Eduard Weyr

Rozbor rovnice druhého stupně o třech proměnných. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 16 (1887), No. 5, 202--208

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122143

Rozbor rovnice druhého stupně o třech proměnných.

Napsal

Eduard Weyr.

(Dokončení.)

§ 11. *Klassifikace centrálných ploch druhého stupně.*

Dle předcházejících úvah lze pro každou centralnou plochu druhého stupně tři pravoúhlé osy souřadné x, y, z tak voliti, že její rovnice zní

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + a_{44} = 0,$$

kde λ_1, λ_2, λ_3 jsou tři realné hodnoty různé od nully; a naopak, každá takováto rovnice repraesentuje centralnou plochu, neboť pro ni jest determinant

$$\Sigma \pm (a_{11} a_{22} a_{33}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \gtrless 0.$$

A. Nechť $a_{44} = 0$; pak jest plocha kuželem, jejíž vrchol jest v počátku O, neboť jeli bod M(x, y, z) na ploše, jest patrně i bod ϱx, ϱy, ϱz na ploše, t. j. každý bod spojnice OM. Jsou-li všecky tři koefficienty téhož znamení, tu se nalézá na ploše jediný realný bod, t. počátek; nejsou-li všecky téhož znamení, lze případnou změnou všech znamení vždy toho docíliti, aby dva koefficienty byly kladné, jeden záporný, na př. $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$. Pišme pak rovnici ve tvaru

$$\frac{\lambda_1}{-\lambda_3} x^2 + \frac{\lambda_2}{-\lambda_3} y^2 = z^2,$$

aneb

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2.$$

Protneme-li kužel rovinou $z = m$, jest průsek dán rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2 m^2} + \frac{y^2}{b^2 m^2} = 1,$$

jest to tedy ellipsa, pročež plocha přímým kuželem nad ellipsou sestrojeným.

Patrně by řez $x =$ stálé, aneb $y =$ stálé se objevil jakožto hyperbola.

B. Nechť $a_{44} \gtrless 0$. Učinivše

$$-\frac{\lambda_1}{a_{44}} = \pm\frac{1}{a^2}, \quad -\frac{\lambda_2}{a_{44}} = \pm\frac{1}{b^2}, \quad -\frac{\lambda_3}{a_{44}} = \pm\frac{1}{c^2},$$

zní rovnice plochy

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Jsou-li všecky tři koefficienty kladné, máme plochu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

která se zove ellipsoidem.

Jsou-li dva kladné a jeden záporný, máme hyperboloid o jednom povrchu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Jsou-li dva záporné a jeden kladný, máme hyperboloid o dvou površích

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Jsou-li konečně všecky koefficienty záporné, máme rovnici

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

které nevyhovuje žádný realný bod.

V případě, kdy všecky tři kořeny λ byly různé jsme seznali, že poloha hlavních os x, y, z byla zcela určena. V případě, kdy se vyskytovaly dva stejné kořeny $\lambda_1 = \lambda_2 \gtrless \lambda_3$ byly osy x, y vázany jen tou podmínkou, by se nalézaly v jisté rovině, třetí osa byla úplně stanovena; jest tu plocha

$$\lambda_1(x^2 + y^2) + \lambda_3 z^2 + a_{44} = 0$$

rotační, při niž osy x a y lze v aequatorialní rovině libovolně voditi, arci kolmo jednu k druhé. V případě tří stejných kořenů jsou každé kolmé osy hlavními, a plocha

$$\lambda_1(x^2+y^2+z^2)+a_{44}=0$$

je kulová aneb — při stejném znamení koefficientů λ_1 a a_{44} — imaginární, neobsahujíc ni jediného realného bodu.

§ 12. *Transformace rovnic ploch necentrálných a jich klassifikace.*

Buď

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+\ldots+a_{44}=0$$

rovnice plochy necentrálné, t. j. supponujme, že

$$A_{44}=\Sigma\pm(a_{11}a_{22}a_{33})=0. \tag{43}$$

Označíme-li součet kvadratických členů literou u, zní daná rovnice

$$u+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0.$$

Utvoříme-li opět kubickou rovnici

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}-\lambda, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0, \tag{44}$$

jest vzhledem ku (43) patrné, že $\lambda=0$ jí vyhovuje, jest tedy jeden její kořen na př. $\lambda_3=0$; ostatní dva buďtež λ_1, λ_2.

