},\ \frac{2rp_3 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{p_2 \sin\beta + p_3 \sin\gamma}\right).$$

Sestrojme bod A'' souměrný s bodem A' podle středu S' $(0,\ r \sin\gamma \sin\alpha,\ r \sin\alpha \sin\beta)$ strany BC:

$$A''\left(0,\ \frac{2rp_3 \sin\alpha \sin^2\gamma}{p_2 \sin\beta + p_3 \sin\gamma},\ \frac{2rp_2 \sin\alpha \sin^2\beta}{p_2 \sin\beta + p_3 \sin\gamma}\right).$$

Spojnice AA'' pak má rovnici

$$p_2x_2 \sin^2\beta - p_3x_3 \sin^2\gamma = 0. \quad (16)$$

Spojnice bodu P s vrcholem B

$$p_1x_3 - p_3x_1 = 0$$

protne stranu CA v bodě

$$B'\left(\frac{2rp_1 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{p_3 \sin\gamma + p_1 \sin\alpha},\ 0,\ \frac{2rp_3 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{p_3 \sin\gamma + p_1 \sin\alpha}\right).$$

Bod B'' souměrný s bodem B' podle středu S'' $(r \sin\beta \sin\gamma,\ 0,$

$r \sin\alpha \sin\beta$) strany CA má souřadnice

$$B''\left(\frac{2rp_3 \sin\beta \sin^2\gamma}{p_3 \sin\gamma + p_1 \sin\alpha},\ 0,\ \frac{2rp_1 \sin^2\alpha \sin\beta}{p_3 \sin\gamma + p_1 \sin\alpha}\right).$$

Spojnice BB'' má rovnici

$$p_3x_3 \sin^2\gamma - p_1x_1 \sin^2\alpha = 0. \tag{17}$$

Spojnice bodu P s vrcholem C

$$p_2x_1 - p_1x_2 = 0$$

protne stranu AB v bodě

$$C'\left(\frac{2rp_1 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{p_1 \sin\alpha + p_2 \sin\beta},\ \frac{2rp_2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{p_1 \sin\alpha + p_2 \sin\beta},\ 0\right).$$

Bod C'' souměrný s bodem C' podle středu S''' ($r \sin\beta \sin\gamma$, $r \sin\alpha \sin\gamma$, 0) strany AB má souřadnice

$$C''\left(\frac{2rp_2 \sin^2\beta \sin\gamma}{p_1 \sin\alpha + p_2 \sin\beta},\ \frac{2rp_1 \sin^2\alpha \sin\gamma}{p_1 \sin\alpha + p_2 \sin\beta},\ 0\right).$$

Spojnice CC'' má rovnici

$$p_1x_1 \sin^2\alpha - p_2x_2 \sin^2\beta = 0. \tag{18}$$

Poněvadž se determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & p_2 \sin^2\beta & -p_3 \sin^2\gamma \\ -p_1 \sin^2\alpha & 0 & p_3 \sin^2\gamma \\ p_1 \sin^2\alpha & -p_2 \sin^2\beta & 0 \end{vmatrix}$$

identicky rovná nule, procházejí přímky AA'', BB'', CC'' jedním bodem P', jehož souřadnice jsou

$$p'_1 : p'_2 : p'_3 = p_2p_3 \sin^2\beta \sin^2\gamma : p_3p_1 \sin^2\gamma \sin^2\alpha : p_1p_2 \sin^2\alpha \sin^2\beta.$$

Co je geom. místem bodu P', pohybuje-li se bod P po pevné přímce p?

