Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Libický

O aequivalenci šroubových pohybů a šroubových sil

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 2, 88--121

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122051`

O aequivalenci šroubových pohybův a šroubových sil.

Dle Ballovy „Theory of screws“ napsal **A. Liblický**, professor v Roudnici.

V XVIII. ročníku tohoto časopisu uveřejněn jest článek: „Dynamická pohádka“ (pag. 149—169), obsahující překlad oslovení, kterým ředitel dublinské hvězdárny, prof. *R. St. Ball* zahájil schůze mathematicko-fysikalní sekce na sjezdu British Association v Manchestru r. 1887; v řeči té vyložena jest zajímavým způsobem v hlavních rysech nová theorie v mechanice, zvaná *theorií šroubův*, jež čím dále, tím více obrací k sobě zření všech, kteří se obírají theoretickou mechanikou. Překladatel této řeči Ballovy, prof. dr. A. Seydler, v připojeném připomenutí podotýká, že hodlá později jakožto doplněk k této úvaze podati tresť Ballova spisu: „Theory of screws“, čímž by obtížnější místa její doznala náležitého vysvětlení.

Bohužel nebylo mu dopřáno, provésti svůj úmysl; předčasná smrt tomu zabránila. Pokusil jsem se o to, zpracovati ve článku tomto počáteční kapitoly zmíněného díla Ballova (se zřetelem ku pozdějšímu pojednání téhož autora: Dynamics and Modern Geometry), jednak aby slib, daný čtenářům tohoto časopisu, nezůstal nesplněn, jednak abych přispěl k rozšíření známosti theorie Ballovy v kruzích, které se zajímají o každý pokrok věd mechanických.*)

1. Kinematika nás učí, že nejjednodušší pohyb, kterým lze neproměnnou prostorovou soustavu z jedné polohy převésti do druhé, jest obecně pohyb šroubový kolem určité osy v prostoru.**)

---

*) Není asi většího díla o theoretické mechanice, vydaného v novější době, v němž by theorie šroubů nedocházela náležitého povšimnutí; tak v II. vydání Schellovy: „Theorie der Bewegung und der Kräfte“ jest jí věnována 10. kapitola třetího dílu (pag. 211—235) a 8. kapitola dílu čtvrtého (pag. 571—581); též E. Budde ve své „Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme“ (1891) na mnohých místech k ní přihlíží. Nejúplnější vylíčení prací a method Ballových čte se ve spise: „Theoretische Mechanik starrer Systeme, herausgegeben von Harry Gravelius, Berlin, 1889“, který obsahuje téměř všechna do té doby vydaná pojednání Ballova.

**) Dr. A. Seydlera: „Theoretická mechanika“, pag. 140.

O pohybu tom známo jest, že vzniká složením dvou heterogenních pohybů: translace ve směru osy pohybu a rotace kolem této osy. Jest tedy pohyb šroubový pohybem složeným, při kterém body soustavy opisují oblouky různých šroubovic; všechny tyto šroubovice mají však společnou osu a stejnou výšku závitu. Ku znázornění tohoto pohybu můžeme použiti šroubu (v obyčejném slova smyslu) s přiměřeným stoupáním; myslíme-li si neproměnný útvar k matici jeho připevněný a šroub v prostoru tak umístěný, aby osa jeho s osou pohybu se stotožňovala, lze otočením matice kolem vřetena, jehož poloha v prostoru se nemění, převésti útvar z polohy původní do polohy nové. Jest zřejmo, že při pohybu takovém poměr elementární translace k elementární rotaci pro každý prvek časový v době, pokud pohyb trvá, jest stálým a roveň poměru úhrnné translace k úhrnné rotaci.

Bylo dříve obvyklo při vyšetřování rozličných problémů mechanických rozkládati všeobecný pohyb neproměnné soustavy v translaci a v rotaci; Ball sloučením obou těchto jednoduchých pohybův utvořil nový prvek kinematický: pohyb šroubový a stal se tak zakladatelem theorie, která k dalšímu rozvoji mechaniky nemálo přispěla.

Dospějeme pak k takovému pojímání pohybu šroubového touto úvahou: Při pohybu otáčecím probíhá každý bod soustavy oblouk kružnice, která osou rotace a bodem tím úplně jest ustanovena; určení trajektorie daného bodu soustavy při pohybu šroubovém není tak jednoduché. Tu jest třeba znáti kromě osy pohybu ještě výšku závitu šroubovice, dále musíme věděti, je-li křivka ta v pravo točivou (vystupuje-li totiž pro pozorovatele, který se dívá z vnější strany na válec, na němž si myslíme šroubovici navinutou, od levé ruky ku pravé) anebo v levo točivou. Osa pohybu i výška závitu jsou však společny všem bodům neproměnné soustavy, též jsou všechny šroubovice jen v jednom směru točivé; je-li tedy dána osa v prostoru a délka stanovící stejnou výšku závitu všech šroubovic, v udaném směru točivých, lze sestrojiti šroubovici, na níž se pohybuje kterýkoli daný bod útvaru. Z podstatných důvodů neužijeme přímo zmíněné výšky závitu h, nýbrž zavedeme tak zvanou redukovanou výšku šroubovice, t. j. poloměr kružnice, jejíž obvod se rovná výšce závitu. Má tudíž přímka v prostoru, daná co do polohy i směru, na níž kdekoli jest vnesena délka $\frac{h}{2\pi}$, pro pohyb šroubový zvláštní důležitosť; spojením tím určeny jsou totiž křivky, jichž oblouky pohybem svým opisují jednotlivé body neproměnného útvaru.

Přímku neomezenou, k níž přidružena jest určitá délka, nazývá Ball *šroubem* (screw); přímka jest *osou* šroubu a délka *výškou* neb *výstupem* (pitch) jeho.

V následujícím budeme označovati šrouby malými písmeny řeckými: α, β, γ, ..., jejich osy velkými písmeny latinskými: A, B, C,... a výšky písmenem p, k němuž připojíme co ukazovatele písmeno, značící příslušný šroub, tedy p_α, p_β, p_γ, ...

Aby šroub úplně byl určen, jest třeba znáti pět veličin; čtyři z nich stanoví osu, pátá výšku jeho.

Zbývá ještě přiměřeným způsobem vyznačiti, jsou-li šroubovice, na nichž se pohybují body soustavy, v pravo nebo v levo točivé. Za tím účelem přisuzujme výšce šroubu znaménko jakostné, a to v prvém případě $+$, ve druhém $-$; dle znaménka toho vneseme pak výšku od libovolného bodu osy ve směru buď kladném aneb záporném.

Pomocí šroubu lze pak výhodně stanoviti každý pohyb šroubový (twist); jest nám jen ještě udati veličinu, jíž by se snadno určiti mohla velikosť dráhy, opsané kterýmkoli bodem útvaru na příslušné šroubovici. K tomu zvolil Ball amplitudu rotace ϑ, jejíž spojení s určitou translací τ jest pohybu šroubovému aequivalentní, a nazval tuto metrickou veličinu *amplitudou šroubového pohybu.* Amplituda ta jest kladná neb záporná dle toho, děje-li se rotace ϑ ve směru kladném (pro pozorovatele, zpříma do směru osy postaveného, od pravé ruky k levé) neb ve směru záporném.

Z toho, co o pohybu šroubovém z počátku bylo pověděno, plyne bezprostředně, že platí

$$\frac{\tau}{\vartheta} = \frac{h}{2\pi} = p_\alpha;$$

tudíž můžeme o složkách toho pohybu vysloviti:

translace = výšce šroubu $\times$ amplitudou rotace.

Tedy značí výška šroubu též velikosť translační složky šroubového pohybu, má-li jeho rotační složka amplitudu rovnou jednotce. Pohyb šroubový redukuje se na pouhou rotaci, jestli výška šroubu se rovná nulle, a na pouhou translaci, je-li výška ta nekonečně velká a zároveň amplituda rovna nulle.

Ve shodě se zavedeným již poznačením chceme amplitudy šroubových pohybů znamenati malými písmeny latinskými: $a, b, c, \ldots$ a pohyby šroubové symboly (a, α), (b, β), $(c, \gamma) \ldots$ Aby pohyb šroubový úplně byl určen, jest k pěti veličinám, kterými stanoven jest šroub, ještě připojiti šestou: amplitudu pohybu.

Zvláštní důležitosť při vyšetřování všeobecného pohybu nepromenné soustavy mají nekonečně malé pohyby šroubové; jde-li totiž o pohyb aequivalentní v užším smyslu s libovolným pohybem takové soustavy, lze v každém okamžiku nalézti pohyb dle nějakého šroubu, který se v ničem neliší od skutečného pohybu soustavy při přechodu z jedné polohy její do polohy nekonečně blízké.

Šroub takový nazýváme *okamžitým*; výška jeho udává též poměr mezi rychlostí složky translační u a úhlovou rychlostí složky rotační ω. Při pohybu kolem okamžitého šroubu opisuje bod soustavy, jehož vzdálenosť od osy jest r, prvek šroubovice, odchylený od osy o úhel φ, daný vzorcem:

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{p_\alpha}{r};$$

šroubová rychlosť toho bodu pak jest:

$$v^2_r = u^2 + r^2\omega^2 = \omega^2 (p^2_\alpha + r^2).$$

Kdykoli budeme příště mluviti o šroubech, budeme jimi vždy vyrozumívati šrouby okamžité.*)

2. Známá analogie mezi geometrií pohybu a geometrií sil,

*) Jest známo, že s každým nekonečně malým pohybem šroubovým souvisí lineární komplex, utvořený všemi přímkami, které na trajektoriích svých bodů kolmo stojí. Osou toho komplexu jest okamžitá osa pohybu a parametrem jeho podíl $u : \omega$; představuje tedy šroub též vytčený komplex přímek. V theorii Ballově jest komplex ten prvkem prostorovým, jako jest jím v geometrii Plückerově přímá čára.

dle níž nekonečně malé rotaci odpovídá síla (postupná) a nekonečně malé translaci dvojice sil, poukazuje k tomu, že dospějeme k podobným výsledkům, zavedeme-li do geometrie sil sílu šroubovou co příčinu pohybu šroubového. Dle první základní věty o aequivalenci sil v prostoru*) jest soustava sil rovnomocná výslednici R a výsledné dvojici M a to nekonečně mnohým způsobem. Obecně jest směr výslednice R v jistém úhlu φ ku směru výsledného osového momentu nakloněn; výraz $MR \cos \varphi$ jest pak pro všechny redukce stálým, jest to dle Somova invariant dané soustavy sil. Jest však jedna přímka v prostoru, zvaná centrální osou soustavy sil, pro kterou má příslušný moment M_0 týž směr jako výslednice R.