Přihlédneme-li k úvahám v §§. 6., 7., 8., 9. a 10. ihned vidíme, že platnosti nikterak nepostrádají tím, že kořeny λ mají hodnotu nullovou. Z toho soudíme, že λ_1 a λ_2 jsou vždy realné, dále že lze vždy ustanoviti tři nové pravoúhlé osy x', y', z' vedené počátkem tak, aby transformací (27)

$$u=\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+0z'^2,$$

tak že transformovaná rovnice plochy zní

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+2a'_{14}x'+2a'_{24}y'+2a'_{34}z'+a_{44}=0, \tag{45}$$

kde hodnoty koefficientů a'_{14}, a'_{24}, a'_{34} dosazením hodnot (27) přímo plynou. Stanovení směrů nových os α, β, γ, α', .. γ'' děje se zde právě tak, jako v citovaných §§. K vůli dalšímu sjednodušení rovnice nutno rozeznávati několik případů.

A. $\lambda_3=0$ jest jednoduchým kořenem rovnice (44), tak že

$$\lambda_1 \gtrless 0, \quad \lambda_2 \gtrless 0.$$

Volme nový system os ξ, η, ζ rovnoběžných s x', y', z' a měj počátek nové soustavy souřadnice

$$x' = p, \quad y' = q, \quad z' = r,$$

tak že

$$x' = \xi + p, \quad y' = \eta + q, \quad z' = \zeta + r.$$

Vloživše toto do rovnice (45) shledáme, že koefficienty při ξ a η resp. jsou

$$2(\lambda_1 p + a'_{14}) \quad \text{a} \quad 2(\lambda_2 q + a'_{24});$$

volíme-li tedy

$$p = -\frac{a'_{14}}{\lambda_1}, \quad q = -\frac{a'_{24}}{\lambda_2},$$

tu ony koefficienty vymizí a transformovaná rovnice zní

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + 2a'_{34}\zeta + 2a'_{34} r + s = 0,$$

kde s značí k vůli stručnosti výraz

$$\lambda_1 p^2 + \lambda_2 q^2 + 2a'_{14} p + 2a'_{24} q + a_{44}.$$

Supponujme, že $a'_{34} \gtrless 0$; pak volme

$$r = -\frac{s}{2a'_{34}},$$

a transformovaná rovnice bude

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + 2a'_{34}\zeta = 0,$$

aneb označíme-li podíly

$$-\frac{\lambda_1}{2a'_{34}}, \quad -\frac{\lambda_2}{2a'_{34}}$$

literami a, b,

$$\zeta = a\xi^2 + b\eta^2.$$

Patrně jsou koefficienty a i b různé od nully; jsou-li téhož znamení t. j. jsou-li λ_1 a λ_2 téhož znamení, buďte 1. oba kladny, tak že lze rovnici psáti

$$\zeta = \frac{\xi^2}{m^2} + \frac{\eta^2}{n^2};$$

plocha ta zove se elliptickým paraboloidem; v případě $\lambda_1 = \lambda_2$ máme i $a = b$, a plocha jest rotačním paraboloidem.

Buďte 2. a i b zápornými na př.

$$-\frac{1}{m^2}, \quad -\frac{1}{n^2};$$

volme jinou osu ζ' a s. opačnou s osou ζ, tak že transformační formule znějí

$$\xi = \xi', \quad \eta = \eta', \quad \zeta = -\zeta',$$

a rovnice plochy

$$-\zeta' = -\frac{\xi'^2}{m^2} - \frac{\eta'^2}{n^2},$$

t. j.

$$\zeta' = \frac{\xi'^2}{m^2} + \frac{\eta'^2}{n^2},$$

tedy táž plocha jako v prvním případě.

Jsou-li λ_1 a λ_2 různých znamení, tedy i a a b, buď na př. $a > 0$, $b < 0$, čímž rovnice plochy

$$\zeta = \frac{\xi^2}{m^2} - \frac{\eta^2}{n^2};$$

tato plocha se zove hyperbolickým paraboloidem.

Supponujeme-li, že $a'_{34} = 0$, pak transformovaná rovnice (45) proměnnou ζ vůbec neobsahuje, jest tedy plocha

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + s = 0$$

v případě $s \gtrless 0$, válcem kolmým k rovině $\xi\eta$, v případě $s = 0$ pak se skládá ze dvou (realných neb pomyslných) rovin procházejících osou ζ.

