František Rádl

Poznámka k theorii rovnic differenciálních lineárních. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 41 (1912), No. 5, 557--561

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122086`

O českých mathematických pracích podal bibliografii a klassifikaci v „Répertoire bibliographique des sciences mathématiques“ (Paříž, 1894) a v Schouteově „Revue trimestrielle des publications mathématiques“. (Amsterodam 1894—98.)

Poznámka k theorii rovnic differenciálních lineárních.

Napsal Dr. **Frant. Rádl.**

(Dokončení.)

Rovnice (9) má všeobecný integrál opět tvaru (8) i možná dáti částečnému jejímu integrálu o jediném členu opět tvar $u_2 = \alpha_2 g_2 (\beta_2, \gamma_2)$, i lze vzorec (8) psáti ve formě

$$u = \frac{1}{\varphi_1} \int_{\psi_1, \chi_1} \left\{ \ldots \right\} dx + \alpha_n g_n (\beta_n, \gamma_n) + \alpha_{n-1} g_{n-1} (\beta_{n-1}, \gamma_{n-1}) + \ldots + \alpha_1 g_1 (\beta_1, \gamma_1).$$

Tím analogie se vzorcem (4) ještě líp vyniká.

4. Buďtež uvedeny některé případy zvláštní.

Jsou-li koefficienty a_k, b_k, c_k stálé, má také rovnice (6) stálé součinitele, z nichž ovšem také jistý počet jest na ostatních závislý. Hodnoty a_k, b_k, c_k lze snadno z daných koefficientů p vypočísti, neboť čísla p jsou jednoduchými funkcemi snadno stanovitelnými čísel a_k, b_k, c_k. Pro systém funkcí U_k, V_k, W_k platí rovnice

$$\frac{\partial y}{\partial U_k} = a_k, \frac{\partial z}{\partial U_k} = b_k,$$

tedy nejjednodušeji $y = a_k U_k - V_k$, $z = b_k U_k - W_k$, tak že $U_k = x$, $V_k = a_k x - y$, $W_k = b_k x - z$. Je-li mimo to $c_1 = c_2 = \ldots = c_h = 0$, jest $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_h = 1$, a posledních h členů v integrálu (8) má tvar

$$g_h (a_h x - y, b_h x - z) + g_{n-1} (a_{h-1} x - y, b_{h-1} x - z) + \ldots + g_1 (a_1 x - y, b_1 x - z),$$

neboť na př. $\int\limits_{a_{n-1},\, b_{n-1}} G_n(V_n, W_n)\, dx,$

kde G_n jest libovolná funkce, dává opět libovolnou funkci, na př. $g_n(V_n, W_n)$.

Budiž ještě uvedena rovnice o stálých koefficientech

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} + p_1 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y} + p_2 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2} + \ldots + p_n \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = F(x, y),$$

která vzniká z n operací

$$\frac{\partial z}{\partial x} + a_k \frac{\partial z}{\partial y}, \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

Poněvadž jak čísel a_k tak hodnot p_k jest n, mohou být koefficienty p_k vesměs libovolné. Ze závislosti p_k na a_k snadno poznáme, že čísla a_k jsou kořeny rovnice $a^n + p_1 a^{n-1} + p_2 a^{n-2} + \ldots + p_n = 0$, i můžeme užíti vzorce (8) pro kořeny realné vesměs různé, nebo některé stejné, nebo pro některé kořeny komplexní.

Jsou-li kořeny a_k vesměs realné různé, obdržíme dle (8)

$$z = \int\limits_{a_1}\int\limits_{a_2} \ldots \int\limits_{a_n} F\, dx + g_n(a_n x - y) + g_{n-1}(a_{n-1} x - y) + \ldots$$
$$+ g_1(a_1 x - y); \tag{10}$$

při tom na př. $\int\limits_{a_k} F\, dx$ značí $\int F(U_k, a_k U_k - V_k)\, dU_k$, kde V_k se pokládá při integraci za stálou, po integraci se dosadí pro

$$U_k = x, \quad V_k = a_k x - y.$$

Je-li na př. $a_1 = a_2 = a$, jest

$$\int\limits_{a} g(ax - y)\, dx = g(ax - y) \int\limits_{a} dx = (\alpha x + \beta y)\, g(ax - y),$$

kde α, β jsou libovolné konstanty.