Soubor síly a dvojice tak položené, že rovina její jest kolmá ku směru síly, pokládáme za nový útvar dynamický, který nazveme *silou šroubovou* (wrench)**) neb dle Plückera *dynamou*. Dvojici M_0 tvořící součásť síly šroubové, lze vyjádřiti součinem z výslednice R a nějakého ramene p; i má lineární veličina $p = \frac{M_0}{R}$ vzhledem k síle šroubové týž význam, jaký má délka $p_\alpha = \frac{u}{\omega}$ vzhledem k nekonečně malému pohybu šroubovému. Sílu šroubovou můžeme tedy podobně stanoviti šroubem t. j. přímkou, k níž přidružena jest jakási délka, a určitou veličinou metrickou. Osou šroubu jest centrální osa soustavy sil, jíž jest síla šroubová aequivalentní; výškou jeho jest délka stanovící podíl $\frac{M_0}{R}$: veličinou metrickou pak jest velikosť síly R, kterou budeme zváti *intensitou* síly šroubové. O obou součástkách síly šroubové platí tedy:

$$\text{dvojice} = \text{výšce šroubu} \times \text{intensitou}.$$

Zavedeme-li invariant $J = RM_0$ rovnomocné soustavy sil, můžeme též psáti:

---

*) Dr. A. Seydlera: Theoretická mechanika, pag. 276.

**) Dovoluji si zde poukázati k nemalým obtížím, které způsobuje překládání terminologie Ballovy; pro slova: twist, wrench a j. asi sotva se najdou v naší mateřštině terminy tak krátké a případné.

$$p_\alpha = \frac{J}{R^2}.$$

Zvláštní případy síly šroubové jsou: síla postupná, rovná-li se výška příslušného šroubu nulle a dvojice sil, je-li tato výška nekonečně velká a zároveň intensita rovna nulle.

3. Než přikročím k vlastnímu předmětu této úvahy, jest mi ještě vysvětliti, co zoveme *momentem šroubového pohybu* neb *šroubové síly*. Dle Möbiusa*) jest moment nekonečně malé rotace a vzhledem ku přímce P vyjádřen délkou, kterou obdržíme, promítneme-li na P dráhu, opsanou při pohybu kterýmkoli, původně v přímce P ležícím bodem neproměnné soustavy. K určení tohoto momentu zvolme na přímce P bod M, jenž nejblíže se nalézá k ose A dané rotace; nazveme-li d nejkratší vzdálenosť přímek A a P a ε úhel jejich positivních směrů (AP), jest ad dráha, kterou rotací a vykoná bod M a $-ad \sin \varepsilon$ průmět této dráhy na přímku P. Znaménko — toho výrazu značí, že průmět dráhy bodu M při kladné rotaci (od pravé ruky k levé) padne do negativného směru přímky P.

Podobným způsobem ustanovíme moment nekonečně malého pohybu šroubového (a, α) vzhledem ku přímce P; poněvadž totiž dráhy, které opisují při tomto pohybu jednotlivé body přímky P, k soustavě náležející, mají na tuto přímku stejné průměty, jest tímto stálým průmětem zmíněný moment dán. Pohyb bodu M, na přímce P nejblíže k ose A položeného, rozložíme za tím účelem v translaci ap_α ve směru osy A a v rotaci ad v rovině kolmé k A. Průmět translační složky na přímku P jest patrně $ap_\alpha \cos \varepsilon$ a průmět rotační složky na touže přímku jako výše $-ad \sin \varepsilon$; poněvadž průmět výsledného pohybu rovná se algebraickému součtu průmětův obou složek, obdržíme proň výraz

$$a\,(p_\alpha \cos \varepsilon - d \sin \varepsilon).$$

Moment šroubového pohybu (šroubové síly) (a, α) vzhledem ku přímce P rovná se tedy součinu z amplitudy (intensity) a dvojčlenu $p_\alpha \cos \varepsilon - d \sin \varepsilon$, závislého pouze na výšce šroubu

*) Über die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen, v Crelle-ově Journalu, XVIII. svaz., § 12.

α a na vzájemné poloze přímek A a P; za dvojčlen ten zavedeme si kratší poznačení: $[\alpha, P]$.

Je-li přímka P osou nějaké rotace, jejíž amplituda dána jest délkou p, můžeme podobně součin

$$pa\,(p_\alpha \cos \varepsilon - d \sin \varepsilon) \qquad (1)$$

zváti momentem šroubového pohybu (a, α) vzhledem k rotaci p. Značí-li však délka p sílu, mající směr přímky P, jest, jak netřeba šíře vykládati, výrazem tím stanovena velikosť elementární práce té síly, působí-li na nějaký bod nepromĕnné soustavy, jež má pohyb šroubový (a, α).

Přikročíme nyní k vyšetření nejvšeobecnějšího momentu, totiž *vzájemného momentu dvou šroubových pohybů* (*šroubových sil*) (a, α) a (b, β). K tomu cíli nahraďme šroubový pohyb (b, β) aequivalentními třemi rotacemi a utvořme součet momentů pohybu (a, α) vzhledem k těmto rotacím. Jest tu především rotační složka pohybu (b, β), jejíž amplituda jest b a osa B; nazveme-li teď φ úhel os A a B a d nejkratší jich vzdálenosť, obdržíme dle (1) pro moment pohybu (a, α) vzhledem k této rotaci výraz

$$a\,b\,(p_\alpha \cos \varphi - d \sin \varphi).$$

Za složku translační bp_β pohybu (b, β), mající směr osy B, položme pak dvojici rotační, jež leží v rovině kolmé ku B. Osu jedné z nekonečně malých rotací, tvořících tuto dvojici, volme v ose obou mimoběžek A a B; osa druhé rotace buď v uvedené rovině vzdálena od osy prvé o výšku p_β. Upotřebíme-li známé věty, že velikosť translace, rovnomocné určité dvojici, rovná se součinu ze vzdálenosti os obou rotací a společné jejich amplitudy,*) nalezneme v našem případě pro tuto amplitudu hodnotu $\dfrac{bp_\beta}{p_\beta} = b$.

Moment šroubového pohybu (a, α) vzhledem ku první rotaci zavedené dvojice jest patrně roveň nulle, neboť ve vzorci (1) $\sphericalangle\, \varepsilon = \dfrac{\pi}{2}$ a $d = 0$; moment téhož pohybu ke druhé rotaci, jejíž

*) Dr. A. Seydlera: Theoretická mechanika, pag. 66. (upraveno pro pohyby nekonečně malé).

směr se směrem translace souhlasí, má hodnotu $abp_\beta \cos\varphi$, poněvadž tu sice opět $\sphericalangle\, \varepsilon = \frac{\pi}{2}$, nejkratší vzdálenosť os však jest $p_\beta \cos\varphi$. Součet tří momentův, takto stanovených, totiž výraz

$$ab\,[(p_\alpha + p_\beta)\cos\varphi - d\sin\varphi] \qquad (2)$$

vyjadřuje hledaný vzájemný moment obou šroubových pohybův (šroubových sil) (a, α) a (b, β). Značí-li však (a, α) pohyb šroubový, (b, β) pak sílu šroubovou, jest výrazem tím dána velikosť práce, kterou vykoná síla, působící dle šroubu β na těleso, jež se pohybuje kolem šroubu α.

Moment dvou šroubových pohybů (šroubových sil) rovná se tedy součinu z obou amplitud (intensit) a činitele $(p_\alpha + p_\beta)\cos\varphi - d\sin\varphi$, který závisí pouze na výškách šroubů α a β a na vzájemné poloze jejich os. Nazývejme důležitý tento výraz *vzájemným momentem šroubů α a β* a poznačme ho $[\alpha, \beta]$.*) Sluší zvlášť vytknouti, že uvedený činitel jest souměrný vzhledem k α a β; vzájemný moment dvou šroubů se tedy nemění, vyměníme-li spolu oba šrouby.

Jsou-li oba šrouby o společné ose (šrouby koaxialní), má vzájemný jich moment hodnotu $p_\alpha + p_\beta$; jest-li tu ještě $p_\alpha = p_\beta$, obdržíme $2p_\alpha$ co hodnotu momentu šroubu vzhledem k sobě samému.

Dva šrouby, které příslušejí šroubovým pohybům, jichž vzájemný moment roveň jest nulle, zovou se dle Balla *přidruženými* (reciprocal screws).**) Tudíž nekonečně malé pošinutí dle jednoho ze dvou přidružených šroubů nemůže vykonati žádnou práci proti šroubové síle, dle druhého působící.

Podmínečná rovnice, aby šrouby α a β byly přidruženými, zní pak:

$$ab\,[(p_\alpha + p_\beta)\cos\varphi - d\sin\varphi] = 0.$$

Není-li a nebo b rovno nulle, můžeme říci:

Dva šrouby, jichž osy se protínají, jsou přidruženými,

*) Ball jmenuje ho *virtualním koefficientem* dvou šroubů; viz: Theory of Screws, pag. 13.