B. Budiž $\lambda_3 = 0$ dvojnásobným kořenem rovnic (44), tedy

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 \gtrless 0.$$

Rovnice (45)

$$\lambda_1 x'^2 + 2a'_{14} x' + 2a'_{24} y' + 2a'_{34} z' + a_{44} = 0$$

transformací

$$x' = \xi + p, \quad y' = \eta, \quad z' = \zeta,$$

přejde na

$$\lambda_1 \xi^2 + 2a'_{24}\eta + 2a'_{34}\zeta + s = 0, \tag{46}$$

volíme-li p jako v předcházejícím odstavci a označíme-li literou s výraz

$$\lambda_1 p^2 + 2a'_{14} p + a_{44}.$$

Jsou-li a'_{24} a a'_{34} současně nullami, pak se plocha skládá ze dvou rovin

$$\xi = \pm \sqrt{-\frac{s}{\lambda_1}},$$

nejsou-li současně nullami, pak rovnice

$$a'_{24}\eta + a'_{34}\zeta = 0,$$

stanoví jistou přímku P v rovině $\eta\zeta$; volme tuto za novou osu η' a přímku Q vedenou počátkem v téže rovině kolmo ku P volme za novou osu ζ', novou osu ξ' pak položme do staré osy ξ. Označíme-li literou ϑ úhel přímky P s kladnou osou η budou transformační rovnice

$$\begin{aligned} \xi &= \xi', \\ \eta &= \eta' \cos\vartheta - \zeta' \sin\vartheta, \\ \zeta &= \eta' \sin\vartheta + \zeta' \cos\vartheta. \end{aligned}$$

Jelikož rovnice přímky P touto transformací přejde na $\zeta' = 0$, bude touže transformací patrně

$$a'_{24}\eta + a'_{34}\zeta = c\zeta',$$

kde $c \gtrless 0$ značí stálou. Přejde tudíž rovnice (46) na

$$\lambda_1 \xi'^2 + 2c\zeta' + s = 0,$$

z čehož patrno, že plocha jest parabolickým válcem kolmým k rovině $\xi'\zeta'$.

C. Supponujme, že rovnice (44) má trojnásobný kořen $\lambda = 0$. Pak musí dle úvah §. 10.

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \lambda = 0, \quad a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0.$$

Zní tu tedy rovnice daná, nejsouc více kvadratickou,

$$2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

a repraesentuje rovinu. V homogenních souřadnicích lze tuto rovnici připojením faktora x_4 psáti jako kvadratickou

$$x_4(2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44}x_4) = 0$$

a pak repraesentuje onu rovinu a nekonečně vzdálenou rovinu

$$x_4 = 0.$$

§ 13. *O existenci imaginárných ploch druhého stupně bez hlavních os.*

V §. 9. jsme uvažovali případ, kdy kubická rovnice pro λ má dva stejné kořeny $\lambda_1 = \lambda_2$; že v tomto případě bylo možná ku jedinému kořenu λ_1 stanoviti *dva* směry α, β, γ a α', β', γ' hovící všem požadavkům problemu, toho příčina byla ta, že všecky subdeterminanty Δ_{ik} vymizely. Důkaz, že tomu tak, se podstatně opíral o to, že koefficienty a_{ik} dané rovnice druhého stupně byly realné. Vezmeme-li v úvahu centralnou rovnici druhého stupně

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + a_{44} = 0,$$

jejíž koefficienty a_{ik} jsou komplexní hodnoty, pak v případě dvojnásobného kořenu $\lambda_1 = \lambda_2$ obecně nevymizí všecky subdeterminanty Δ_{ik}, tak že rovnice (35) stanoví jedno určité řešení α, β, γ, z čehož patrno, že v tomto případě neexistuje ani jediná transformace (27), jejíž (třeba komplexní) koefficienty hoví rovnicím (25) a (26) a která by toho dokázala, aby v transformované rovnici se vyskytovaly nové proměnné x', y', z' pouze svými čtverci. Nechtěje se do hlubšího rozboru této věci zde pouštěti, která tak jako některé jiné předchozí úvahy souvisí s obecnou theorií kvadratických forem, uvedu zde jakožto příklad rovnici

$$x^2 - y^2 + mz^2 + 2\sqrt{-1}\,xy + a_{44} = 0, \tag{47}$$