Eliminací p_1, p_2, p_3 z rovnic

$$\begin{aligned} lp_1 + mp_2 + np_3 &= 0, \\ kx_1 &= p_2p_3 \sin^2\beta \sin^2\gamma, \\ kx_2 &= p_3p_1 \sin^2\gamma \sin^2\alpha, \\ kx_3 &= p_1p_2 \sin^2\alpha \sin^2\beta \end{aligned}$$

obdržíme rovnici hledaného geom. místa

$$\frac{n}{\sin^2\gamma} x_1x_2 + \frac{m}{\sin^2\beta} x_1x_3 + \frac{l}{\sin^2\alpha} x_2x_3 = 0. \tag{19}$$

Je to kuželosečka opsaná základnímu trojúhelníku. Ke každé obecné přímce p lze sestrojiti jednu korespondující kuželosečku opsanou trojúhelníku ABC a naopak každé kuželosečce opsané $\triangle\, ABC$

odpovídá určitá přímka p. Na př. přímce úběžné, jejíž rovnice zní

$$x_1 \sin \alpha + x_2 \sin \beta + x_3 \sin \gamma = 0, \tag{20}$$

odpovídá kuželosečka

$$\frac{x_1 x_2}{\sin \gamma} + \frac{x_1 x_3}{\sin \beta} + \frac{x_2 x_3}{\sin \alpha} = 0. \tag{21}$$

Anebo kuželosečce

$$x_1 x_2 \sin \gamma + x_1 x_3 \sin \beta + x_2 x_3 \sin \alpha = 0, \tag{22}$$

t. j. kružnici opsané $\triangle ABC$, odpovídá přímka

$$x_1 \sin^3 \alpha + x_2 \sin^3 \beta + x_3 \sin^3 \gamma = 0. \tag{23}$$

Průsečíky úběžné přímky s kuželosečkou (19) jsou buď dva reálné body různé — hyperbola, nebo splývající — parabola, anebo dva imaginární body — elipsa, podle toho, je-li

$$\left(\frac{l}{\sin \alpha} - \frac{m}{\sin \beta} + \frac{n}{\sin \gamma}\right)^2 \gtreqless \frac{4ln}{\sin \alpha \sin \gamma}. \tag{24}$$

To však je zároveň podmínka, aby přímka p, daná rovnicí

$$l x_1 + m x_2 + n x_3 = 0, \tag{25}$$

příslušná ke kuželosečce (19), protínala kuželosečku (21) buď ve dvou reálných bodech různých nebo splývajících anebo ve dvou bodech imaginárních.

Užijeme-li kriteria (24) na kuželosečku (21), vidíme, že je to elipsa.

Tedy kuželosečka opsaná $\triangle ABC$ je hyperbola, parabola nebo elipsa podle toho, je-li k ní příslušná přímka p sečnou, tečnou nebo nesečnou elipsy (21).

Tato význačná elipsa má ze všech elips opsaných $\triangle ABC$ nejmenší obsah a nazývá se elipsa *Steinerova*. Analytický důkaz tohoto tvrzení provedeme takto:

Transformujme trimetrické souřadnice na pravoúhlé tak, aby rovnice (19) nabyla tvaru

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0. \tag{26}$$

Pro tuto transformaci nabudou vztahy (11), (12) a (13) tvaru

$$C(a^2 + b^2) = -2\left(\frac{l \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{m \cos \beta}{\sin^2 \beta} + \frac{n \cos \gamma}{\sin^2 \gamma}\right), \tag{11'}$$

$$C^2 a^2 b^2 = -\frac{l^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{m^2}{\sin^2 \beta} - \frac{n^2}{\sin^2 \gamma} + 2\frac{lm}{\sin \alpha \sin \beta} + \\ + 2\frac{mn}{\sin \beta \sin \gamma} + 2\frac{nl}{\sin \gamma \sin \alpha}, \tag{12'}$$

$$-C^3 a^4 b^4 = 8r^2 lmn. \tag{13'}$$

Eliminací C z rovnic (12′) a (13′) plyne

$$a^2b^2 = \frac{64r^4l^2m^2n^2}{\left(-\frac{l^2}{\sin^2\alpha}-\frac{m^2}{\sin^2\beta}-\frac{n^2}{\sin^2\gamma}+\frac{2lm}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{2mn}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{2nl}{\sin\gamma\sin\alpha}\right)^3} \tag{27}$$

