Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

Drobné zprávy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 16 (1887), No. 5, 238--243

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122134

Drobné zprávy.

Z Gaussovy pozůstalosti.

Sdílí

M. Lerch,

docent české vysoké školy technické v Praze.

V pozůstalosti *Gaussově* (sebrané spisy, díl III., str. 442) nalezá se pojednání, v němž se autor Disquisitiones pokusil o důkaz vzorce pro linearnou transformaci funkce ϑ pomocí rozkladu v dvojnásobný součin. Je zajímavo, že dospěl k výsledku, o němž sám praví: „Diese Schlüsse bedürfen einer Verbesserung (alle geradezu noch einen constanten Theil im Nenner)“, nicméně je tu zřejmo, že *výpočty* jsou správné, ale pouze v rozumování učiněna chyba, což tuto vylíčiti nebude snad od místa.

Buďtež m, n dvě veličiny kladné, λ libovolná konečná veličina, a uvažujme výraz

$$A = \lim_{s'=\infty} \lim_{s=\infty} \Pi_{k,k'} \left(1 - \frac{\lambda}{km + k'ni}\right), \left(\begin{matrix} k = \pm 1, \pm 3, .., \pm(2s+1) \\ k' = \pm 1, \pm 3, .., \pm(2s'+1) \end{matrix}\right).$$

Jelikož

$$1 - \frac{\lambda}{km + k'ni} = \frac{km + k'ni - \lambda}{km + k'ni} = \frac{1 + \dfrac{k'ni - \lambda}{km}}{1 + \dfrac{k'ni}{km}}$$

a tedy

$$A_{k'} = \lim_{s=\infty} \Pi_k \left(1 - \frac{\lambda}{km + k'ni}\right) = \frac{\lim\limits_{s=\infty} \Pi_k \left(1 + \dfrac{k'ni - \lambda}{km}\right)}{\lim\limits_{s=\infty} \Pi_k \left(1 + \dfrac{k'ni}{km}\right)}.$$

Dle známého vzorce

$$\lim_{s=\infty} \Pi_k \left(1 + \frac{x}{k}\right) = \cos\frac{\pi x}{2}, \left(k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, .., \pm(2s-1)\right)$$

bude patrně

$$A_{k'} = \frac{\cos\dfrac{k'ni - \lambda}{2m}\pi}{\cos\dfrac{k'ni}{2m}\pi} = \frac{e^{\frac{k'ni-\lambda}{2m}\pi i} + e^{-\frac{k'ni-\lambda}{2m}\pi i}}{e^{\frac{k'n\pi}{2m}} + e^{-\frac{k'n\pi}{2m}}}.$$

Položímeli

$$x = e^{-\frac{n\pi}{m}} < 1, \; y = e^{-\frac{\lambda\pi i}{m}},$$

obdržíme

$$\mathrm{A}_{k'} = \frac{y^{-\frac{1}{2}}(1 + yx^{k'})}{1 + x^{k'}} = \frac{y^{\frac{1}{2}}(1 + y^{-1}x^{-k'})}{1 + x^{-k'}},$$

z čehož plyne

$$\mathrm{A} = \lim_{s'=\infty} \prod_{k'} \mathrm{A}_{k'} = \prod_{(h=1,3,5,\ldots)} \frac{(1 + yx^h)(1 + y^{-1}x^h)}{(1 + x^h)^2}$$

t. j.

$$\mathrm{A} = \frac{f(x, y)}{\varphi(x)^2},$$

kde

$$(1) \qquad \begin{cases} f(xy) = \prod_h (1 + yx^h)(1 + y^{-1}x^h), \\ \varphi(x) = \prod_h (1 + x^h), \end{cases}$$

při čemž h probíhá hodnoty (1, 3, 5, 7, ...) t. j. všechna přirozená čísla lichá.