**) Ibid. pag. 21.

jestli buď osy ty na sobě kolmo stojí neb jestli součet jejich výšek se rovná nulle.

Dva šrouby, jichž osy jsou rovnoběžny neb v jednu splývají, jsou přidruženými, jestli součet jejich výšek roveň jest nulle.

Dva šrouby, jichž výšky se rovnají nulle, jsou přidruženými, jestli se osy jejich protínají neb jsou-li osy ty rovnoběžny.

Rovná-li se a neb b nulle, což se může jen státi, je-li zároveň p_α neb p_β nekonečně velké, bude výraz (2) hodnoty neurčité; uvážíce však, že mají ap_α nebo bp_β určitou hodnotu konečnou (velikosť translace, ve kterou v tom případě pohyb šroubový přechází), přesvědčíme se o správnosti vět:

Dva šrouby, jichž výšky jsou nekonečně velké, jsou vždy přidruženými.

Dva šrouby, jichž osy na sobě kolmo stojí, jsou přidruženými, je-li výška jednoho z nich nekonečně velká.

4. Z theorie momentů známa jest věta: Máme-li několik rotací, které se vzájemně ruší, jest součet momentů těchto rotací vzhledem k libovolné ose roveň nulle; obdobnou větu můžeme vysloviti též o pohybech šroubových. Mějme šroubové pohyby: (a_1, α_1), (a_2, α_2), ... (a_n, α_n), které převádějí neproměnný útvar z určité polohy do téže polohy zpět a mimo ně libovolnou přímku R. Každý z těchto pohybů šroubových rozložme ve tři rotace týmž způsobem, jak jsme učinili výše, ustanovujíce vzájemný moment dvou pohybův; i obdržíme soustavu rotací, která jest aequivalentní nulle. Nazveme-li d_m nejkratší vzdálenosť osy A_m pohybu (a_m, α_m) a přímky R, φ_m úhel jejich, bude součet momentů tří rotací, rovnomocných pohybu (a_m, α_m) vzhledem ku přímce R dán výrazem

$$a_m (p_{\alpha_m} \cos \varphi_m - d_m \sin \varphi_m) = a_m [\alpha_m, R];$$

použijíce věty, na počátku tohoto oddílu pronešené, můžeme psáti:

$$a_1 (p_{\alpha_1} \cos \varphi_1 - d_1 \sin \varphi_1) + a_2 (p_{\alpha_2} \cos \varphi_2 - d_2 \sin \varphi_2) + \ldots = 0 \tag{a}$$

neb kratčeji

$$\sum_1^n a_m [\alpha_m, R] = 0.$$

Poněvadž jest polygon všech rotací, ve které jsme dané pohyby šroubové rozvedli, uzavřený, obdržíme promítnutím jeho na přímku R rovnici

$$a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2 + \ldots = 0,$$

uvážíme-li ještě, že obě rotace dvojice, která jest aequivalentní translační složce každého šroubového pohybu, stojí na R kolmo.

Dejme nyní tomu, že přímka R jest osou šroubového pohybu (r, ϱ); násobíme-li poslední rovnici výškou p_ϱ a přičteme-li pak k (a), vyjde nám:

$$a_1 [(p_{\alpha_1} + p_\varrho) \cos \varphi_1 - d_1 \sin \varphi_1] + a_2 [(p_{\alpha_2} + p_\varrho) \cos \varphi_2 - d_2 \sin \varphi_2] + \ldots = 0,$$

což lze také psáti, připojíme-li ještě činitele r:

$$\sum_1^n a_m r [\alpha_m, \varrho] = 0. \qquad (3)$$

Můžeme tudíž vysloviti větu:

Máme-li soustavu šroubových pohybův, které se vzájemně ruší, rovná se součet všech momentů těchto pohybů vzhledem k jinému libovolnému pohybu šroubovému nulle.

Větu tu lze ještě tímto způsobem rozšířiti. Buďte dány dvě rovnomocné soustavy šroubových pohybův:

$$(a_i, \alpha_i)\ (i = 1, 2, 3, \ldots m),\ (b_k, \beta_k)\ (k = 1, 2, 3, \ldots n)];$$

obě převádějí neproměnný útvar z téže polohy začáteční v tutéž polohu konečnou. Použijme nyní věty, jejíž správnosť bezprostředně jest zřejmá: Dva pohyby šroubové o stejných osách a výškách, jichž amplitudy jsou co do absolutní hodnoty stejny, ale protivnými znaménky označeny, jsou aequivalentní nulle: změníme-li tedy u všech pohybů druhé soustavy znaménka amplitud, převede soustava, skládající se z pohybů (a_i, α_i), $(-b_k, \beta_k)$ útvar z polohy začáteční do téže polohy zpět, i obdržíme dle věty předešlé rovnici

$$\sum_1^m a_i r [\alpha_i, \varrho] + \sum_1^n (-b_k) r [\beta_k, \varrho] = 0$$

aneb

$$\sum_1^m a_i \, r\,[\alpha_i, \varrho] = \sum_1^n b_k \, r\,[\beta_k, \varrho]; \tag{4}$$

t. j. máme-li dvě rovnomocné soustavy šroubových pohybů a utvoříme-li součty momentů každé soustavy vzhledem k libovolnému šroubu jinému, jsou součty ty sobě rovny.

Značí-li (a_i, α_i), (b_k, β_k) soustavy sil šroubových, (r, ϱ) pak pohyb šroubový, praví nám rovnice (4), že elementární práce dvou rovnomocných soustav sil šroubových jest při stejném šroubovém pohybu neproměnného útvaru, na který soustavy ty působí, stejná.*)

5. Předeslav výklad hlavních pojmův a základních vět theorie šroubův, přikročím ku vyhledání nejjednoduššího pohybu, aequivalentního dvěma neb několika daným pohybům šroubovým. Počnu s případem nejjednodušším: dané pohyby šroubové (a_1, α_1), (a_2, α_2), ... (a_n, α_n) mají společnou osu. Snadno poznáme, že výsledný pohyb jest opět šroubový o téže ose; jeho translační složka rovná se součtu translací jednotlivých složek a amplituda rotační složky součtu všech amplitud. Jest tedy výška výsledného šroubu dána výrazem

$$P_\alpha = \frac{\sum_1^n a_m p_{\alpha_m}}{\sum_1^n a_m}. \tag{5}$$

Z toho plyne jednoduché sestrojení této výšky. Od libovolného bodu O společné osy vnesme všechny výšky daných šroubů: p_{α_1}, p_{α_2}, ..., každému koncovému bodu přisuďme koefficient, úměrný příslušné amplitudě a sestrojme součet této soustavy bodů týmž způsobem, kterým se stanoví střed hmotný soustavy hmotných bodův. Obdržíme takto bod, jehož vzdálenosť od bodu O jest hledanou výškou. Pomíjím zde případy zvláštní, ve kterých pohybem výsledným jest pouhá translace neb rotace; podmínky, za kterými nastává jedno neb druhé, lze poznati bezprostředně ze vzorce (5).

Podobně určíme pohyb rovnomocný několika pohybům šroubovým: (a_1, α_1), (a_2, α_2) .... (a_n, α_n), jichž osy jsou rovnoběžné;

*) Srovnej Dr. A. Seydlera: Theoretická mechanika, § 83.

výsledný pohyb bude i tu obecně šroubový a ustanoví se takto: Rotační složky těchto pohybů složíme v jedinou rotaci, jejíž amplituda rovná se součtu amplitud všech složek a jejíž osa jest s danými osami rovnoběžná; polohu osy ustanovíme podobně jako vyhledáváme výslednici rovnoběžných sil. Protneme tedy všechny osy libovolnou rovinou, každý bod průsečný opatříme koefficientem, úměrným příslušné amplitudě rotace, a sečteme tyto body. Rovnoběžka k osám vedená bodem, stanovícím součet pomocné soustavy bodů, jest osou výsledného pohybu. Do té přeložíme ještě složky translační daných pohybů šroubových, jejich arithmetický součet jest translační složkou výsledného pohybu. Výška jeho šroubu jest opět určena vzorcem (5). Sestrojení to platí jen pro případ, že Σa_m se nerovná nulle; je-li $\Sigma a_m = 0$, vychází jako součet uvedené soustavy bodů bod úběžný. Tudíž jest osa výsledného pohybu přímka úběžná a výška jeho šroubu nekonečně velká; výsledný pohyb jest translací.

6. Složitější případ nastává, jsou-li osy daných šroubových pohybů mimoběžny; obmezíme se nejprve na dva pohyby: (a, α) a (b, β). Nejkratší vzdálenosť jejich os A a B buď d a úhel $(AB) = \varphi$.

Osa výsledného pohybu jest patrně okamžitou osou centrální soustavy nekonečně malých pohybův, ve které lze šroubové pohyby (a, α), (b, β) rozložiti, totiž dvou rotací a, b a dvou translací ap_α, bp_β. Použijeme-li úvahy, obsažené ve Seydlerově: „Theoretické mechanice" (pag. 144), která o tom jedná, jak se vyhledá výsledná rychlosť dané soustavy rychlostí postupných a otáčecích, stanovíme v tomto případě pohyb výsledný takto:

Sestrojme nejprve rovnoběžník $MJKL$ (viz obr. 1.) nekonečně malých rotací a a b;*) úhlopříčnou jeho MK určena jest amplituda c, již má rotační složka pohybu výsledného. Osa C toho pohybu jest s úhlopříčnou MK rovnoběžná, tudíž kolmá na ose Z obou mimoběžek A a B. Veďme nyní rovinu Γ, procházející přímkou Z kolmo ke směru osy C; rovinu tu protínají osy A, B, C v bodech M, N, O, i jest $MN = d$.