Položme

$$l = nu^3\sin\alpha,\quad m = nv^3\sin\beta. \tag{28}$$

Pak jest

$$ab = \frac{8r^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\left(-u^4v^{-2}-u^{-2}v^4-\frac{u^{-2}v^{-2}}{\sin^2\gamma}+2uv+\frac{2u^{-2}v}{\sin\gamma}+\frac{2uv^{-2}}{\sin\gamma}\right)^3}. \tag{29}$$

Obsah elipsy $E = \pi ab$ bude tedy minimální, nabude-li maximální hodnoty funkce

$$\mathrm{f}(u, v) = -u^4v^{-2}-u^{-2}v^4-\frac{u^{-2}v^{-2}}{\sin^2\gamma}+2uv+\frac{2u^{-2}v}{\sin\gamma}+\frac{2uv^{-2}}{\sin\gamma}.$$

To nastane, budou-li současně splněny podmínky

$$\frac{\partial\mathrm{f}}{\partial u} = 0,\quad \frac{\partial\mathrm{f}}{\partial v} = 0, \tag{30}$$

$$\frac{\partial^2\mathrm{f}}{\partial u^2} < 0,\quad \frac{\partial^2\mathrm{f}}{\partial v^2} < 0, \tag{31}$$

$$\left(\frac{\partial^2\mathrm{f}}{\partial u\partial v}\right)^2-\frac{\partial^2\mathrm{f}}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial^2\mathrm{f}}{\partial v^2} < 0. \tag{32}$$

Podmínky (30) vedou k rovnicím

$$-4u^6+2v^6+2u^3v^3+2\frac{u^3}{\sin\gamma}-4\frac{v^3}{\sin\gamma}+\frac{2}{\sin^2\gamma} = 0,$$

$$2u^6-4v^6+2u^3v^3-4\frac{u^3}{\sin\gamma}+2\frac{v^3}{\sin\gamma}+\frac{2}{\sin^2\gamma} = 0,$$

z nichž plynou řešení

a) $u^3 = v^3 = 1/\sin\gamma$,
b) $u^3 = 0,\ v^3 = 1/\sin\gamma$,
c) $u^3 = 1/\sin\gamma,\ v^3 = 0$,
d) $u^3 = v^3 = \infty$.

Z těchto řešení vyhovuje podmínkám (31) a (32) jenom řešení *a*). Je tedy podle (28) pro elipsu minimálního obsahu, opsanou $\triangle$ *ABC*,

$$l = \frac{n\sin\alpha}{\sin\gamma},\quad m = \frac{n\sin\beta}{\sin\gamma}, \tag{33}$$

takže rovnice *Steinerovy* elipsy nám vychází

$$\frac{x_1x_2}{\sin\gamma}+\frac{x_1x_3}{\sin\beta}+\frac{x_2x_3}{\sin\alpha}=0$$

a rovnice přímky p, jí příslušné,

$$x_1\sin\alpha+x_2\sin\beta+x_3\sin\gamma=0$$

shodně s (21) a (20).

Střed *Steinerovy* elipsy (21) najdeme, uvážíme-li, že střed kuželosečky je pólem úběžné přímky (20). Polára bodu S $(s_1:s_2:s_3)$ vzhledem k elipse (21) má rovnici

$$(s_2\sin\beta+s_3\sin\gamma)\,x_1\sin\alpha+(s_3\sin\gamma+s_1\sin\alpha)\,x_2\sin\beta+$$
$$+(s_1\sin\alpha+s_2\sin\beta)\,x_3\sin\gamma=0.$$

Má-li býti tato rovnice totožná s rovnicí (20), musí býti

$$s_2\sin\beta+s_3\sin\gamma=s_3\sin\gamma+s_1\sin\alpha=s_1\sin\alpha+s_2\sin\beta,$$

z čehož souřadnice středu elipsy

$$s_1:s_2:s_3=\sin\beta\sin\gamma:\sin\alpha\sin\gamma:\sin\alpha\sin\beta.$$

Ale to jsou souřadnice těžiště základního trojúhelníka.