Máme tedy vzorec

$$(2) \qquad \lim_{s'=\infty} \lim_{s=\infty} \prod_{k,k'} \left(1 - \frac{\lambda}{km + k'ni}\right) = \frac{f(x, y)}{\varphi(x)^2}.$$

Gauss pochybil tím, že předpokládal rovnost

$$\lim_{s'=\infty} \lim_{s=\infty} \prod_{k,k'} \left(1 - \frac{\lambda}{km + k'ni}\right) = \lim_{s=\infty} \lim_{s'=\infty} \prod_{k,k'} \left(1 - \frac{\lambda}{km + k'ni}\right),$$

která zde neplatí.

Dvojnásobný součin, jejž *Gauss* klade místo výrazu A, konverguje totiž pouze *podmínečně* a mění svou hodnotu s pořádkem činitelů. Uvážímeli, že součin

$$\prod_{\alpha,\alpha'} \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha m + \alpha' ni}\right) e^{\frac{\lambda}{\alpha m + \alpha' ni} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\alpha m + \alpha' ni}\right)^2}$$

$$(\alpha, \alpha' = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots)$$

konverguje bezpodmínečně, shledáme

$$(3) \qquad \lim_{s'=\infty} \lim_{s=\infty} \prod_{k,k'} \left(1 - \frac{\lambda}{km + k'ni}\right) e^{\omega + \frac{1}{2}\omega^2}$$

$$= \lim_{s=\infty} \lim_{s'=\infty} \prod_{k,k'} \left(1 - \frac{\lambda}{km + k'ni}\right) e^{\omega + \frac{1}{2}\omega^2},$$

kde kladeno k vůli krátkosti

$$\omega = \frac{\lambda}{km + k'ni}.$$

Patrně bude pak

$$(4^a) \qquad \lim_{s'=\infty} \lim_{s=\infty} \Pi_{k,k'} \left(1 - \frac{\lambda}{km + k'ni}\right) e^{\omega + \frac{1}{2}\omega^2}$$

$$= A \,.\, \lim_{s'=\infty} \lim_{s=\infty} e^{\frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{k,k'} \frac{1}{(km + k'ni)^2}}$$

$$(4^b) \qquad \lim_{s=\infty} \lim_{s'=\infty} \Pi_{k,k'} \left(1 - \frac{\lambda}{km + k'ni}\right) e^{\omega + \frac{1}{2}\omega^2}$$

$$= A' \,.\, \lim_{s=\infty} \lim_{s'=\infty} e^{\frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{k,k'} \frac{1}{(km + k'ni)^2}},$$

kde položeno

$$A' = \lim_{s=\infty} \lim_{s'=\infty} \Pi_{k,k'} \left(1 - \frac{\lambda}{km + k'ni}\right).$$

Levé strany vzorců (4^a) a (4^b) jsou si [vzhledem k (3)] rovny, takže máme

$$(5) \qquad \frac{A'}{A} = \frac{\lim\limits_{s'=\infty} \lim\limits_{s=\infty} e^{\frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{k,k'} \frac{1}{(km + k'ni)^2}}}{\lim\limits_{s=\infty} \lim\limits_{s'=\infty} e^{\frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{k,k'} \frac{1}{(km + k'ni)^2}}}$$

$$= \lim_{s'=\infty} \lim_{s=\infty} e^{\frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{k,k'} \left\{\frac{1}{(km + k'ni)^2} - \frac{1}{(k'm + kni)^2}\right\}}$$

$$= e^{\frac{1}{2}\lambda^2 \lim\limits_{s'=\infty} \lim\limits_{s=\infty} \sum_{k,k'} \left\{\frac{1}{(km + k'ni)^2} + \frac{1}{(kn + k'mi)^2}\right\}}.$$