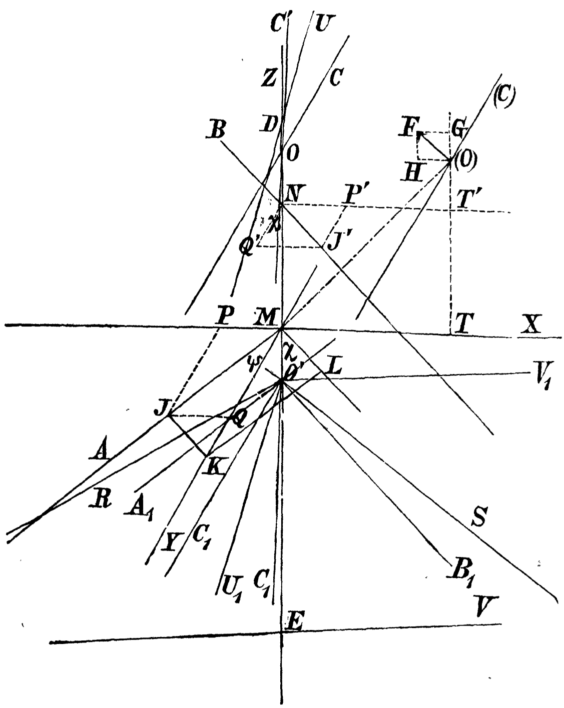
Každou z obou rotací a a b, které jsou znázorněny dél-

*) Rovnoběžník ten lze sestrojiti kdekoliv, poněvadž jde jen o velikosť amplitudy c a směr osy C.

kami MJ a NJ', vnesenými na příslušných osách od bodů M a N, rozložme ve dvě složky k sobě kolmé; osy jedněch složek jsou rovnoběžny s C, osy druhých leží v rovině Γ kolmo ku C. Majíce náležitý zřetel ke směru těchto složek, obdržíme pro ně výrazy:

$$MQ = a \cos \psi, \qquad MP = -a \sin \psi;$$
$$NQ' = b \cos \chi, \qquad NP' = b \sin \chi,$$

jsou-li ψ a χ úhly, které tvoří osa C s osami A a B. Podobně každou z translací ap_α a bp_β rozložíme ve dvě složky, mající



Obr. 1.

směry os uvedených složek rotací a a b; složky první translace jsou $ap_\alpha \cos \psi$ a $-ap_\alpha \sin \psi$, druhé: $bp_\beta \cos \chi$ a $bp_\beta \sin \chi$.

Polohu bodu O, kterým prochází výsledná osa C rovnoběžně k úhlopříčně MK určíme z podmínky, že bod ten nemůže míti žádného pohybu v rovině Γ; musí se tedy vzájemně rušiti pohyby bodu (O), které by způsobily translační složky $-ap_\alpha \sin\psi$ a $bp_\beta \sin\chi$ a rotační $a\cos\psi$ a $b\cos\chi$.

V rovině Γ zaveďme nyní soustavu souřadnic pravoúhlých, jejímž počátkem jest bod M, jednou osou přímka Z, jejíž positivní směr jde od M ku N; positivní směr druhé osy X volme tak, abychom jej positivní rotací převedli v positivní směr osy Z. Bod (O), jehož souřadnice v této soustavě buďtež x a z, má následkem rotace $a\cos\psi$ ve směrech X a Z pošinutí:

$$(O)H = -a\cos\psi\,.\,z \qquad \text{a} \qquad (O)G = a\cos\psi\,.\,x$$

a následkem rotace $b\cos\chi$ v týchž směrech pošinutí:

$$-b\cos\chi\,(z-d) \qquad \text{a} \qquad b\cos\chi\,.\,x.$$

Poněvadž obě translace $-ap_\alpha \sin\psi$ a $bp_\beta \sin\chi$ jsou rovnoběžné s osou X, máme k určení polohy bodu (O) tyto dvě rovnice:

$$-az\cos\psi - b(z-d)\cos\chi - ap_\alpha \sin\psi + bp_\beta \sin\chi = 0,$$
$$ax\cos\psi + bx\cos\chi = 0.$$

Vzhledem k relacím:

$$\begin{aligned} a\sin\psi &= b\sin\chi, \\ c &= a\cos\psi + b\cos\chi, \end{aligned} \tag{6}$$

které plynou z trojúhelníka MJK, můžeme dáti rovnicím těm tvar:

$$\begin{aligned} cz &= bd\cos\chi + (p_\beta - p_\alpha)\, b\sin\chi, \\ cx &= 0. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice jde, že $x = 0$, t. j. bod O nalézá se na ose Z, což již předem bylo lze očekávati. V rovnici prvé zavedeme pomocný úhel ω, pro který platí:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{d}{p_\beta - p_\alpha}, \tag{7}$$

i obdržíme z ní po několika snadných přeměnách:

$$z = d\,\frac{b\sin(\omega + \chi)}{c\sin\omega}. \tag{8}$$

Nahradíme-li na pravé straně úhel χ rozdílem $\varphi - \psi$ a $\frac{b}{c}$ poměrem $\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$, bude

$$z = d\,\frac{\sin\psi\sin(\omega + \varphi - \psi)}{\sin\varphi\sin\omega},$$

aneb, položíme-li ještě

$$\frac{d}{\sin\varphi\sin\omega} = 2m, \tag{9}$$

konečně

$$z = 2m\sin\psi\sin(\omega + \varphi - \psi). \tag{8a}$$

Délku $2m$ lze na základě rovnice (7) též vyjádřiti výrazy:

$$2m = \frac{p_\beta - p_\alpha}{\sin\varphi\cos\omega} = \frac{\sqrt{d^2 + (p_\beta - p_\alpha)^2}}{\sin\varphi}, \tag{9a}$$

dle toho, vyloučíme-li z (9) pomocí té rovnice buď d aneb úhel ω.

Translační složku výsledného pohybu cp_γ stanoví podmínka, že bod O může míti jen postupný pohyb ve směru osy C; pohyb ten vzniká translacemi $ap_\alpha \cos\psi$ a $bp_\beta \cos\chi$ a rotacemi $-a\sin\psi$ a $b\sin\chi$. Poněvadž souřadnicí z bodu O dána jest vzdálenosť jeho od osy rotace MP a rozdílem $z - d$ vzdálenosť téhož bodu od osy rotace NP', zjednáme si rovnici:

$$cp_\gamma = ap_\alpha\cos\psi + bp_\beta\cos\chi - az\sin\psi + (z - d)\,b\sin\chi,$$

aneb, užijeme-li prvé z rovnic (6):

$$cp_\gamma = ap_\alpha\cos\psi + bp_\beta\cos\chi - bd\sin\chi. \tag{10}$$

I do této rovnice zavedeme úhel ω; přičteme-li a odečteme-li na pravé straně $bp_\alpha\cos\chi$, obdržíme:

$$cp_\gamma = p_\alpha(a\cos\psi + b\cos\chi) + b[(p_\beta - p_\alpha)\cos\chi - d\sin\chi],$$

aneb se zřetelem ke druhé z rovnic (6) a k rovnici (7):

$$p_\gamma - p_\alpha = d\,\frac{b\cos(\omega + \chi)}{c\sin\omega}, \tag{11}$$

čili dle (9):

$$p_\gamma - p_\alpha = 2m \sin\psi \cos(\omega + \varphi - \psi). \qquad (11a)$$

Úhel ψ, ve vzorcích (8a) a (11a) se vyskytující, vyhledáme z úměry:

$$a : b = \sin(\varphi - \psi) : \sin\psi.$$

Výsledek dosavadního vyšetřování můžeme zahrnouti ve větu:

Dva pohyby šroubové (a, α), (b, β) dle mimoběžných os A a B, jež spolu uzavírají úhel φ a jichž nejkratší vzdálenosť jest d, jsou aequivalentní pohybu šroubovému (c, γ), jehož amplituda c rovná se geometrickému součtu daných amplitud a a b: pohybu tomu příslušný šroub má výšku, danou vzorcem (11) a osa jeho C protíná osu mimoběžek A a B kolmo v bodě, jehož vzdálenosť od osy A stanoví vzorec (8); mimo to jest osa ta odchýlena od os A a B o úhly, jichž sinusy jsou úměrny amplitudám b a a.

Podobná věta platí též o skládání sil šroubových; třeba jen slova: pohyb šroubový, amplituda zaměniti za: síla šroubová, intensita.*)

7. Polohu bodu O, ve kterém výsledná osa C protíná osu mimoběžek A a B, můžeme též určiti poměrem ζ toho bodu vzhledem k bodům M a N jako bodům základním. Vzdálenosť z_1 bodu O od osy B jest totiž:

$$z_1 = z - d = d\,\frac{\sin\psi \sin(\omega + \varphi - \psi) - \sin\varphi \sin\omega}{\sin\varphi \sin\omega};$$

použijeme-li známého vzorce goniometrického:

$$2 \sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta),$$

obdržíme pro tuto vzdálenosť nejprve:

$$z_1 = m\,[\cos(\omega + \varphi - 2\psi) - \cos(\varphi - \omega)]$$

a konečně

$$z_1 = 2m \sin(\varphi - \psi) \sin(\psi - \omega).$$

Tudíž hledaný poměr vyjádřen jest výrazem:

*) Táž poznámka vztahuje se i ku všem následujícím oddílům tohoto pojednání.

$$\zeta = \frac{z}{z_1} = \frac{\sin\psi \sin(\omega + \varphi - \psi)}{\sin(\varphi - \psi)\sin(\psi - \omega)}. \tag{12}$$

Ze vzorce toho vychází, že poloha osy C závisí na úhlu ψ a tím i na hodnotě poměru amplitud $b:a$. Každému úhlu ψ odpovídá jediná osa C; měníme-li tento úhel, ponechávajíce oba dané šrouby v téže poloze, mění se také poloha osy C. I naskytá se tu otázka: jaké jest geometrické místo os C, příslušících všem hodnotám úhlu ψ od 0 do π. Místem tím bude patrně plocha přímková; bude nyní naší úlohou, vyšetřiti tuto plochu, která má v theorii šroubů nemalou důležitosť.