Podobně v případě $a_1 = a_2 = \ldots = a_h = a$ zní posledních h členů integrálu (10)

$$(\mu_0 x^{h-1} + \mu_1 x^{h-2} y + \mu_2 x^{h-3} y^2 + \ldots + \mu_{h-1} y^{h-1})\, g_h(ax - y)$$
$$+ (\lambda_0 x^{h-2} + \lambda_1 x^{h-3} y + \ldots + \lambda_{h-2} y^{h-2})\, g_{h-1}(ax - y) + \ldots$$
$$+ (\alpha_0 x + \alpha_1 y)\, g_2(ax - y) + g_1(ax - y),$$

při čemž $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \mu_0, \mu_1, \ldots$ jsou čísla libovolná.

5. Nezávisle na předešlých úvahách vyšetřována v následujícím rovnice lineární s derivacemi partiálními o n proměnných řádu m^{ho} s koefficienty proměnnými, jejíž členy levé strany jsou vesměs řádu m^{ho}, pravá strana — „druhý člen“ — jest libovolná funkce všech n proměnných, totiž rovnice, kterou pišme ve tvaru

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial u}{\partial u_2}+\ldots+a_n\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^m = F(x_1, x_2, \ldots, x_n); \qquad (11)$$

na levé straně dlužno po rozvedení mocniny nahraditi k-té potence k-tými derivacemi, koefficienty pak pokládati za různé na sobě nezávislé funkce proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Udána tu methoda, dle níž možná stanoviti u této rovnice partikulární integrál, pocházející od funkce na pravé straně F. Přičteme-li integrál I rovnice bez druhého členu

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\ldots+a_n\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^m = 0,$$

obdržíme všeobecné řešení dané rovnice.

Abychom se vyhnuli rozvláčnosti, uvažujeme prozatím rovnici řádu 2^{ho} o dvou neodvisle proměnných

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2a(x, y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+b(x, y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=F(x, y). \qquad (12)$$

Buďtež dány dva na sobě nezávislé systemy rovnic

$$\begin{array}{ll} u = x & U = x \\ v = \varphi(x, y)' & V = \psi(x, y) \end{array}$$

a systemy k těmto inversní

$$\begin{array}{ll} x = u & x = U \\ y = \Phi(u, v)\,' & y = \Psi(U, V), \end{array}$$

mimo to jistá funkce $f(x, y)$. Uvažujme limitu

$$\lim_{h=0}\ \lim_{k=0} \frac{4}{h.k}\Big\{f\left[\tfrac{1}{2}(x+h)+\tfrac{1}{2}(x+k),\right.$$
$$\left.\tfrac{1}{2}\Phi(x+h, v)+\tfrac{1}{2}\Psi(x+k, V)\right]$$
$$-f[x+h, \Phi(x+h, v)]-f[x+k, \Psi(x+k, V)]+f(x,y)\Big\}.$$

Vymezíce posloupně pro $h = 0$, $k = 0$, obdržíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial U}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial U}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

tedy výraz téhož tvaru, jako levá strana rovnice dané (12).

Položíce tento výraz rovným dané funkci $F(x, y)$, hledejme obráceně původní funkci f, tedy integrál rovnice (12).

Relace

$$\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial U} = 2a, \quad \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial U} = b$$

určují oba transformační systemy $x = u$, $y = \Phi$, pak $x = U$, $y = \Psi$ a tedy i jejich inverse.