Abychom ukázali nesprávnosť domněnky *Gaussovy*, dokážeme, že dvojnásobný součet v exponentu t. j. výraz

$$B = \lim_{s'=\infty} \lim_{s=\infty} \sum_{k,k'} \left\{\frac{1}{(km + k'ni)^2} + \frac{1}{(kn + k'mi)^2}\right\}$$

nezmizí. Jelikož k probíhá hodnoty $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$ bude $k = 2\nu + 1$, ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) a tedy

$$B_{k'}^{(m,n)} = \lim_{s=\infty} \sum_{k} \frac{1}{(km + k'ni)^2} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\nu m + k'ni + m)^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{4m^2 \sin^2 \frac{\pi(m + k'ni)}{2m}} = \frac{\pi^2}{4m^2 \cos^2 \frac{k'n\pi i}{2m}}$$

což jest veličina *kladná*, pokud m, n jsou realné. Následovně bude součet

$$B=\sum_{k'}\left\{B_{k'}^{(m,n)}+B_{k'}^{(n,m)}\right\}$$

sestávati z členů kladných a bude míti tedy hodnotu od nully různou, $c.b.d.$

Odtud plyne, že výraz $\frac{A'}{A}$ není jednotkou, čímž *Gaussův* omyl je náležitě vysvětlen.

Kdyby hypothesa *Gaussova* byla správnou, pak bychom patrně měli rovnici

$$\frac{f(x,y)}{\varphi(x)^2}=\frac{f(x',y')}{\varphi(x')^2},\quad x'=e^{-\frac{m\pi}{n}},\quad y'=e^{\frac{\lambda\pi}{n}},$$

kterou slavný mathematik uvádí na konci řečeného pojednání ve tvaru rozvinutém. Leč ačkoli poznal její nesprávnosť, přec chyba jím učiněná neodstraní se připojením stálých činitelů k jmenovateli, nýbrž připojením faktoru tvaru

$$e^{\alpha\lambda^2}$$

k jedné z obou stran, jak patrno ze vzorce (5).

Napsal **Theodor Monin**, professor ve Slivně v Bulharsku.

I. Geometrickým místem středů ploch kuželových 2-ho stupně, které procházejí danými šesti body v prostoru, jest plocha stupně 4-ho.

Všecky plochy 2-ho st., danými šesti body a, b, c, d, e, f procházející, vytvořují zvláštní geometrický útvar o třech rozměrech, ve kterém jest nekonečné množství ploch kuželových. Středy jejich tvoří plochu st. 4-ho, ku které nejprvé Steiner poukázal, a kterou Cremona nazývá Jakobianou soustavy.*)

Tato plocha obsahuje vedle 15 přímek, spojujících daných šest bodů mezi sebou, i oněch 10 přímek, ve kterých se protínají roviny, protilehlými trojinami bodů procházející; takovou přímkou jest na př. průsečnice rovin *abc* a *def*. Body a, b, c... jsou konickými a určují křivku prostorovou st. 3-ho, která jest na ploše. Ony plochy kuželové, jež mají své středy na této

*) Preliminari di una teoria geometrica delle superficie. Parte II. pag. 58.

křivce, jsou projektivné, takže značíli x a y dva libovolné body křivky, platí vztah

$$x\,(abc\ldots) \;\overline{\wedge}\; y\,(abc\ldots).$$

Obšírně pojednáno o této ploše ve spise *Dr. Th. Reye „Die Geometrie der Lage“* T. II. str. 250. a násl. 2. vydání.

V tomto smyslu nutno opraviti větu (2), jakož i reciprokou větu (15), vyslovenou *Chasles*-em ve spise *„Aperçu historique...“* Note XXXIII. str. 403.

Též prof. Cremona, který ve svém pojednání *„Sulle linee del terz' ordine a doppia curvatura“* v *„Annali di matematica“* T. I. 1858, dokazuje Chasles-ovy theoremy o křivkách prostorových st. 3-ho, uvádí obě věty beze změny, odvolávaje se na autora (str. 168. a 173.)