Některé vlastnosti hledané plochy plynou bezprostředně z rovnice (12). Položíme-li na pravé straně této rovnice úhel $\omega + \varphi - \psi$ za ψ, obdržíme pro poměr ζ tutéž hodnotu; tudíž bodem O osy Z procházejí dvě osy C, z nichž jedna přísluší úhlu ψ, druhá úhlu $\omega + \varphi - \psi$.

Ve dvou případech obě ty osy splývají v jednu, poprvé, jestli

$$\psi' = \omega + \varphi - \psi'$$

čili

$$\psi' = \frac{\omega + \varphi}{2}.$$

Vložíme-li tuto hodnotu do vzorce (12), obdržíme pro poměr ζ_u bodu D, ve kterém taková osa U protíná osu Z, výraz:

$$\zeta_u = \frac{\sin^2 \frac{\varphi + \omega}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi - \omega}{2}};$$

délku MD stanovíme pak z rovnice (8a) vzorcem:

$$MD = 2m \sin^2 \frac{\varphi + \omega}{2}.$$

Po druhé splývají obě osy C v jedinou, jestli

$$\psi'' = \pi + (\omega + \varphi - \psi''),$$

čili

$$\psi'' = \frac{\pi}{2} + \frac{\omega + \varphi}{2};$$

bod E, ve kterém tato osa V protíná osu Z, dán jest poměrem:

$$\zeta_v = \frac{\cos^2 \frac{\varphi + \omega}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi - \omega}{2}};$$

pro délku ME pak vychází:

$$ME = -2m \cos^2 \frac{\varphi + \omega}{2}.$$

Promítneme-li všechny osy C na rovinu kolmou ku Z, obdržíme svazek paprskový; přičteme-li k úhlu φ, který spolu uzavírají průměty A_1 a B_1 obou os A a B, úhel ω, sestrojený na základě rovnice (7) z daných veličin d, p_α a p_β, budou patrně průměty U_1 a V_1 os U a V půliti úhel $\varphi + \omega$ a jeho úhel vedlejší. Obě osy C, týmž bodem O osy Z procházející, mají pak průměty souměrně položené vzhledem k U_1 a V_1. Mezi těmi různými páry os C nalezneme také jeden, jehož osy na sobě kolmo stojí; příslušné úhly ψ mají tu hodnotu $\frac{\varphi + \omega}{2} \pm \frac{\pi}{4}$.
Tyto osy R a S procházejí bodem O' osy Z, který jest určen poměrem:

$$\zeta_r = \frac{\cos(\varphi + \omega)}{\cos(\varphi - \omega)}; \tag{13}$$

délku MO' vyhledáme pak opět ze vzorce (8a), i obdržíme:

$$MO' = -m \cos(\varphi + \omega). \tag{13a}$$

Z uvedených hodnot pro MD, ME a MO' plyne relace:

$$MO' = \frac{MD + ME}{2},$$

t. j. bod O' rozpoluje délku ED.

Důležitá pro hledanou plochu délka $EO' = O'D$ vypočte se pomocí rovnice:

$$O'D = O'M + MD;$$

vložíme-li tu příslušné hodnoty, vychází:

$$O'D = m \cos(\varphi + \omega) + 2m \sin^2 \frac{\varphi + \omega}{2} = m.$$

Budiž zde ještě podotknuto, že osy C, které se protínají v bodech osy Z, ležících uvnitř délky ED jsou reálnými; ostatním bodům osy Z odpovídají osy C pomyslné. Též úběžným bodem osy Z procházejí dvě pomyslné osy C; výšky jejich jsou nekonečně velké.

8. Abychom určili rovnici plochy obsahující osy C šroubových pohybův, rovnomocných dvěma pohybům při proměnlivém úhlu ψ, ve tvaru co možná jednoduchém, volme novou soustavu souřadnic; počátkem jejím buď bod O', rozpolující délku ED, osami X' a Y' buďte zmíněné osy R a S na sobě kolmo stojící, osou Z' pak ponechme přímku Z, všechny povrchové přímky plochy v pravém úhlu protínající. Poněvadž osa X' uzavírá s osou A úhel $\frac{\varphi + \omega}{2} - \frac{\pi}{4}$ *), libovolná osa C s touž osou úhel ψ, jest

$$\sphericalangle X'C = \alpha = \psi - \left(\frac{\varphi + \omega}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Zavedeme-li úhel α do vzorce (8a), obdržíme:

$$z = 2m \sin\left(\frac{\varphi + \omega}{2} + \alpha - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\varphi + \omega}{2} - \alpha + \frac{\pi}{4}\right);$$

přihlížejíce ke známému vzorci goniometrickému:

$$\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} (\cos 2\beta - \cos 2\alpha),$$

můžeme též psáti:

$$z = m \left[\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \cos(\varphi + \omega)\right].$$

---

*) V obrazci jest $\sphericalangle A_1X'$ záporný, což bude vždy, je-li $\sphericalangle \varphi + \omega < \frac{\pi}{2}$.

Přičteme-li ku $z = MO$ délku

$$O'M = m \cos(\varphi + \omega)$$

ustanovíme

$$O'O = z' = m \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = m \sin 2\alpha \,. \qquad (14)$$

Jsou-li x', y', z' souřadnice libovolného bodu osy C, jest patrně

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'}{x'} \,;$$

vyloučením úhlu α z posledních dvou rovnic nalezneme rovnici hledané plochy ve tvaru:

$$z'(x'^2 + y'^2) - 2m\, x'\, y' = 0. \qquad (15)$$

Zavedeme-li ve vzorci (9a) pro $2m$ výšky p_ϱ a p_σ šroubů ϱ a σ, jichž osy R a S se souřadnicovými osami X' a Y' splývají, obdržíme, poněvadž pak $d = 0$, $\sphericalangle\, \varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$2m = p_\sigma - p_\varrho \,; \qquad (16)$$

tudíž jest rovnice plochy též:

$$z'(x'^2 + y'^2) - (p_\sigma - p_\varrho)\, x'\, y' = 0.$$

Plocha, jejíž rovnici jsme takto ustanovili, jest přímý konoid stupně třetího, jehož přímkou řídící jest osa Z', rovinou řídící rovina $X'\, Y'$ a středem bod O'. Ball nazval tuto plochu po návrhu Cayleyově *cylindroidem.* *)

Měl bych nyní uvésti některé důležitější vlastnosti cylindroidu, pokud o nich nebyla již výše učiněna zmínka; avšak v té příčině odkazuji ku článku V. Jarolímka: „O některých geometrických místech přímkových, zejména o zvláštním konoidu

---

*) Burmester užívá pro tuto plochu názvu: „Plückerův konoid“ (viz jeho článek: Kinematische Flächenerzeugung vermittelst cylindrischer Rollung. Zeitschrift für Math. und Physik, XXXIII, pag. 340), poněvadž se jí poprve Plücker ve své: „Neue Geometrie des Raumes“ zabýval, ustanoviv ji jako místo os complexů lineárních dvojčlenné skupiny.

kubickém“ v XX. ročníku tohoto časopisu, kde najde laskavý čtenář též obšírnější popis i vyobrazení této plochy.

9. Vraťme se nyní ku vzorci (10), kterým se stanoví výška p_γ šroubu, příslušícího pohybu (c, γ), jež jest rovnomocný dvěma pohybům šroubovým (a, α) a (b, β); vzorci tomu lze dáti ještě jiný tvar, zavedeme-li v něm za úhly ψ a χ úhel φ obou os A a B. Z rovnoběžníka $MJKL$ nekonečně malých rotací a a b odvodíme totiž:

$$c \cos \psi = a + b \cos \varphi, \qquad c \cos \chi = b + a \cos \varphi,$$
$$c \sin \chi = a \sin \varphi;$$

dosadíme-li do rovnice (10) za $\cos\psi$, $\cos\chi$, $\sin\chi$ hodnoty, z těchto vzorců plynoucí, obdržíme snadno:

$$c^2 p_\gamma = a^2 p_\alpha + b^2 p_\beta + ab\,[(p_\alpha + p_\beta) \cos \varphi - d \sin \varphi]. \quad (17)$$

Součiny $a^2 p_\alpha$, $b^2 p_\beta$ a $c^2 p_\gamma$ jsou invarianty soustav pohybův, rovnomocných šroubovým pohybům (a, α), (b, β) a (c, γ); poznačme je J^2_a, J^2_b a J^2_c. Výraz v závorce jest vzájemný moment $[\alpha, \beta]$ šroubů α a β; nazveme-li podíl $\frac{[\alpha, \beta]}{2\sqrt{p_\alpha p_\beta}}$ *cosinem úhlu* těchto dvou šroubův*), můžeme poslední rovnici též psáti:

$$J^2_c = J^2_a + J^2_b + 2 J_a J_b \cos \widehat{\alpha\beta}. \quad (17a)$$

Podobnosť tohoto vzorce se vzorcem, jímž se stanoví amplituda výsledného pohybu dvou nekonečně malých rotací o osách různoběžných, jest zřejmá.

Je-li $\cos \widehat{\alpha\beta} = 0$, jsou šrouby α a β přidruženy; v tom případě platí

$$J^2_c = J^2_a + J^2_b;$$

můžeme tudíž šrouby přidružené pokládati za šrouby na sobě kolmo stojící.

