Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

C. Le Paige

Sur l'équation du quatrième degré

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 14 (1885), No. 1, 26--28

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122101

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1885

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Sur l'équation du quatrième degré.

Par le Dr. **C. Le Paige,**
Professeur à l'Université de Liége.

Dans le t. XIII. de ce journal pp. 225—233, Mr. F. J. Studnička développe les applications que l'on peut faire des déterminants cycliques à la résolution des équations cubiques et biquadratiques. Pour ce qui concerne ces dernières, il arrive, par une méthode élégante, à mettre les racines sous la forme

$$x = \sqrt{\beta'} + \sqrt{\beta''} + \sqrt{\beta'''},$$

β', β'', β''' étant les racines d'une équation cubique.

Je me propose de faire voir que, par le développement d'un autre déterminant du quatrième ordre, on parvient d' une manière plus directe encore à ce résultat.

Soit le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

Il est facile de voir que l'on a:

$$D = (a + b + c + d)(a + b - c - d)(a + c - b - d)(a + d - b - c).$$

Mais, d'un autre coté, ce déterminant développé donne:

$$D = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 2\,(ab - cd)^2 - 2\,(ac - bd)^2 \\ - 2\,(ad - bc)^2 - 4abcd,$$

ou, en ordonnant par rapport à a:

$$D = a^4 - 2a^2\,(b^2 + c^2 + d^2) + 8a\,.\,bcd + [b^4 + c^4 + d^4 \\ - 2\,(b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2)].$$

Soit $D = 0$. Comparons l'équation en a avec l'équation

$$x^4 + qx^2 + rx + s = 0. \qquad (1)$$

Pour identifier, il suffira de poser:

$$b^2 + c^2 + d^2 = -\frac{q}{2}; \; s = [b^4 + c^4 + d^4 - 2\,(b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2)],$$

$$r = 8bcd,$$

d'où l'on déduit

$$b^2+c^2+d^2=-\frac{q}{2},$$

$$b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2=\frac{1}{4}\left(\frac{q^2}{4}-s\right),$$

$$b^2c^2d^2=\frac{r^2}{64}.$$

On trouve ainsi l'équation réduite de Mr. Studnička:

$$z^3+\frac{q}{2}z^2+\frac{1}{4}\left(\frac{q^2}{4}-s\right)z-\frac{r^2}{64}=0. \qquad (2)$$

Si nous appelons z_1, z_2, z_3, les racines de (2), x prend la forme

$$x=\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}.$$

Les combinaisons des signes des radicaux donnent *huit* valeurs pour x.

Ceci s'explique aisément puisque (2) ne change pas quand on remplace dans (1), r par $-r$, c'est-à-dire quand on fait $x=-x$; mais il sera facile de déterminer les racines qui satisfont à (1) et qui sont au nombre de quatre, puisque, par la forme même de (1), cette équation ne peut avoir deux racines égales et de signes contraires.

Nous nous permettrons de signaler, en passant, les déterminants de la même forme que D, de degré n^2, symétriques et formés de n^2 déterminants cycliques du n ordre.

On peut facilement les décomposer en facteurs.

Ainsi soit

$$D_1=\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i \\ b & c & a & e & f & d & h & i & g \\ c & a & b & f & d & e & i & g & h \\ d & e & f & g & h & i & a & b & c \\ e & f & d & h & i & g & b & c & a \\ f & d & e & i & g & h & c & a & b \\ g & h & i & a & b & c & d & e & f \\ h & i & g & b & c & a & e & f & d \\ i & g & h & c & a & b & f & d & e \end{vmatrix}.$$

On trouve aisément,

$$\begin{aligned}D_1 = &[(a+b+c)+(d+e+f)+(g+h+i)]\\
&[(a+b+c)+\varepsilon(d+e+f)+\varepsilon^2(g+h+i)]\\
&[(a+b+c)+\varepsilon^2(d+e+f)+\varepsilon(g+h+i)]\\
&[(a+d+g)+\varepsilon(b+e+h)+\varepsilon^2(c+f+i)]\\
&[(a+d+g)+\varepsilon^2(b+e+h)+\varepsilon(c+f+i)]\\
&[(a+e+i)+\varepsilon(d+h+c)+\varepsilon^2(g+b+f)]\\
&[(a+e+i)+\varepsilon^2(d+h+c)+\varepsilon(g+b+f)]\\
&[(a+f+h)+\varepsilon(b+d+i)+\varepsilon^2(g+c+e)]\\
&[(a+f+h)+\varepsilon^2(b+d+i)+\varepsilon(g+c+e)],\end{aligned}$$

où $$\varepsilon^3 = 1.$$

Ces déterminants possèdent des propriétés curieuses: peut-être n'ont ils pas encore été étudiés.

Liége, le 17 Juin 1884.

Převedení polynomu $z^n - a_1 z^{n-1} + \ldots \pm a_n$ na produkt geometrických délek.

Napsal

Karel Küpper,
professor při c. k. německé vysoké škole technické v Praze.

Hodnoty $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nechť repraesentují libovolné pevné body v rovině, hodnota z pak proměnný bod její.

I. Produkt geometrických délek $(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$ nabývá všech hodnot, je-li z neobmezeně proměnnou t. j. proběhne-li bod z celou rovinu.

Důkaz. *a)* Argument onoho součinu se mění spojitě zároveň s hodnotou z; a sice mu přibude o $\nu . 2\pi$, proběhne-li bod z kladným směrem (t. j. v kladném směru úhlovém) uzavřenou čáru L, uvnitř které se nalézá ν oněch pevných bodů, aniž však některý se nalézá na ní.

b) Modul onoho součinu může patrně nabýti každé hodnoty Q. Zbývá ještě ukázati, že existuje vždy uzavřená čára svírající alespoň jeden z oněch pevných bodů a na níž se modul součinu na žádném místě neodchyluje o konečnou hodnotu od veličiny Q. Volíme-li pak tuto čáru za čáru L, o níž jednáno v *a)*, tu plyne ihned žádaná věta.