Používám té příležitosti, bych poukázal ještě k jiné mýlce, která se do uvedené práce prof. Cremony vloudila. Jest tam totiž mezi jinými vyslovena věta následující: *Šest bodů, ve kterých nějaká plocha kuželová 2-ho st. protíná křivku prostorovou st. 3-ho jest v involuci* (str. 294).

Jak ze svrchupsané věty patrno, nemůže tento theorem býti platným z té příčiny, že zcela libovolnými šesti body křivky prochází nekonečné množství ploch kuželových st. 2-ho. Mýlka, která se tu stala, má původ svůj v nepravém čtení rovnice (19), citovaného pojednání, která vlastně dokazuje následující vlastnost: *Všecky soustředné plochy kuželové 2-ho st., mající s nějakou křivkou prostorovou st. 3-ho čtyři pevné body společné, protínají tuto v dalších dvou bodech, tvořících involuci quadratickou.* Podotknouti nutno, že ony čtyři pevné body křivky této involuci obecně náležeti nebudou.

II. Harmonické středy 2-ho stupně vzhledem k soustavám trojbodovým lze snadno následovně stanoviti: Předpokládejme na kuželosečce K tři body a, b, c jako základní a bod p jako pol; stanovme harmonikálu tohoto bodu vzhledem k trojúhelníku abc, kterážto protne K v obou hledaných středech harmonických.

Považujeme-li trojstran abc za křivku st. 3-ho, jest K quadratickou polárou onoho bodu o, ve kterém se protínají přímky spojující body a, b, c s protilehlými vrcholy trojúhelníka, v těchto bodech křivce K opsaného. Poněvadž pak p leží na quadratické poláře bodu o, prochází linearná polára nebo harmonikála bodu, p bodem o. Tyto harmonikály tedy protínají K v involuci bodové projektivné k řadě polů p. Takovouto involuci tvoří také harmonické středy 2-ho st., náležející řadě polů p na křivce K. Projektivné tyto involuce se však ztotožňují majíce tři samodružné skupiny, jež náleží polům a, b, c, aneb lépe řečeno polům k a, b, c nekonečně blízkým.

III. Rovinná křivka n-tého st. je určena $p_n = \frac{n(n+3)}{2}$ *body*.

Předpokládajíce, že počet podmínek p_n určujících křivku n-tého st. aneb vůbec místo n-tého st., jest toliko na čísle n závislým, můžeme svrchupsaný vzorec odvoditi následujícím způsobem.

Libovolná přímka protíná geometrické místo n-tého st. v n bodech. Má-li tomuto místu celá náležeti, jest nutno, však též dostačí dokázati, že má s ním $n+1$ společný bod. Bude tedy přímka, jako část místa n-tého st., představovati $n+1$ určovací podmínky a zbývajícími, na počet $p_n-(n+1)$, musí býti druhá část st. $(n-1)$ho úplně ustanovena. Dle toho jest:

$$p_n - p_{n-1} = n+1,$$
$$p_{n-1} - p_{n-2} = n,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$p_1 = 2,$$

z kterýchžto rovnic sečtením plyne vzorec nadepsaný. Ku výpočtu mohli bychom na místě přímky též kuželosečky použíti; křivek stupňů vyšších však již nikoliv.

Úlohy.

Řešení cenné úlohy.

a) Rozbor. Z daných částí trojúhelníka ABC sestrojiti lze nejprve stranu BC $= a$, potom střed S kružnice opsané K. Abychom našli střed O kružnice vepsané L, hleďme stanoviti dvě měřická místa, jímž střed tén náležeti bude. Jedním takovým místem jest přímka MN || BC, jejíž vzdálenost od BC rovna jest ϱ. Druhé měřické místo takto vyšetříme: Je-li $\sphericalangle$ BAC $= \alpha$, $\sphericalangle$ ABC $= \beta$, $\sphericalangle$ BCA $= \gamma$, jest

$$\sphericalangle \mathrm{BOC} = 2\mathrm{R} - \frac{\beta+\gamma}{2} = \mathrm{R} + \frac{\alpha}{2};$$