Rovnice (17a) změní se ve:

*) Dle analogie s cosinem úhlu dvou lineárních complexů přímkových; viz na př. E. Müller: Die Liniengeometrie nach den Principien der Grassmannschen Ausdehnungslehre. Monatshefte für Math. und Physik. II. Jahr., pag. 283.

$$J_e = J_a \pm J_b,$$

jestli $\cos \widehat{\alpha\beta} = \pm 1$; podmínce té vyhovují dva šrouby o stejných výškách, jichž osy jsou rovnoběžné nebo v jedno splývají, majíce směr buď stejný nebo protivný.

10. Z rovnice (11a) jde, že též výška šroubu p_γ výsledného pohybu (c, γ) závisí pouze na úhlu ψ nebo na poměru $a : b$ obou proměnlivých amplitud složek (a, α), a (b, β), jichž šrouby α a β jsou stálými, jako na tomto úhlu závisela za téže podmínky poloha osy C. Vneseme-li tuto výšku p_γ (s náležitým zřetelem ku znaménku jejímu) na příslušnou osu C, stane se z ní šroub; učiníme-li tak na všech osách C, různými hodnotami úhlu ψ mezi 0 a 2π daných, obdržíme plochu, která se od pojmu geometrické plochy tím liší, že každá povrchová přímka její opatřena jest jakousi délkou, čili že jest šroubem. Takovou plochu nazývejme dle Budde-ho *) *metrickým* cylindroidem na rozdíl od plochy *ametrické*, při níž pouze k poloze a směru přímek povrchových přihlížíme. A poněvadž v geometrii šroubových pohybů hlavně metrické plochy docházejí užívání, chceme příště slovem cylindroid rozuměti vždy metrický cylindroid, ač není-li jinak výslovně udáno.

Vneseme-li výšku p_γ na příslušnou osu C od bodu, ve kterém tato přímku řídící cylindroidu protíná, budou koncové body těchto délek tvořiti křivku prostorovou na ploše, kterou Plücker též poprvé vyšetřoval. **) Avšak k našim účelům se nehodí ani tato křivka ani průmět její na rovinu řídící konoidu; musíme ji nahraditi čarou jednodušší, kterou by rozvržení výšek všech šroubů cylindroidu snadněji přehlédnouti se mohlo. Ball užívá k tomu cíli kuželosečky, k níž dospívá tímto způsobem:

Promítneme-li všechny povrchové přímky ametrického cylindroidu na jeho rovinu řídící, obdržíme svazek paprskový; na průmět každé přímky povrchové vnesme od počátku O' délku $\varrho = \frac{k}{\sqrt{p_\gamma}}$, kde značí k libovolnou konstantu a p_γ výšku šroubu,

---

*) Budde: „Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme". Zweiter Band, pag. 570.

**) „Neue Geometrie des Raumes", pag. 98. Plücker nazval tuto křivku charakteristickou křivkou kongruence.

jehož osou jest promítnutá přímka. Vyšetřme nyní křivku, kterou tvoří koncové body těchto délek.

Píšeme-li:

$$k^2 = \varrho^2 p_\gamma$$

a vložíme-li tu za p_γ hodnotu, vycházející z rovnice (11a), dostaneme

$$k^2 = \varrho^2 [p\alpha + 2m \sin\psi \cos(\omega + \varphi - \psi)],$$

aneb, rozvedeme-li $\cos(\omega + \varphi - \psi)$:

$$k^2 = \varrho^2[p\alpha + 2m \cos(\omega + \varphi) \sin\psi \cos\psi + 2m \sin(\omega + \varphi) \sin^2\psi].$$

Zaveďme v rovině řídící $X'Y'$ soustavu souřadnic pravoúhlých, jejíž osou Ξ jest průmět A_1 osy A na tuto rovinu; i jest

$$\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

$$\sin\psi = \frac{\eta}{\varrho}, \quad \cos\psi = \frac{\xi}{\varrho}:$$

tudíž rovnice hledané křivky:

$$[p\alpha + 2m \sin(\omega + \varphi)]\, \eta^2 + 2m \cos(\omega + \varphi)\, \xi\eta + p_\alpha \xi^2 - k^2 = 0.$$

Jest to rovnice kuželosečky, mající střed svůj v počátku O'. Přetvořme nyní rovnici tuto, aby odpadl člen, obsahující součin obou souřadnic $\xi\eta$. Za tím účelem musíme soustavu souřadnic otočiti o jakýsi úhel ϑ, pro který platí v tomto případě vzorec: *)

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = -\operatorname{cotg}(\omega + \varphi) = \operatorname{tg}\left(\omega + \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

z čehož plyne:

$$\sphericalangle\, \vartheta = \frac{\omega + \varphi}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Poněvadž $\sphericalangle A_1X' = \vartheta$ shledáváme, že osy souřadnicové v otočené poloze splývají s osami X' a Y' obou šroubů ϱ a σ,

*) Viz na př. Jandečky: Analytickou geometrii v rovině, III. vyd., pag. 105.

ležících na cylindroidu v jeho rovině řídící. V této soustavě nalezneme pak známým způsobem rovnici hledané kuželosečky v jednodušším tvaru; ta zní:

$$(p_\alpha + 2m \cos^2\vartheta)\, \eta'^2 + (p_\alpha - 2m \sin^2\vartheta)\, \xi'^2 - k^2 = 0.$$

Ze vzorce (11a), dosadíme-li v něm jednou

$$\sphericalangle\, \psi = \vartheta = \frac{\omega + \varphi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

a po druhé

$$\sphericalangle\, \psi = \vartheta + \frac{\pi}{2} = \frac{\omega + \varphi}{2} + \frac{\pi}{4},$$

vycházejí pro výšky šroubů ϱ a σ hodnoty:

$$\begin{aligned} p_\varrho &= p_\alpha - 2m \sin^2\vartheta, \\ p_\sigma &= p_\alpha + 2m \cos^2\vartheta; \end{aligned} \qquad (18)$$

tudíž jest rovnice hledané křivky též:

$$p_\sigma \eta'^2 + p_\varrho \xi'^2 - k^2 = 0. \qquad (19)$$

Kuželosečku tuto, jejíž poloměry jsou úměrny ke zvratným hodnotám druhých odmocnin z výšek šroubů na cylindroidu, nazývejme dle Balla *kuželosečkou výšek* (pitch conic). Jest ellipsou, jsou-li obě hlavní výšky p_ϱ a p_σ positivní, a jest hyperbolou, mají-li tyto výšky protivná znaménka. V tom případě vyskytují se na cylindroidu dva reálné šrouby, jichž výšky rovnají se nulle; osy jejich jsou rovnoběžné k asymptotám kuželosečky výšek. Rovná-li se jedna z hlavních výšek, na př. p_ϱ nulle, redukuje se křivka na dvé přímek rovnoběžných: $\eta' = \pm \dfrac{k}{\sqrt{p_\sigma}}$.

Kuželosečkou (19) určují se tedy jednoduchým způsobem výšky všech šroubů cylindroidu, vyjímaje výšky negativní, poněvadž pro ty jest ϱ imaginární; můžeme pak křivku tu pokládati za součásť metrického cylindroidu, kterou se tento liší od cylindroidu ametrického, pouhé to plochy geometrické.

Z předcházejícího jde, že dvěma šrouby α a β dán jest vždy určitý cylindroid; známe-li totiž d, $\sphericalangle\, \varphi$, p_α, p_β, ustanovíme pomocí rovnice (13) polohu jeho středu O'; úhly $\frac{\varphi + \omega}{2} \mp \frac{\pi}{4}$ určeny jsou dále osy X' a Y', rovnicí (9a) velikost jeho parametru a konečně rovnicemi (18) numerická excentricita kuželosečky výšek $\sqrt{\frac{p_\varrho - p_\sigma}{p_\varrho}}$. Zavedeme si poznačení (α, β) pro cylindroid stanovený šrouby α a β. Budeme též používati rčení: dvěma šrouby položiti cylindroid, jako říkáme: dvěma přímkami položiti rovinu; aneb: šroub leží na cylindroidu, cylindroid prochází šroubem a pod.

Jest zásluhou Ballovou, že poznal mechanický význam cylindroidu; on byl první, který vyslovil pro skládání šroubových pohybů toto pravidlo:*)

Abychom složili dva nekonečně malé šroubové pohyby (šroubové síly) (a, α), (b, β), položme šrouby α a β cylindroid; šroub této plochy, který má osu rovnoběžnou s úhlopříčnou rovnoběžníka, jehož strany co do směru i velikosti dány jsou amplitudami (intensitami) a a b, přísluší pohybu výslednému.

Jestliže ve zvláštním případě $p_\varrho = p_\sigma$, cylindroid přechází v rovinu; pak se též výšky všech šroubů jeho sobě rovnají, jak v následujícím oddíle ukážeme. Je-li tato stálá hodnota výšek nullou neb nekonečně velkou, obdržíme známá pravidla o skládání nekonečně malých rotací (sil) nebo translací (dvojic sil).

11. Pomocí kuželosečky výšek můžeme z mnohých vět geometrických odvoditi věty týkající se šroubů na cylindroidu. Některé z nich buďte tu uvedeny.

Z analytické geometrie kuželoseček znám jest vzorec:

$$\varrho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha},$$

kterým se stanoví délka polovičného průměru ϱ, dána-li jest odchylka jeho α od hlavní osy kuželosečky a délka obou poloos a a b.

Píšeme-li tento vzorec ve tvaru:

---

*) Theory of Screws, pag. 18.

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\sin^2\alpha}{b^2} + \frac{\cos^2\alpha}{a^2}$$

a položíme-li:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{p_\varrho}{k^2}, \frac{1}{b^2} = \frac{p_\sigma}{k^2}, \frac{1}{\varrho^2} = \frac{p_\gamma}{k^2},$$

dostaneme:

$$p_\gamma = p_\varrho \cos^2\alpha + p_\sigma \sin^2\alpha, \tag{20}$$

jak jsme také z rovnic (18) mohli odvoditi.

