O hyperbolické obdobě Ludolfiny.

Napsal

Dr. F. J. Studnička,

prof. math. na c. k. české universitě.

Jakož známo, vyjadřuje se poměr obvodu a průměru kruhového transcendentním číslem zvláštním, jež dle *Ludolfa van Ceulena* *) (1616) často zve se *Ludolfinou* a dle *Eulera* (1748) „brevitatis causa“ označuje řeckým π, připomínajícím slovo „periferie“. Úhloznačná hodnota jeho jest 180°, takže

$$\sin\frac{\pi}{2}=1, \quad \cos\frac{\pi}{2}=0.$$

Máme-li tedy na zřeteli poměr výrazů goniometrických neboli tak zvaných funkcí *cyklických* k obdobným výrazům neboli funkcím *hyperbolickým*, zračící se ve vzorcích

$$(1)\qquad \begin{array}{l|l} \sin u=\dfrac{e^{iu}-e^{-iu}}{2i} & \mathfrak{S}u=\dfrac{e^{u}-e^{-u}}{2} \\ \cos u=\dfrac{e^{iu}-e^{-iu}}{2}, & \mathfrak{K}u=\dfrac{e^{u}+e^{-u}}{2}, \\ \cos^2 u+\sin^2 u=1 & \mathfrak{K}^2u-\mathfrak{S}^2u=1, \end{array}$$

můžeme i tu jmenovati argument u, jehož hyperbolický sinus vyjádřuje 1, krátce $^1/_2\Pi$ **), takže bude

$$(2)\qquad \mathfrak{S}\frac{\Pi}{2}=1 \quad \text{a tedy} \quad \mathfrak{K}\frac{\Pi}{2}=\sqrt{2}.$$

Abychom ustanovili hodnotu tohoto Π, uvažme, že plyne ze vzorců (2), spojením se vzorci (1)

$$\mathfrak{K}\frac{\Pi}{2}+\mathfrak{S}\frac{\Pi}{2}=e^{\frac{1}{2}\Pi}=1+\sqrt{2},$$

*) Viz *Studnička* „O kvadratuře kruhu“, Čas. pro pěst. math. a fys. R. I. pag. 37.

**) Poprvé tak učinil *Laisant* v „Essai sur les fonctions hyperboliques“, Paris, 1874, kdež klade však celé Π místo našeho $^1/_2\Pi$, o němž tuto se ukazuje, že jest přiměřenější. Hyperbolický sinus a cosinus značíme krátce $\mathfrak{S}$ a $\mathfrak{K}$.

načež logarithmováním obdržíme

(3) $\Pi = \mathfrak{l}(1+\sqrt{2}) = 1{\cdot}762\ 747\ 174\ldots$

Zároveň pak plyne ze vzorců (2)

$$\mathfrak{T}\frac{\Pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4},$$

z čehož poznáváme i poměr hyperbolické tangenty k cyklickému sinusu.

Mimo to obdržíme, užijeme-li známého vzorce pro hyperbolickou tangentu

$$\mathfrak{T}u = \sqrt{\frac{\mathfrak{K}2u - 1}{\mathfrak{K}2u + 1}},$$

se zřetelem ke vzorci druhému (2)

(4) $$\mathfrak{T}\frac{\Pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = e^{-\frac{\Pi}{2}},$$

načež snadno sestavíme

(5) $$\mathfrak{T}\frac{\Pi}{4} + \mathfrak{K}\frac{\Pi}{4} = 2\sqrt{2},$$

kdežto o cyklických funkcích obdobných platí

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{4} = 2.$$

Užijeme-li pak řady

$$\mathfrak{Art}\,u = u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \ldots,$$

z níž plyne

$$u = \mathfrak{T}u + \frac{1}{3}\mathfrak{T}^3u + \frac{1}{5}\mathfrak{T}^5u + \ldots$$

zjednáme si snadno pomocí vzorce (4) zajímavou relaci

$$\frac{\Pi}{4} = e^{-\frac{\Pi}{2}} + \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\Pi} + \frac{1}{5}e^{-\frac{5}{2}\Pi} + \ldots,$$

neboli v kratším označení symbolickém

(6) $$\frac{\Pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-(2k+1)\frac{\Pi}{2}}}{2},$$

z níž patrno, jak se konstanta Π vyjadřuje nekonečnou řadou, postupující podle negativních lichých mocnin konstanty $e^{\frac{1}{2}\Pi}$.