Má tedy *Steinerova* elipsa opsaná $\triangle\ ABC$ střed v jeho těžišti. Označíme-li levou stranu rovnice (21) $F(x_1, x_2, x_3)$, má průměr sdružený s průměrem

$$h_1x_1+h_2x_2+h_3x_3=0 \tag{34}$$

rovnici

$$\begin{vmatrix}h_2 & h_3\\ \sin\beta & \sin\gamma\end{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x_1}+\begin{vmatrix}h_3 & h_1\\ \sin\gamma & \sin\alpha\end{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x_2}+\begin{vmatrix}h_1 & h_2\\ \sin\alpha & \sin\beta\end{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x_3}=0. \tag{35}$$

Podle toho na př. těžnice příslušná straně BC, daná rovnicí

$$x_2\sin\beta-x_3\sin\gamma=0, \tag{36}$$

má sdružený průměr v elipse (21) daný rovnicí

$$-2x_1\sin\alpha+x_2\sin\beta+x_3\sin\gamma=0. \tag{37}$$

Vidíme, že je to rovnice rovnoběžky s přímkou $x_1=0$, t. j. se stranou BC. Tedy těžnice a rovnoběžka s příslušnou stranou, vedená těžištěm, tvoří pár sdružených průměrů elipsy *Steinerovy*, opsané trojúhelníku.

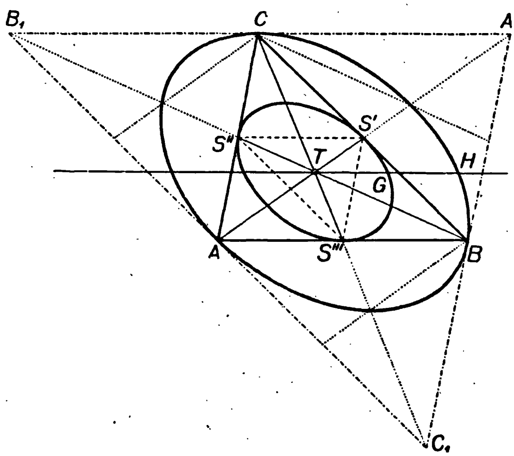
Výpočtem vzdálenosti průsečíku H přímky (37) s elipsou (21) od těžiště T nalezneme délku poloměru $\varrho_1=TH=\dfrac{2r\sin\alpha}{\sqrt{3}}$; délka sdruženého poloměru $\varrho_2=TA=\frac{2}{3}t_a$.

Dosadíme-li do (29) za u, v vypočtené hodnoty, obdržíme pro obsah *Steinerovy* elipsy opsané $\triangle ABC$ hodnotu

$$E = \frac{4\pi\Delta}{3\sqrt{3}},$$

kdež Δ značí obsah $\triangle ABC$.

Z rovnic (11'), (12'), (13') vypočteme dosazením hodnot (33) délky poloos Steinerovy elipsy opsané $\triangle ABC$



$$\cdot \tfrac{1}{3}r\left[\sqrt{2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\sqrt{3}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)}\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sqrt{3}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)}\right]. \quad (38)$$

Lineárná výstřednost pak jest

$$e = \tfrac{2}{9}2r\sqrt{2[(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)^2 - 12\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma]}. \quad (39)$$

Přímka, vedená vrcholem A základního trojúhelníka rovnoběžně s protější stranou BC, má rovnici

$$x_2\sin\beta + x_3\sin\gamma = 0.$$

Snadno se přesvědčíme, že je tato přímka tečnou *Steinerovy* elipsy (21); podobně i rovnoběžky vedené vrcholy B a C k příslušným stranám. Je tedy *Steinerova* elipsa opsaná $\triangle ABC$ vepsána do $\triangle A_1B_1C_1$, jehož strany procházejí vrcholy $\triangle ABC$ rovnoběžně s příslušnými stranami. (Příště dokončení.)