Rovnicí tou určuje se výška libovolného šroubu γ na cylindroidu, jsou-li dány hlavní výšky p_ϱ a p_σ a úhel α, který tvoří osa jeho C s osou šroubu ϱ.

Je-li $p_\varrho = p_\sigma$, jest patrně každé $p_\gamma = p_\varrho$, všechny výšky jsou stejně velké, jak již bylo výše poznamenáno.

Sdružené průměry kuželosečky výšek mají i v naší theorii zvláštní důležitosť: lze totiž ukázati, že *dva šrouby cylindroidu, jichž osy jsou rovnoběžné ku dvěma sdruženým průměrům kuželosečky výšek, jsou přidruženými.* Za tím účelem dejme podmínečné rovnici

$$(p_\alpha + p_\beta) \cos\varphi - d \sin\varphi = 0$$

jiný tvar, zavedouce v ní oba úhly μ a ν, které tvoří osy A a B přidružených šroubů α a β s osou R jednoho hlavního šroubu cylindroidu. Poněvadž jest dle vzorce (14) vzdálenosť osy A od roviny řídící plochy

$$z = m \sin 2\mu,$$

a podobně vzdálenosť osy B od téže roviny

$$z' = m \sin 2\nu,$$

bude

$$d = z' - z = m(\sin 2\nu - \sin 2\mu) = 2m \sin(\nu - \mu) \cos(\mu + \nu).$$

Dle rovnic (18) jest

$$p_\alpha = p_\varrho + 2m \sin^2\mu$$
$$p_\beta = p_\sigma - 2m \cos^2\nu;$$

tudíž:

$$p_\alpha + p_\beta = p_\varrho + p_\sigma - 2m(\cos^2\nu - \sin^2\mu) = p_\varrho + p_\sigma$$
$$- 2m \cos(\mu + \nu) \cos(\nu - \mu).$$

Vložíme-li tyto hodnoty pro d a $p_\alpha + p_\beta$ do rovnice podmínečné a uvážíme-li, že $\varphi = \nu - \mu$, dostaneme:

$$(p_\varrho + p_\sigma) \cos(\nu - \mu) - 2m \cos(\mu + \nu) \cos^2(\nu - \mu) -$$
$$2m \cos(\mu + \nu) \sin^2(\nu - \mu) = 0,$$

aneb

$$(p_\varrho + p_\sigma) \cos(\nu - \mu) - 2m \cos(\mu + \nu) = 0; \qquad (21)$$

dosadíce tu

$$2m = p_\sigma - p_\varrho,$$

nabudeme

$$p_\varrho [\cos(\nu - \mu) + \cos(\mu + \nu)] + p_\sigma [\cos(\nu - \mu) - \cos(\mu + \nu)] = 0,$$

čili:

$$p_\varrho \cos\mu \cos\nu + p_\sigma \sin\mu \sin\nu = 0,$$

a konečně

$$p_\varrho + p_\sigma \operatorname{tg}\mu \operatorname{tg}\nu = 0. \qquad (22)$$

Z tohoto tvaru podmínečné rovnice pro přidruženosť dvou šroubů plyne:

$$\operatorname{tg}\mu \operatorname{tg}\nu = -\frac{p_\varrho}{p_\sigma},$$

aneb, poněvadž jsou délky poloos kuželosečky výšek dány podíly:

$$a^2 = \frac{k^2}{p_\varrho}, \quad b^2 = \frac{k^2}{p_\sigma},$$

též:

$$\operatorname{tg}\mu \operatorname{tg}\nu = -\frac{b^2}{a^2},$$

což jest známá podmínka, že průměry kuželosečky, tvořící s osou *X*ovou úhly μ a ν, jsou sdruženými.

Ke každému šroubu cylindroidu přináleží tedy na téže ploše jeden přidružený; jen v tom případě, že kuželosečka výšek redukuje se na dvé přímek rovnoběžných, jest šroub, jehož osa jest s těmito přímkami rovnoběžná, přidružený ku všem šroubům příslušného cylindroidu. Poněvadž totiž výška toho šroubu rovna jest nulle, jest sám sobě přidruženým; ku všem ostatním šroubům cylindroidu jest pak přidruženým, protože osu jeho a každý z průmětů přímek povrchových konoidu na rovinu řídící lze pokládati za směry průměrů sdružených.

Z vět geometrických, jednajících o sdružených průměrech kuželoseček, plynou mnohé vlastnosti přidružených šroubů na cylindroidu, tak na př.:

Součet zvratných hodnot výšek dvou přidružených šroubův na cylindroidu jest stálou veličinou.

Na cylindroidu vyskytuje se jedno dvé přidružených šroubův, jichž výšky jsou stejně velké.

Veškeré páry přímek, jež obdržíme, promítneme-li osy přidružených šroubů cylindroidu na jeho rovinu řídící, tvoří involuci paprskovou, pro kterou jsou dvojnými paprsky průměty os obou šroubův, majících výšky rovny nulle.

12. Jest jednou z předností prací Ballových, že užívá k řešení mechanických problémů method geometrických ve všech případech, kde lze jimi docíliti zvláštní názornosti a přehlednosti. Tak ku stanovení pohybu výsledného dvou daných pohybů šroubových udává Ball *) konstrukci, která vyniká svou jednoduchostí a zasluhuje tudíž zde býti uvedena. Ke konstrukci té dospějeme pomocí rovnic (8a) a (11a), jež zní:

$$z = 2m \sin\psi \sin(\omega + \varphi - \psi)$$
$$p_\gamma - p_\alpha = 2m \sin\psi \cos(\omega + \varphi - \psi):$$

z rovnic těch odvodíme snadno dvě jiné, totiž

$$\operatorname{tg}(\omega + \varphi - \psi) = \frac{z}{p_\gamma - p_\alpha}, \tag{23}$$

$$(p_\gamma - p_\alpha)^2 + z^2 = 4m^2 \sin^2\psi. \tag{24}$$

Vyloučením úhlu ψ z těchto rovnic vyhledáme rovnici křivky, jež stanoví, jak souvisí délky $p_\gamma - p_\alpha$ a z; za tím účelem, použijeme-li stejniny:

*) V pojednání: „Dynamics and Modern Geometry“, pag. 7.

$$\sin\psi = \sin[\omega + \varphi - (\omega + \varphi - \psi)] = \sin(\omega+\varphi)\cos(\omega + \varphi - \psi) - \cos(\omega + \varphi)\sin(\omega + \varphi - \psi),$$

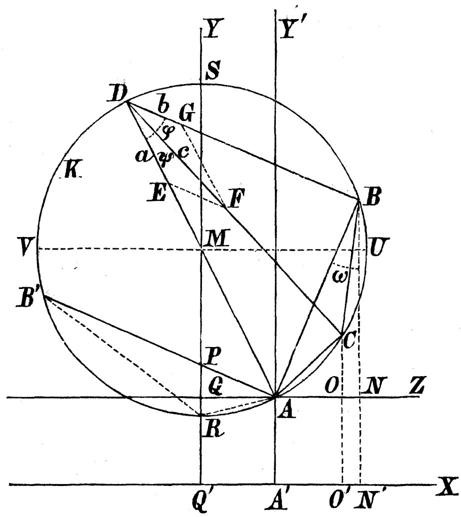
která se dle rovnic (8a) a (11a) změní ve:

$$2m\sin^2\psi = (p_\gamma - p_\alpha)\sin(\omega + \varphi) - z\cos(\omega + \varphi).$$

Násobíme-li tuto rovnice $2m$, obdržíme, hledíce zároveň ku (24) hledanou rovnici ve tvaru:

$$(p_\gamma - p_\alpha)^2 + z^2 - 2m\sin(\omega + \varphi)(p_\gamma - p_\alpha) + 2m\cos(\omega + \varphi)z = 0.$$

Jest to rovnice kružnice, procházející počátkem souřadnic; střed její dán jest souřadnicemi $-m\cos(\omega + \varphi)$ a $m\sin(\omega + \varphi)$, poloměr její jest m. Sestrojení její nepodlehá žádným obtížím;



Obr. 2.

učiňme nejprv $AN = d$, $NB = p_\beta - p_\alpha$ (viz obr. 2.) a sestrojme trojúhelník pravoúhlý ANB. V něm jest $\sphericalangle ABN = \omega$, poněvadž dle (7)

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{d}{p_\beta - p_\alpha},$$

jeho přepona pak

$$AB = \sqrt{d^2 + (p_\beta - p_\alpha)^2}\,.$$

Vneseme-li od přímky AB u bodu A ve směru positivním $\sphericalangle BAD = \frac{\pi}{2} - \varphi$ *), protne druhé jeho rameno kolmici v bodě B na AB vztyčenou v bodě D; i jest $AD = 2m$, neboť:

$$AD = \frac{AB}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{d^2 + (p_\beta - p_\alpha)^2}}{\sin\varphi}\,,$$

což se srovnává s rovnicí (9a).

Rozpůlíme-li AD v bodě M a spustíme-li s bodu toho kolmici na AN, obdržíme trojúhelník AMQ, v němž úhel $QAM = \omega + \varphi$; tedy jsou

$$AQ = -m\cos(\omega + \varphi), \qquad QM = m\sin(\omega + \varphi)$$

souřadnice středu M hledané kružnice K v soustavě souřadnic pravoúhlých, jejíž osou Z jest přímka AN.