Abychom obdobu mezi π a Π ještě jasněji vytkli, obraťme se ku příslušným řadám. Obdržíme tu napřed z

$$\arcsin x = \frac{x^3}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{3^2 x^5}{5!} + \frac{3^2 . 5^2 x^7}{7!} + \dots$$

pro $x = 1$ přímo

$$(7) \qquad \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3!} + \frac{3^2}{5!} + \frac{3^2 . 5^2}{7!} + \dots,$$

kdežto z řady

$$l(x + \sqrt{1 + x^2}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{3^2 x^5}{5!} - \frac{3^2 . 5^2 x^7}{7!} + \dots$$

se pomocí vzorce (3) obdrží

$$(8) \qquad \frac{\Pi}{2} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{3^2}{5!} - \frac{3^2 . 5^2}{7!} + \dots,$$

takže spojením obou vzorců (7) a (8) vznikne

$$(9) \quad \frac{\pi + \Pi}{4} = 1 + \frac{3^2}{5!} + \frac{3^2 . 5^2 . 7^2}{9!} + \dots = 1{\cdot}226\ 084\ 9569 \dots$$

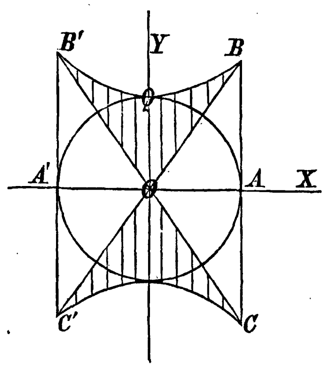
Geometrickým znázorněním možná taktéž obdobu tuto k jasnějšímu poznání přivésti.

Plocha kruhu vyjadřuje se vzorcem

$$K = \pi r^2,$$

kdež značí r poloměr; jestli $r = 1$, bude tedy

$$K = \pi.$$



Obrazec 1.

Určíme-li plochu, omezenou osou úseček OA — obr. 1. — osou pořadnic OQ, hyperbolickým obloukem BQ a pořadnicí AB, při čemž z rovnice hyperboly

$$y^2 - x^2 = 1,$$

plyne pro $x = OA = 1$

$$y_1 = AB = \sqrt{2},$$

obdržíme dle známého vzorce

$$OABQ = \int_0^1 dx \sqrt{1 + x^2} = {}^1/_2 \sqrt{2} + {}^1/_2 l (1 + \sqrt{2});$$

a poněvadž plocha trojúhelníková

$$OAB = {}^1/_2 OA \,.\, AB = {}^1/_2 \sqrt{2},$$

bude výseč hyperbolická

$$OBQ = {}^1/_2 l (1 + \sqrt{2}) = \frac{\Pi}{4},$$

takže čtvernásob této plochy čili

$$OBB' + OCC' = \Pi.$$

V našem obrazci představuje tedy čárkovaná dvojí výseč tato obdobu kruhové plochy a jest tedy hyperbolický oblouk BQB′ poloviční kružnici AQA′ přiřaděn.

Chceme-li další obdoby mezi těmito funkcemi vyhledati, obraťme se ke vzorcům, jež vyjadřují $\mathfrak{S}$ a $\mathfrak{K}$ multipla argumentu Π pomocí $\mathfrak{S}$ a $\mathfrak{K}$ jednoduchého; obdržíme tu pro *sudé n*

$$(10)\quad \mathfrak{K}\frac{n\Pi}{2} = 1 + \frac{n^2}{2!} + \frac{n^2(n^2 - 2^2)}{4!} + \frac{n^2(n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2)}{6!} + \ldots$$

a pro *liché n*

$$(11)\quad \mathfrak{K}\frac{n\Pi}{2} = \sqrt{2}\left[1 + \frac{n^2 - 1^2}{2!} + \frac{(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2)}{4!} + \ldots\right],$$

a podobně pro *sudé n*

$$(12)\quad \mathfrak{S}\frac{n\Pi}{2} = \sqrt{2}\left[\frac{n}{1!} + \frac{n(n^2 - 2^2)}{3!} + \frac{n(n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2)}{5!} + \ldots\right],$$

pro *liché n* konečně

$$(13)\quad \mathfrak{S}\frac{n\Pi}{2} = \frac{n}{1!} + \frac{n(n^2 - 1^2)}{3!} + \frac{n(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2)}{5!} + \ldots$$

Z těchto vzorců poznáváme zároveň, že pro *sudé n* jest $\mathfrak{K}\frac{n\Pi}{2}$ racionální, $\mathfrak{S}\frac{n\Pi}{2}$ irracionální, kdežto pro *liché n* naopak jest $\mathfrak{K}\frac{n\Pi}{2}$ irracionální, $\mathfrak{S}\frac{n\Pi}{2}$ tedy racionální.

