# Několik poznámek o řetězcích.

Napsal

**Jaroslav Simonides,**
professor v Kroměříži.

V následujících řádcích chci se pokusiti o zjednodušení některých důkazů, které v našich učebnicích (zvláště v algebře Machovcově) o řetězcích jsou obvyklými.

1. Je-li zlomek $\frac{a}{b}$ proměniti v řetězec, obdržíme jmenovatele $p_1, p_2, \ldots, p_n$ jednotlivých členů postupným dělením dle schematu:

$$\begin{array}{c|c|l} a & b & p_1 \\ z_1 & z_2 & p_2 \\ z_3 & \ldots & p_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & z_{n-1} & p_n \end{array}$$

Jsou-li $a, b$ čísla nesoudělná, bude jich největší spol. míra $= 1$, t. j. $z_{n-1} = 1$; píšeme-li $\frac{na}{nb}$ místo zlomku $\frac{a}{b}$ *nezmění se podíly* $p_1, \ldots, p_n$, toliko zbytky $z_n$ stanou se $n$kráte většími, obdržíme tedy *týž řetězec*, z čehož patrno, že smíme vždy položiti $z_{n-1} = 1$, pak jest

$$\begin{aligned} z_{n-2} &= p_n, \\ z_{n-3} &= p_{n-1} z_{n-2} + z_{n-1} \\ z_{n-4} &= p_{n-2} z_{n-3} + z_{n-2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b &= p_2 z_1 + z_2 \\ a &= p_1 b + z_1. \end{aligned}$$

Známe-li tedy jmenovatele $p_1, \ldots, p_n$, lze zbytky $z_{n-1}, z_{n-2} \ldots$ a čísla $b, a$ rekonstruovati, čímž jest Lejeune Dirichlet-ův způsob proměny řetězce na zlomek obecný dokázán. Při tomto postupu vidí žák zřetelně, že počet, jejž provedl při proměně obecného zlomku v řetězec, provádí nyní v převráceném pořádku.

2. *Úplná hodnota* R *řetězce jest mezi každými dvěma sousedními hodnotami sblíženými.*

Budiž poslední sblížená hodnota sudou $\frac{C_{2n}}{J_{2n}}$, tedy $R = \frac{C_{2n}}{J_{2n}}$, pak jest $\frac{C_{2n-1}}{J_{2n-1}} > \frac{C_{2n}}{J_{2n}}, \quad \frac{C_{2n-2}}{J_{2n-2}} < \frac{C_{2n}}{J_{2n}},$

tedy
$$\frac{C_{2n-1}}{J_{2n-1}} > R > \frac{C_{2n-2}}{J_{2n-2}}.$$

Každá předcházející lichá sblížená hodnota jest však větší než $\frac{C_{2n-1}}{J_{2r-1}}$, každá předcházející sudá sblížená hodnota pak menší než $\frac{C_{2n-2}}{J_{2n-2}}$, leží tedy R tím více mezi každými předcházejícími sblíženými hodnotami sousedními.

Rovněž tak provedeme důkaz, je-li poslední sblížená hodnota lichou.

$$R - \frac{C_r}{J_r} < \left|\frac{1}{J_r^2}\right|, \quad R - \frac{C_{r+1}}{J_{r+1}} < \left|\frac{1}{J_{r+1}^2}\right|,$$
$$J_{r+1} > J_r,$$

tedy rozdíl mezi skutečnou a sblíženou hodnotou řetězce stává se čím dále tím menší.

3. *Aby úplná hodnota řetězce přesněji byla vyjádřena zlomkem* $\frac{\alpha}{\beta}$ *nežli sblíženou hodnotou* $\frac{C_k}{J_k}$, *musí býti* $\beta > J_k$, $\alpha > C_k$.

Neboť musí
$$\frac{C_{2n+1}}{J_{2n+1}} > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{C_{2n}}{J_{2n}},$$

tedy
$$\frac{\alpha J_{2n} - \beta C_{2n}}{\beta J_{2n}} < \frac{1}{J_{2n} J_{2n+1}},$$
$$\frac{\alpha J_{2n} - \beta C_{2n}}{\beta} < \frac{1}{J_{2n+1}};$$

$\beta$, $\alpha$, $C_{2n+1}$, $J_{2n+1}$ jsou čísla celistvá, tedy
$$\alpha J_{2n} - \beta C_{2n} \gtreqless 1,$$

pročež i
$$\beta > J_{2n+1}.$$

Rovněž platí: $\frac{J_{2n}}{C_{2n}} > \frac{\beta}{\alpha} > \frac{J_{2n+1}}{C_{2n+1}}$

$$\frac{\alpha J_{2n} - \beta C^{2n}}{\alpha C_{2n}} < \frac{J_{2n}C_{2n+1} - C_{2n}J_{2n+1}}{C_{2n}C_{2n+1}}$$

$$\frac{\alpha J_{2n} - \beta C_{2n}}{\alpha} < \frac{1}{C_{2n+1}};$$

čítatel levé strany $\gtreqless 1$; tedy i $\alpha > C_{2n+1}$; tím více pak

$$\beta > J_{2n},\ \alpha > C_{2n}.$$

---

# Jak určíme hmotu těles nebeských a intensitu síly gravitační na jich povrchu?

Podává

dr. V. Láska.

Newtonem nezvratně dokázaná všeobecnosť síly gravitační, usnadňuje nám poměrně jednoduchým způsobem stanoviti hmoty těles nebeských.

Označme 1 hmotu slunce, písmenou $\mu$ hmotu měsíce, a je-li hmota $m$ tělesa nebeského, pak dle známého zákona Keplerova jest v platnosti pro oběžnici rovnice

$$k = \frac{2A^{\frac{3}{2}}\pi}{T\sqrt{1+m}} \tag{1}$$

a podobně pro měsíc

$$k = \frac{2a^{\frac{3}{2}}\pi}{t\sqrt{\mu+m}}. \tag{2}$$

Zde značí $k$ Gaussovu konstantu gravitační; T, $t$ dobu oběhu, A a $a$ velké osy drah obou těles.

Z rovnic uvedených odvodíme snadno vztahy:

$$1 + m = \frac{4A^3\pi^2}{T^2k^2} \tag{3}$$

$$\mu + m = \frac{4a^3\pi^2}{t^2k^2}, \tag{4}$$

z kterých dělením plyne:

$$\frac{m+\mu}{1+m} = \frac{t^2A^3}{T^2a^3}. \tag{5}$$