Pomocí kružnice K nyní velmi jednoduše vyhledáme vše, čeho jest třeba k určení výsledného pohybu (c, γ) dvou daných šroubových pohybův (a, α) a (b, β). Sestrojíme totiž u bodu D rovnoběžník $DEFG$, mající strany DE a DG úměrné amplitudám a a b; úhlopříčna jeho DF udává amplitudu c. Mimo to protíná tato přímka kružnici K v bodě C, jehož souřadnicemi AO a OC v uvedené soustavě dány jsou délky z a $p_\gamma - p_\alpha$. Neboť:

$$AC = 2m\sin\psi,$$

$$\sphericalangle OAC = OAD - CAD = \frac{\pi}{2} - (\omega + \varphi - \psi);$$

tudíž:

$$\sphericalangle ACO = \omega + \varphi - \psi,$$

pročež:

$$AO = AC\sin(\omega + \varphi - \psi) = 2m\sin\psi\sin(\omega + \varphi - \psi),$$
$$OC = AC\cos(\omega + \varphi - \psi) = 2m\sin\psi\cos(\omega + \varphi - \psi),$$

čili dle rovnic (8a) a (11a):

*) Je-li $\sphericalangle\varphi$ tupým, vneseme $\varphi - \frac{\pi}{2}$ ve směru negativním.

$$AO = z, \qquad OC = p_\gamma - p_\alpha.$$

Pošineme-li osu Z rovnoběžně o délku $AA' = p_\alpha$ do polohy X, bude $CO' = p_\gamma$ a $A'O' = z$. Bodem C kružnice K ustanoven jest úplně šroub γ výsledného pohybu; polohu jeho osy určuje průmět tětivy AC na osu Xovou a úhel obvodový ψ nad obloukem AC, výšku jeho p_γ vzdálenosť bodu C od osy Xové.

Z příčin pochopitelných bude výhodno, kružnici K vztahovati k soustavě souřadnic, jejíž jednou osou jest přímka X a druhou přímka Y, středem kružnice M ku X kolmo vedená; v této soustavě jest rovnice její:

$$x^2 + [y - (p_\alpha + m \sin(\omega + \varphi))]^2 = m^2,$$

kterouž lze po několika snadných přeměnách též psáti takto:

$$x^2 + \left(y - \frac{p_\alpha + p_\beta + d \cot g \varphi}{2}\right)^2 = m^2. \qquad (25)$$

Zavedeme-li hlavní výšky p_ϱ a p_σ, nabude rovnice ta tvaru

$$x^2 + \left(y - \frac{p_\varrho + p_\sigma}{2}\right)^2 = m^2. \qquad (25a)$$

Z obrazce jest patrno, že měníme-li úhel ψ od 0 do π, nechávajíce body A a B beze změny, probíhá bod C obvod kružnice K; každé poloze toho bodu odpovídá jeden šroub cylindroidu, který vytvoří šroub γ výsledného pohybu, jestliže v týchž mezích měníme úhel ψ při stálé poloze šroubů α a β. Naopak též každému šroubu γ plochy (α, β) přísluší jen jediný bod kružnice K. Křivka ta jest obrazem cylindroidu a Ball užívá ji měrou nejrozsáhlejší v kinematice, statice i kinetice nepromĕnných soustav, majících volnosť stupně druhého. Zde buďtež vytknuty jen tyto základní vlastnosti její:

1. Výška libovolného šroubu α cylindroidu rovná se délce kolmice, spuštěné s příslušného bodu A kružnice K na osu Xovou. Ball nazývá tuto přímku *osou výšek* (axis of pitch).

Tudíž hlavní výšky p_ϱ a p_σ dány jsou délkami $Q'R$ a $Q'S$; oběma šroubům, jichž výšky se rovnají nulle, přísluší pak body (reální neb imaginární), ve kterých osa výšek kružnici K protíná.

2. Nejkratší vzdálenosť os dvou šroubů α a β rovna jest průmětu tětivy, spojující příslušné body A a B na osu výšek.

Z toho jde, že osy dvou šroubů cylindroidu, jichž příslušné body se nalezají na tětivě, kolmo na ose výšek stojící, se protínají (na přímce řídící plochy). Šroubům, které mají za osy torsální přímky plochy, odpovídají body U, V, ležící na průměru kružnice K rovnoběžném s osou výšek.

3. Úhel os dvou šroubů α a β roveň jest úhlu obvodovému nad obloukem AB.

Koncové body libovolného průměru kružnice K zobrazují tedy dva šrouby, jichž osy na sobě kolmo stojí.

4. Tětiva, spojující body příslušné dvěma přidruženým šroubům cylindroidu, prochází polem osy výšek vzhledem ke kružnici K.

Buďtež A a B' obrazy dvou přidružených šroubů cylindroidu, P průsečníkem tětivy AB' s osou Yovou; že jest bod ten polem osy Xové, dokážeme pomocí rovnice (21). Položíme-li v ní

$$p_\varrho + p_\sigma = Q'R + Q'S = 2Q'M,$$

přejde ve

$$Q'M \cos(\nu - \mu) = m \cos(\mu + \nu);$$

násobíme-li obě strany délkou PM, obdržíme:

$$Q'M \,.\, PM = m \frac{PM \cos(\mu + \nu)}{\cos(\nu - \mu)} .$$

V trojúhelníku PMA jest však:

$$PM : MA = \sin PAM : \sin MPA;$$

poněvadž

$$\sphericalangle RMA = 2\mu, \quad \sphericalangle ARM = RAM = \frac{\pi}{2} - \mu, \quad \sphericalangle RAB' = \pi - \nu,$$

bude

$$\sphericalangle PAM = \nu - \left(\frac{\pi}{2} + \mu\right), \quad \sphericalangle RPA = \nu - \left(\frac{\pi}{2} - \mu\right),$$

tudíž

$$PM : m = \cos(\nu - \mu) : \cos(\nu + \mu),$$

z čehož

$$m = \frac{PM \cos(\nu + \mu)}{\cos(\nu - \mu)}.$$

Přihlížejíce k této hodnotě, dostaneme z hořejšího vzorce

$$Q'M . PM = m^2,$$

co důkaz, že bod P jest polem osy výšek.

5. Zaměníme-li znaménko amplitudy c výsledného pohybu (c, γ) dvou daných pohybů (a, α), (b, β) v protivné, obdržíme tři pohyby: (a, α), (b, β), $(-c, \gamma)$, které jsou aequivalentní nulle. Z obrazce jest patrno, že $\triangle\ DGF \sim ABC$; tudíž můžeme vysloviti větu:

Tři pohyby kolem šroubů α, β, γ se vzájemně ruší, jsou-li amplitudy jejich úměrny protějším stranám příslušného trojúhelníka ABC.

13. Pomocí kružnice K, kterou se zobrazuje metrický cylindroid, lze řešiti též úlohy, jednající o *rozkládání* pohybu šroubového ve dva jiné, jichž šrouby se šroubem daného pohybu na témž cylindroidu leží.

Jednoduchá úloha toho druhu jest: Pohyb šroubový (c, γ) jest rozložiti ve dvě složky, jsou-li dány jejich šrouby α a β. Tu jest třeba, stanoviti jen amplitudy složek; poněvadž jsou tyto úměrny stranám BC a CA trojúhelníka ABC, jehož vrcholy odpovídají známým způsobem šroubům α, β a γ, rovnají se hledané amplitudy:

$$\frac{c}{AB} . BC \quad \text{a} \quad \frac{c}{AB} . CA$$

Úloha tato jest v theorii šroubů důležitou; položíme-li totiž amplitudu c daného pohybu rovnou jednotce, jsou amplitudy složek a a b dle Balla *souřadnicemi* šroubu γ v soustavě $\alpha\beta$. Šrouby α a β jsou *šrouby souřadnicové;* pro souřadnice x_1 a x_2 šroubu γ pak máme:

$$x_1 = \frac{BC}{AB}, \quad x_2 = \frac{CA}{AB}.$$

Sestrojíme-li celý výkres v takovém měřítku, aby $AB = 1$, bude:

$$x_1 = BC, \quad x_2 = CA.$$

Souřadnice šroubové x_1 a x_2 musí patrně vyhovovati podmínečné rovnici:

$$x_1^2 + 2x_1 x_2 \cos\varphi + x_2^2 = 1,$$

ve které φ značí úhel obou os šroubů souřadnicových.

Z mnohých jiných úloh, které se vyskytnouti mohou při rozkládání pohybu šroubového ve dvě složky, jsou-li o nich různé podmínky dány, zasluhuje naší pozornosti tato:

Pohyb šroubový (c, γ) jest rozložiti ve dvě rotace kolem os mimoběžných, z nichž jedna A jest dána. Rotaci přísluší šroub, jehož výška se rovná nulle; známe tudíž dva šrouby, kterými lze položiti cylindroid. Sestrojíme-li tedy kružnici K z dané tětivy a příslušného úhlu obvodového, stanoví druhý průsečník této kružnice s osou výšek hledanou rotaci.

Osy těchto rotac jsou Chasles-ovy přímky sdružené; z grafického znázornění cylindroidu pomocí kružnice K seznáváme ihned mnohé věty o těchto přímkách, jako jsou:

Osa obou mimoběžných přímek sdružených protíná kolmo osu pohybu šroubového.

Tvoří-li jedna ze dvou sdružených přímek s osou šroubového pohybu úhel pravý, protíná ji druhá a naopak.

Nejmenší vzdálenosti osy C šroubového pohybu od obou přímek sdružených A a B jsou v přímém poměru s tangentami úhlů (AC) a (BC); atd. atd. (Dokončení.)

Drobné zprávy.

Napsal

dr. Gustav Gruss.

Pohyb hvězd ve směru zornice. První pokusy k určení pohybů hvězd ve směru zornice (směrnice) z pošinutí čar spekter hvězd podnikl r. 1867 *Huggins*, pak *H. C. Vogel*, v rozsáhlé míře hvězdárna *Greenwichská* a *Seabroke*. Veškerá tato pozorování ustoupila, co se přesnosti výsledků týče, novějším pracím H. C. Vogla v Postupími, jenž r. 1888 podnikl pokus pošinutí čar ve spektrech hvězd stanoviti cestou *fotografickou* a určiti