Tohoto zjevu můžeme s prospěchem užíti k vyvinutí jiných řad pro tyto dvě funkce; jestiť totiž

$$e^{\frac{n\Pi}{2}} = (1+\sqrt{2})^n = \mathfrak{K}\frac{n\Pi}{2} + \mathfrak{S}\frac{n\Pi}{2}$$
$$= 1 + n_1\sqrt{2} + n_2 2 + n_3 2\sqrt{2} + n_4 2^2 + n_5\sqrt{2} + \ldots,$$
značí-li n_k krátce k-tý koefficient binomialní; a tu soudíme ze stejnosti dvou surdických čísel*), že pro *sudé* n platí

$$\mathfrak{K}\frac{n\Pi}{2} = 1 + 2n_2 + 2^2 n_4 + 2^3 n_6 + \ldots, \tag{14}$$

$$\mathfrak{S}\frac{n\Pi}{2} = \sqrt{2}\,[n_1 + 2n_3 + 2^2 n_5 + \ldots], \tag{15}$$

kdežto pro *liché* n jest naopak

$$\mathfrak{K}\frac{n\Pi}{2} = \sqrt{2}\,[n_1 + 2n_3 + 2^2 n_5 + \ldots] \tag{16}$$

$$\mathfrak{S}\frac{n\Pi}{2} = 1 + 2n_2 + 2^2 n_4 + 2^3 n_6 + \ldots \tag{17}$$

Abychom porovnali v této příčině funkce cyklické a hyperbolické argumentu n-násobného, sestavme vedle sebe napřed

$\sin 2k\pi = 0,$	$\mathfrak{S}\, 2k\Pi = 4k_1\sqrt{2},$
$\sin (2k+1)\pi = 0,$	$\mathfrak{S}(2k+1)\Pi = 2k_2\sqrt{2},$
$\sin\frac{4k+1}{2}\pi = +1,$	$\mathfrak{S}\frac{4k+1}{2}\Pi = 4k_3+1,$
$\sin\frac{4k-1}{2}\pi = -1,$	$\mathfrak{S}\frac{4k-1}{2}\Pi = 4k_4-1,$

kdež k_1, k_2, k_3, k_4 jsou positivní čísla celistvá, a vedle toho podobně

$\cos 2k\pi = +1,$	$\mathfrak{K}\, 2k\,\Pi = 4k_5 + 1,$
$\cos(2k+1)\pi = -1,$	$\mathfrak{K}\,(2k+1)\,\Pi = 4k_6 - 1,$
$\cos\frac{4k+1}{2}\pi = 0,$	$\mathfrak{K}\frac{4k+1}{2}\Pi = (4k_7+1)\sqrt{2},$
$\cos\frac{4k-1}{2}\pi = 0,$	$\mathfrak{K}\frac{4k-1}{2}\Pi = (4k_8-1)\sqrt{2},$

kdež značí opět k_5, k_6, k_7, k_8 čísla celistvá. Jak z tohoto sestavení patrno, odpovídá cyklické hodnotě ± 1 v hyperbolické soustavě $4k \pm 1$, kdežto nulle tu odpovídá irracionalnost.

---

*) Jako ze stejnosti dvou čísel soujemných
$$a + bi = c + di$$
soudíme, že $a = c$, $b = d$, podobně plyne týž výsledek ze stejnosti dvou čísel surdických
$$a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}.$$

Konečně plynou ještě ze vzorců (10—17) zajímavé stejnosti tyto:

$$1+2n_2+2^2n_4+\dots$$
$$=\begin{cases}1+\frac{n^2}{2!}+\frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}+\dots & \text{pro } sudé\ n,\\ \frac{n}{1!}+\frac{n(n^2-1^2)}{3!}+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}+\dots & \text{pro } liché\ n,\end{cases}$$

$$n_1+2n_3+2^2n_5+\dots$$
$$=\begin{cases}\frac{n}{1!}+\frac{n(n^2-2^2)}{3!}+\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!}+\dots & \text{pro } sudé\ n,\\ 1+\frac{n^2-1^2}{2!}+\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{4!}+\dots & \text{pro } liché\ n,\end{cases}$$

a spojíme-li oba vzorce přiměřeným sečtením, užívajíce vlastnosti binomických součinitelů, vyjádřené vzorcem

$$n_k+n_{k+1}=(n+1)_{k+1},$$

obdržíme konečně

$$\sum_{k=0} 2^k(n+1)_{2k+1}$$

$$\begin{matrix}(18)\\ \\(19)\end{matrix}\quad =\begin{cases}1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\frac{n(n^2-2^2)}{3!}+\dots & \text{pro } sudé\ n,\\ 1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2-1^2}{2!}+\frac{n(n^2-1^2)}{3!}+\dots & \text{pro } liché\ n.\end{cases}$$

