Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Alois Zdráhal

Věta o binomických součinitelích

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 11 (1882), No. 1, 47--48

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122128

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1882

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

každý společný dělitel čísel G a H jest též společným dělitelem čísel

$$G \text{ a } a^{h-g} - 1.$$

A naopak jich společný dělitel jest též společným dělitelem čísel

$$G \text{ a } a^g (a^{h-g} - 1)$$

t. j. čísel G a H — G t. j. čísel G a H.

Jest tedy největší společný dělitel čísel G a H týž, jako největší společný dělitel čísel

$$a^g - 1, \quad a^{h-g} - 1,$$

tedy tentýž co největší společný dělitel čísel

$$a^g - 1, \quad a^{h-qg} - 1$$

kdež $h - qg = r < g$.

S čísly $a^g - 1$, $a^r - 1$ jednejme tak jako s G a H atd. atd., čímž správnost věty patrna, uvážíme-li, že divise $\frac{a^m - 1}{a^n - 1}$ algebraicky beze zbytku vyjde, je-li m násobek čísla n.

V Praze, v září 1881.

Věta o binomických součinitelích.

Napsal **Al. Zdrahal.**

O součinitelích binomických platí věta vyjádřená vzorcem

$$\Sigma \binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}\binom{c}{\gamma}\binom{d}{\delta} \ldots = \binom{a+b+c+d+\ldots}{r},$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta \ldots = r$$

při čemž a, b, c, d, ... jsou určitá kladná čísla daná, též ukazovatelé α, β, γ, δ, ... kladní a celiství, tvoříce v každém součinu levé strany určitý daný součet r, který arci musí

$$\leqq a + b + c + d \ldots,$$

a hovíce podmínkám z formule samé taktéž patrným

$$\alpha \leqq a, \quad \beta \leqq b, \quad \gamma \leqq c, \ldots$$

Větu lze přímo dokázati z nauky o kombinacích.

Z $a + b + c + d + \ldots$ prvků jest totiž kombinací třídy $r^{\text{té}}$ množství jediné a určité, a kombinace tyto obdržíme, sestavujeme-li z $a+b+c+d+\ldots$ prvků po r prvcích. Množství kombinac těchto jest

$$\binom{a+b+c+d+\ldots}{r}.$$

Avšak i jiným spůsobem můžeme vytvořiti tytéž sestavy. Rozdělme množství a, b, c, d, ... na skupiny jistých a, b, c, d, ... prvků. Z jedné každé skupiny pak tvořme sestavy, však tříd resp. α, β, γ, δ, ..., ovšem tak, by součet $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots=r$. Jednotlivé z těchto soustav lze pak spojovati navzájem v sestavy třídy $r^{té}$ z prvků $a+b+c+d+\ldots$ Skupina první dá $\binom{a}{\alpha}$ sestav, druhá $\binom{b}{\beta}$, a t. d. a poněvadž každou s každou lze spojiti, obdržíme $\binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}\binom{c}{\gamma}\ldots$ sestav třídy r ze všech elementů. Nabudou-li α, β, γ, ... jiné hodnoty — hovíce arci podmínce

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots=r,$$

budou i sestavy vycházející jiné. Tím máme celkem

$$\Sigma\binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}\binom{c}{\gamma}\cdots$$

různých sestav třídy r ze všech elementů. Mimo ty nejsou ale už žádné jiné; neboť každá sestava třídy r ze všech elementů musí obsahovati z vytknutých a prvků jich několik na př. α, z oněch b prvků několik na př. β atd., kdež ani $\alpha+\beta+\ldots=r$, a některá z čísel α, β, ... i nullami býti mohou;*) jest tedy sestava ta vytknutou cestou již vytvořena.

Avšak množství kombinac těch třídy $r^{té}$, jak již praveno, jest jediné, z čehož plyne rovnosť obou výrazův

$$\binom{a+b+c+\ldots}{r}=\Sigma\binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}\binom{c}{\gamma}\cdots,$$

Z věty této plyne co případ zvláštní známá věta

$$\Sigma\binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}=\binom{a+b}{r}$$

$$\alpha+\beta=r$$

čili $$\binom{a}{0}\binom{b}{r}+\binom{a}{1}\binom{b}{r-1}+\ldots+\binom{a}{r}\binom{b}{0}=\binom{a+b}{r}.^{**)}$$

---

*) Z úvahy naší patrno, že nutno bráti $\binom{\lambda}{0}=1$.

**) Případ, kdy dané elementy nejsou naskrze různé? *W.*