František Machovec

Příspěvek k odvození rovnice evoluty a vzorců pro souřadnice středů křivosti kuželosečky

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 16 (1887), No. 5, 235--237

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122133`

Tím dospíváme k větě *Pascalově.*

Z věty (IV) přicházíme ku sestrojení kuželosečky z daných pěti tečen A, B, C, A′, B′ takto: ABC určují trojúhelník, (AA′) a (BB′) osu perspektivickou Σ (ve větě IV. zmíněnou); tato budiž pevna a na ní nechť se pohybuje bod σ, jehož každé poloze odpovídá jedna tečna S, kterou dle dřívějšího též snadno si vyhledáme.

Tím dospíváme k větě *Brianchonově.*

Nyní jest patrno, jak jsme mohli na základě věty Pascalovy odvoditi opět větu (I), jejíž věta reciproká, z Brianchonovy plynoucí, jest tato:

VI. Jsou-li kruhu (kuželosečce) opsány dva trojúhelníky stejnosměrných stran, tu libovolná tečna protíná strany jednoho trojúhelníku v bodech, jichž spojnice s vrcholy protilehlými trojúhelníka druhého jsou stejnosměrny.

V Praze, 1885.

Příspěvek k odvození rovnice evoluty a vzorců pro souřadnice středů křivosti kuželosečky.

Podává

F. Machovec, professor v Karlíně.

Budiž rovnice *středové* kuželosečky dána ve tvaru

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = C. \tag{1}$$

Potom jest rovnice poláry libovolného bodu $(x'\, y')$ vzhledem k dané kuželosečce

$$\frac{xx'}{A} + \frac{yy'}{B} = C$$

a tudíž

$$\xi' = \frac{x'}{AC}, \quad \eta' = \frac{y'}{BC} \tag{2}$$

jsou souřadnice této poláry.

Rovnice přímky s touto polárou vzhledem k (1) kolmo sdružené jest

$$\frac{AC}{(A-B)x'}\, x + \frac{BC}{(B-A)\,y'}\, y = C,$$

její souřadnice jsou tedy

$$(3) \qquad \xi_1 = \frac{A}{(A-B)x'}, \quad \eta_1 = \frac{B}{(B-A)y'}$$

a souřadnice jejího polu vzhledem k (1)

$$(4) \qquad x_1 = \frac{A^2C}{(A-B)x'}, \quad y_1 = \frac{B^2C}{(B-A)y'}.$$

Z rovnic (4) vycházejí na jevo rovnice

$$(5) \qquad x'x_1 = \frac{A^2C}{A-B}, \quad y'y_1 = \frac{B^2C}{B-A},$$

podobně obdržíme z rovnic (3)

$$(6) \qquad x'\xi_1 = \frac{A}{A-B}, \quad y'\eta_1 = \frac{B}{B-A}$$

a konečně z rovnic (2) a (3)

$$(7) \qquad \xi'\xi_1 = \frac{C}{A-B}, \quad \eta'\eta_1 = \frac{C}{B-A}.$$

Rovnic (2), (5), (6) a (7) lze užiti v nauce o kuželosečkách k řešení různých úloh; v následujícím bude jich užito k řešení úloh v nadpise vytčených.

Body (x', y') a (x_1, y_1) budeme nazývati *reciprokými body*, přímky (ξ', η') a (ξ_1, η_1) *reciprokými přímkami* vzhledem ku křivce (1) a konečně bod $\begin{matrix}(x', y')\\(x_1, y_1)\end{matrix}$ bude *reciprokým bodem* přímky $\begin{matrix}(\xi_1, \eta_1)\\(\xi', \eta')\end{matrix}$ a naopak tato přímka *reciprokou přímkou* onoho bodu vzhledem ke kuželosečce (1).

Probíhá-li bod (x', y') libovolnou křivku K', probíhá jeho reciproký bod $(x_1 y_1)$ křivku K_1, jeho polára vzhledem ke kuželosečce (1) obaluje jistou křivku Γ' a jeho reciproká přímka křivku Γ_1. Rovnice křivek K_1, Γ' a Γ_1 obdržíme z rovnice křivky K', vyjádříme-li z rovnic (5), resp. (2) a (6) souřadnice bodu (x', y') veličinami (x_1, y_1), resp. (ξ', η') a (ξ_1, η_1) a vložíme-li výsledky do rovnice křivky K'.

Vytvořuje-li na př. bod (x', y') danou kuželosečku, obalují jednotlivé polohy jeho reciproké přímky (t. j. normály oné kuželosečky) evolutu této křivky. Z toho jde, že obdržíme rovnici evoluty kuželosečky (1), vložíce do rovnice (1) za x a y výrazy

$$\frac{A}{(A-B)\xi} \quad \text{a} \quad \frac{B}{(B-A)\eta},$$

které plynou z rovnice (6).

Tím nabudeme rovnice

$$\frac{A}{\xi^2}+\frac{B}{\eta^2}=C(A-B)^2,$$

jákožto rovnici evoluty v souřadnicích přímkových.

Reciproký bod bodu $(x'y')$ probíhá v tomto případě jistou křivku K_1 a poly tečen této křivky jsou středy křivosti dané kuželosečky. Rovnici křivky K_1 obdržíme dle svrchu podaného vysvětlení, vložíme-li do rovnice (1) za x a y výrazy

$$\frac{A^2C}{(A-B)x} \quad \text{a} \quad \frac{B^2C}{(B-A)y}$$

plynoucí z rovnic (5) ve tvaru

$$\frac{A^3}{x^2}+\frac{B^3}{y^2}=\frac{(B-A)^2}{C}.$$

Tečna této křivky v bodě (x_1y_1) má rovnici

$$\frac{A^3x}{x_1^3}+\frac{B^3y}{y_1^3}=\frac{(A-B)^2}{C}$$

a tudíž její pol vzhledem k (1), t. j. střed křivosti v bodě (x', y') kuželosečky (1), má souřadnice

$$X=\frac{A^4C^2}{(A-B)^2x_1^3}, \quad Y=\frac{B^4C^2}{(A-B)^2y_1^3},$$

čili, užijeme-li rovnic (5)

$$X=\frac{(A-B)\,x'^3}{A^2C}, \quad Y=\frac{(B-A)\,y'^3}{B^2C}.$$

Z těchto dvou rovnic a rovnice

$$\frac{x'^2}{A}+\frac{y'^2}{B}=C,$$

obdržíme známým způsobem rovnici evoluty v souřadnicích bodových. Podobně lze řešiti vytčené úlohy při *parabole.*

Poznámka. Ze tvaru rovnic (5) snadno poznáme, že každé dva reciproké body jsou sdruženy vzhledem k svazku kuželoseček, který jest určen danou kuželosečkou a jejími řídícími přímkami. Křivky K' a K_1 jsou tedy kvadraticky příbuzné. Podobně jest zřejmo z rovnic (7), že každé dvě reciproké přímky jsou sdruženy vzhledem ke kuželosečkám konfokálným s kuželosečkou danou.