Položíme-li však základem vzorce, vyjadřující $\cos nx$ a $\sin nx$ mocninami kosinusu, obdržíme napřed

$$(20)\quad \mathfrak{R}\frac{n\Pi}{2}=2^{\frac{3}{2}n-1}-\frac{n}{1!}2^{\frac{3}{2}n-4}+\frac{n(n-3)}{2!}2^{\frac{3}{2}n-7}-\frac{n(n-4)(n-5)}{3!}2^{\frac{3}{2}n-10}+\dots$$

z čehož plyne, rozlišíme-li případ lichého a sudého n, pro *liché* n zvláště

$$(21)\quad \mathfrak{R}\frac{n\Pi}{2}=\sqrt{2}\left[2^{\frac{3}{2}(n-1)}-\frac{n}{1!}2^{\frac{3}{2}(n-3)}+\frac{n(n-3)}{2!}2^{\frac{3}{2}(n-5)}-\dots\right];$$

a podobně plyne pro *sudé* i *liché* n společně

$$(22)\quad \mathfrak{S}\frac{n\Pi}{2}=2^{\frac{3}{2}(n-1)}-\frac{n-2}{1!}2^{\frac{3}{2}(n-3)}+\frac{(n-3)(n-4)}{2!}2^{\frac{3}{2}(n-5)}-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{3!}2^{\frac{3}{2}(n-7)}+\dots$$

a podle toho tedy pro *sudé* n zvláště

$$(23)\quad \mathfrak{S}\frac{n\Pi}{2}=\sqrt{2}\Big[2^{\frac{3}{2}n-2}-\frac{n-2}{1!}2^{\frac{3}{2}n-5}+\frac{(n-3)(n-4)}{2!}2^{\frac{3}{2}n-8} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{3!}2^{\frac{3}{2}n-11}+\ldots\Big].$$

Vzorec (20) a (21) možná i jediným výrazem determinantním vyjádřiti, jelikož ze známého *) vzorce pro $\cos nx$ se v tomto případě obdrží

$$(24)\quad \mathfrak{K}\frac{n\Pi}{2}=\begin{vmatrix} \sqrt{2}, & 1, & 0, & 0, & \ldots & 0 \\ 1, & 2\sqrt{2}, & 1, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & 1, & 2\sqrt{2}, & 1, & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots & 2\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

kdež se determinant stupně n-tého dle známých pravidel může snadno rozvinouti. **)

Vrátíme-li se ke vzorci (14) a užijeme-li známých vzorců

$$\mathfrak{S}^2u=\frac{\mathfrak{K}2u-1}{2},$$

$$\mathfrak{K}^2u=\frac{\mathfrak{K}2u+1}{2},$$

obdržíme, kladouce tu

$$n=2k$$

nové zajímavé vzorce dva a sice

$$(25)\quad \frac{\mathfrak{K}k\Pi-1}{2}=(2k)_2+2(2k)_4+2^2(2k)_6+\ldots=\mathfrak{S}^2\frac{k\Pi}{2}$$

$$(26)\quad \frac{\mathfrak{K}k\Pi+1}{2}=1+(2k)_2+2(2k)_4+2^2(2k)_6+\ldots=\mathfrak{K}^2\frac{k\Pi}{2},$$

kteréž patrně vyhovují základní podmínce

$$\mathfrak{K}^2u-\mathfrak{S}^2u=1.$$

Máme-li na zřeteli jakost čísel, kterými se vyjadřuje při *sudém* a *lichém* n

$$\mathfrak{S}\frac{n\Pi}{2} \text{ a } \mathfrak{K}\frac{n\Pi}{2},$$

poznáme snadno ze vzorce (25), že

*) Viz *Studnička* „Eine neue Anwendung der Kettenbruchdeterminanten“ Sitzungsb. der kön. b. Ges. d. Wiss., Prag, 1886.

