Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Ludovít Frenyo

O Heronových trojuholníkoch. [II.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 63 (1934), No. 3, R29--R31

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122150

ČASŤ STŘEDOŠKOLSKÁ

O Heronových trojuholníkoch.

L'udovít Frenyo, prof., Rimavska Sobota.

(Dokončení.)

II.

Ako si máme zvoliť strany trojuholníka a, b, c, aby nám dal Heronov vzorec rac. číslo?

$$O = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

Napíšme si vzorec takto:

$$4O = \sqrt{[(b+c)^2 - a^2] \, . \, [a^2 - (b-c)^2]}$$

keď je O racionálné, môže sa písať jeho hodnota vo tvare

$$4P = u\,[a^2 - (b-c)^2],$$

kde nám u znamená racionálné číslo pozitívné. Zmocnením oboch strán tejto rovnice dostaneme:

$$(b+c)^2 - a^2 = u^2\,[a^2 - (b-c)^2],$$

z čoho si vypočítame stranu a

$$a = \sqrt{(b-c)^2 + \frac{4bc}{u^2+1}}.$$

Strana a má byť racionálna, preto sa musí rovnať racionálnemu výrazu:

$$a = (b-c) + \frac{2b}{u^2+1} \, . \, x, \tag{I}$$

kde nám x znamená racionálnu hodnotu, čo si napíšeme vo tvare lineárnej funkcie:

$$x = uv - 1. \tag{II}$$

Tu sme zaviedli novú hodnotu premenlivú, ale racionálnu v. Aby a bolo pozitívné, musí byť $uv > 1$.

Podľa toho

$$\sqrt{(b-c)^2 + \frac{4bc}{u^2+1}} = (b-c) + \frac{2b}{u^2+1}(uv-1).$$

Obe strany zmocníme a vypočítame stranu c,

$$c = b \cdot \frac{(uv - 1)(u + v)}{v(u^2 + 1)}. \qquad \text{(III)}$$

Hodnotu c dosadíme do výrazu a pod (I) a ohľadom na (II) dostaneme:

$$a = b \cdot \frac{u(v^2 + 1)}{v(u^2 + 1)}. \qquad \text{(IV)}$$

Z výrazov pod (III) a (IV) vidíme, že si môžeme hodnotu b zvoliť ľubovolne, kým hodnoty a a c sa vypočítajú dľa týchto vzorcov. Tu sú u a v ľubovolné rac. čísla.

Keďže b môže byť číslo ľubovolné, zvolme si ho tak, aby bolo

$$b = u + \frac{1}{u}.$$

Dosadíme to do vzorcov pod (III) a (IV), ale súčasne zkrátime tam sa nachádzajúce zlomky o vu, dostaneme:

$$a = v + \frac{1}{v},$$

$$c = (u + v)\left(1 - \frac{1}{vu}\right) = v - \frac{1}{v} + u - \frac{1}{u}.$$

Tu sme došli ku konečnému výsledku. Keď si zvolíme strany trojuholníka tak, aby boly:

$$a = v + \frac{1}{v},$$

$$b = u + \frac{1}{u},$$

$$c = v - \frac{1}{v} + u - \frac{1}{u},$$

kde sú v a u ľubovolné racionálné čísla ($vu > 1$), vtedy bude aj obsah trojuholníka racionálny.

Veľmi zaujímavé je, že v a u majú svoj geometrický význam. Vypočítajme totiž uhly trojuholníka dľa známych vzorcov:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{s(s - a)}},$$

atď., dostaneme:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1}{u}; \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\beta = \frac{1}{v}; \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{uv - 1}{u + v}.$$

Z tohoto vidíme, ako si máme zvoliť číselné hodnoty pre u a v.

Poznámka. Riešenie tu podané na podklade geometrickom *nezahrňuje v sebe všetky možné rešenia,* ale vyjadruje strany pomerne veľmi jednoduchými výrazmi ako v článku uvedeném na počiatku.

Niektoré špeciálné prípady:

1. Pravoúhly trojuholník dostaneme, keď je:

a) $$u = 1,$$
alebo:
b) $$v = 1,$$
alebo:
c) $$\frac{uv - 1}{u + v} = 1.$$

V tomto poslednom páde bude
$$u = \frac{v + 1}{v - 1}, \quad \text{alebo} \quad v = \frac{u + 1}{u - 1}.$$

2. Rovnoramenný trojuholník dostaneme, keď je:

a) $$u = v,$$
alebo:
b) $$\frac{1}{u} = \frac{uv - 1}{u + v}, \quad \text{teda} \quad v = \frac{2u}{u^2 - 1},$$
c) $$u = \frac{2v}{v^2 - 1}.$$

Obecný príklad číselný:

1. $$u = 2, \quad v = \tfrac{3}{2},$$
$$a = \tfrac{13}{6}, \quad b = \tfrac{5}{2}, \quad c = \tfrac{7}{3}.$$

Tieto strany: $\frac{13}{6}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{3}$, môžeme však v tom istom pomere zväčšiť, alebo zmenšiť. Na pr.: 13, 15, 14, alebo 1,3, 1,5, 1,4.

2. $v = \frac{5}{3}$, $u = \frac{7}{2}$, $a = \frac{34}{15}$, $b = \frac{53}{14}$, $c = \frac{899}{210}$.

Miesto strán: $\frac{34}{15}$, $\frac{53}{14}$, $\frac{899}{210}$ si môžeme zvoliť tiež: 476, 795, 899, alebo: 47,6, 79,5, 89,9 atď.

Niekoľko poznámok k určeniu čísla π.

Š. Swarz, posl. přírod. fakulty v Praze.

V následujúcom chcem poukázať k niekoľkým prípadom, ktoré umožnujú elementárnym spôsobom vyjádriť číslo π nekonečným súčinom, respektíve radami.