Řídíce se analogií s rovnicí $\frac{d^2y}{dx^2} = F(x)$, můžeme psáti

$$\begin{gathered} f\left[\tfrac{1}{2}(x + rh) + \tfrac{1}{2}(x + sk),\ \tfrac{1}{2}\Phi(x + rh, v)\right. \\ \left. + \tfrac{1}{2}\Psi(x + sk, V)\right] - f[x + rh, \Phi(x + rh, v)] \\ - f[x + sk, \Psi(x + sk, V)] + f\left[\tfrac{1}{2}(a + \overline{r-1}\,h)\right. \\ \left. + \tfrac{1}{2}(x + \overline{s-1}\,k),\ \tfrac{1}{2}\Phi(x + \overline{r-1}\,h, v) + \tfrac{1}{2}\Psi(x + \overline{s-1}\,k, V)\right] \\ = \tfrac{1}{4}h \,.\, k\, F\left[\tfrac{1}{2}(x + \overline{r-1}\,h) + \tfrac{1}{2}(x + \overline{s-1}\,k),\right. \\ \left. \tfrac{1}{2}\Phi(x + \overline{r-1}\,h, v) + \tfrac{1}{2}\Psi(x + \overline{s-1}\,k, V)\right]. \end{gathered}$$

Položíme-li $r = 1, 2, \ldots, p$, $s = 1, 2, \ldots, q$ a sečteme-li rovnice tak vzniklé, obdržíme na pravé straně

$$\frac{1}{4}\sum_1^p h \sum_1^q k\, F[\ldots]$$

a při přechodu k limitě

$$\begin{gathered} f(x, y) = \tfrac{1}{4}\int\int F\left[\frac{x_1 + x_2}{2},\ \tfrac{1}{2}\Phi(x_1, v)\right. \\ \left. + \tfrac{1}{2}\Psi(x_2, V)\right] dx_1\, dx_2 + I, \ [x_1 = x_2 = x]. \end{gathered}$$

Funkce v, V pokládáme při integraci za konstanty, po integraci dosadíme za ně příslušné hodnoty $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$. Jest též patrné, že proměnnou x rozkládáme tu na dvě části $\frac{x_1}{2}$, $\frac{x_2}{2}$ a při prvním přechodu limitním $h = 0$ jen část $\frac{x_1}{2}$ měníme, při druhém přechodu $k = 0$ jen část $\frac{x_2}{2}$, po integraci položíme opětně $x_1 = x_2 = x$. Z povahy této integrace plyne, že není tu možná integrand rozložit na sčítance a každý sčítanec zvlášť integrovat, nýbrž nutno integrovat funkci jakožto celek.

Je-li daná rovnice (11) řádu 1ho o 2 proměnných

$$\frac{\partial f}{\partial x} + a \frac{\partial f}{\partial y} = F(x, y),$$

obdržíme známý výsledek

$$f(x, y) = \int F[x, \Phi(x, \varphi)]\, dx + I,$$

kde transformační system určují rovnice

$$\begin{aligned} u &= x & x &= u \\ v &= \varphi(x, y), & y &= \Phi(u, v) \end{aligned}$$

a kde

$$\frac{\partial y}{\partial u} = a(x, y).$$

Zevšeobecnění pro řád m-tý a n proměnných jest samozřejmé. Tak obdržíme na př. při rovnici

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3a \frac{\partial^3 f}{\partial x^3 \partial y} + 3b \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + c \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = F(x, y)$$

$$f(x, y) = \tfrac{1}{8} \int\int\int F\left[\frac{x_1 + x_2 + x_2}{3}, \tfrac{1}{3}\Phi(x_1, \varphi)\right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{3}\Psi(x_2, \psi) + \tfrac{1}{3}X(x_3, \chi)\right] dx_1 dx_2 dx_3 + J, \; [x_1 = x_2 = x_3 = x],$$

kde tři relace

$$\frac{\partial y}{\partial u_1} + \frac{\partial y}{\partial u_2} + \frac{\partial y}{\partial u_3} = 3a$$

$$\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial y}{\partial u_2} + \frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial y}{\partial u_3} + \frac{\partial y}{\partial u_2}\frac{\partial y}{\partial u_3} = 3b$$

$$\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial y}{\partial u_2}\frac{\partial y}{\partial u_3} = c$$

určují tři transformační systémy

$$\begin{aligned} u_1 &= x & u_2 &= x & u_3 &= x \\ v_1 &= \varphi(x, y), & v_2 &= \psi(x, y), & v_3 &= \chi(x, y) \end{aligned}$$

a tedy i jejich inverse Φ, Ψ, χ.