**) Viz *Studnička* „O determinantech“, Praha, 1870, pag. 27.

$$\sum_{h=0}^{k} 2^{h-1}(2k)_{2h} = \begin{cases} \square \text{ pro } \textit{liché } k, \\ 2\square \text{ pro } \textit{sudé } k, \end{cases}$$

kdežto ze vzorce (26) plyne naopak

$$1 + \sum_{h=0}^{k} 2^{h-1}(2k)_{2h} = \begin{cases} 2\square \text{ pro } \textit{liché } k, \\ \square \text{ pro } \textit{sudé } k. \end{cases}$$

Vzorce (25) a (26) poskytují tedy *celistvá* čísla, vyhovující neurčité rovnici *Pell*-ově

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1, \tag{27}$$

čímž dáno její obecné řešení.

Abychom zvláštní některé hodnoty tuto ku konci podali, sestaveno budiž dle vzorců (10—13) co ku počtu nejpřiměřenějších osmero $\mathfrak{S}$ a $\mathfrak{K}$

$\mathfrak{S}\frac{\Pi}{2} = 1$	$\mathfrak{K}\frac{\Pi}{2} = \sqrt{2}$
$\mathfrak{S}\,\Pi = 2\sqrt{2}$	$\mathfrak{K}\,\Pi = 3$
$\mathfrak{S}\frac{3\Pi}{2} = 7$	$\mathfrak{K}\frac{3\Pi}{2} = 5\sqrt{2}$
$\mathfrak{S}\,2\Pi = 12\sqrt{2}$	$\mathfrak{K}\,2\Pi = 17$
$\mathfrak{S}\frac{5\Pi}{2} = 41$	$\mathfrak{K}\frac{5\Pi}{2} = 29\sqrt{2}$
$\mathfrak{S}\,3\Pi = 70\sqrt{2}$	$\mathfrak{K}\,3\Pi = 99$
$\mathfrak{S}\frac{7\Pi}{2} = 239$	$\mathfrak{K}\frac{7\Pi}{2} = 169\sqrt{2}$
$\mathfrak{S}\,4\Pi = 408\sqrt{2}$	$\mathfrak{K}\,4\Pi = 577.$

Jak patrno, plynou z tohoto sestavení pro *Pellovu* rovnici svrchu uvedenou hodnoty

x	3	7	17	41	99	239	577
y	2	5	12	29	70	169	408

A tu máme opět příležitost poukázati k souvislosti tohoto řešení s jiným, starším, jež *Lagrange* r. 1767 ve spisech Berlínské akademie podal a jež *Legendre* řadí mezi nejdůležitější pokroky v theorii čísel. Má-li se totiž rovnice

$$x^2 - Ay^2 = 1,$$

v níž značí A číslo positivní a nekvadratické, řešiti čísly celistvými, promění se $\sqrt{A}$ v řetězec a vyhledají se hodnoty jeho přibližné;

pak odpovídá poslednímu neúplnému podílu periody μ-té přibližná hodnota

$$\frac{Z_{\mu k}}{N_{\mu k}}, \text{ takže } Z_{\mu k}^2 - AN_{\mu k}^2 = (-1)^{\mu k}, *)$$

čímž řešení zprostředkováno.

V případě našem jest

$$A = 2, \text{ tedy } \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 \dot{+}},$$

což nám poskytuje, nepřihlížíme-li k 1, řadu přibližných hodnot

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{12}{29}, \frac{29}{70}, \ldots$$

takže příslušné $Z_{\mu k}$ a $N_{\mu k}$ uvedeno ve spojení s hodnotami $\mathfrak{S}$ a $\mathfrak{K}$ argumentu $k\Pi$ a $(2k+1)\frac{\Pi}{2}$.

Obrátíme-li konečně úkol tento, poskytne nám řada přibližných hodnot periodického řetězce

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 \dot{+}}$$

čitatelem Z_μ, a jmenovatelem N_μ hodnoty, odpovídající dřívějším řadám, na př. (21) a (22), takže bychom i tyto hodnoty pomocí oněch řad mohli vyjádřiti.

Vůbec jde z tohoto porovnání obou method, jakými jsme řešili zvláštní rovnici *Pell*-ovu (27), zcela zřejmě na jevo, jak mnohotvárné jsou vztahy mezi některými výrazy číselnými, což s hlediska ryze formalního jest úkazem i poučným i zajímavým.

Že bychom na tomto poli ještě dále pracujíce nalezli mnohou zajímavou relaci, snadno pozná každý, kdo si uvede na mysl mnohotvárnost výrazů o cyklických funkcích platících. Prozatím však postačí upozorniti takto na hyperbolickou obdobu *Ludolfiny* čili Eulerova π, jakouž jest *polovička* mnou tak zvané *Laisantiny* Π.

---

*) Srovnej *G. Wertheim* „Elemente der Zahlentheorie" Leipzig 1887. pag. 105.