Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

J. Bezdíček

O číslech spřízněných a dokonalých. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 25 (1896), No. 3, 209--229

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121993

O číslech spřízněných a dokonalých.

Pro studující středních škol dle *Eulera* napsal

Josef Bezdíček,
posluchač filosofie v Praze.

(Dokončení.)

C. *Třetí forma.*

$$M = a . p . q, \quad N = a . f . r.$$

Číslo f může býti buď kmenné neb složené.

Položme $\int f = gh.$

Poněvadž $\int a \int p \int q = \int a \int f \int r,$

bude, dosadíme-li a zkrátíme,

$$(p + 1)(q + 1) = gh(r + 1).$$

Učiňme

$$r + 1 = xy, \quad p + 1 = hx, \quad q + 1 = gy;$$

z toho

$$p = hx - 1,$$
$$q = gy - 1,$$
$$r = xy - 1.$$

Podmínkou čísel spřízněných jest

$$\int apq = ghxy \int a = a(hx - 1)(gy - 1) + af(xy - 1)$$

aneb

$$ghxy \int a = a[(gh + f)xy - hx - gy - f + 1].$$

Poněvadž

$$\frac{\int a}{a} = \frac{2b - c}{b},$$

bude

$$2bghxy - cghxy = b(gh + f)xy - bhx - bgy + b(1 - f)$$

aneb

$$(bf - bgh + cgh)xy - bhx - bgy = b(f \quad 1).$$

Položme

$$bf - bgh + cgh = e$$

a bude

$$(ex - bg)(ey - bh) = b^2gh + be(f - 1).$$

Nyní opět jako dříve nutno pravou stranu této rovnice rozložiti ve dva faktory P a Q tak, aby

$$x = \frac{P + bg}{e} \quad \text{a} \quad y = \frac{Q + bh}{e}$$

byla čísla celistvá, a z nich povstavší p, q, r čísla kmenná.

Čísla sdružená budou pak

$$M = a(hx - 1)(gy - 1),$$
$$N = af(xy - 1).$$

Rozumí se samo sebou, že žádné z čísel f, p, q, r nesmí býti faktorem čísla a.

Uvedeme jen některé z těch případů, kde skutečně čísla spřízněná lze obdržeti.

1. Budiž $a = 2^2$, takže $b = 4$, $c = 1$.

α) Budiž $f = 5$,

pak

$$ff = gh = 6, \quad e = 2, \quad PQ = 128.$$

Rozložme $gh = 6$ v $g = 2$, $h = 3$;

bude

$$x = \frac{P + 8}{2}, \qquad y = \frac{Q + 12}{2}.$$

Učiníme-li

$$P = 4, \text{ a } Q = 32,$$

budou čísla spřízněná

$$M = 2^2 \,.\, 17 \,.\, 43 = 2924,$$
$$N = 2^2 \,.\, 5 \,.\, 131 = 2620,$$

která jsme již dříve odvodili z jiné formy.

Učiníme-li však

$$P = 2, \quad Q = 64,$$

obdržíme čísla spřízněná

$$M = 2^2 . 107 . 13 = 5564,$$
$$N = 2^2 . \; 5 . 51 = 5020.$$

β) Je-li $f = 5 . 13$, $gh = 84$, $PQ = 3392$,

budou čísla spřízněná

$$M = 2^2 . 43 . 2267 = 389924,$$
$$N = 2^2 . 5 . 13 . 1187 = 308620.$$

2. Budiž

$$a = 2^3, \text{ pak jest } b = 8, \quad c = 1;$$

budiž

$$f = 11 . 23, \text{ tu } ff = 288, \quad e = 8, \quad PQ = 4320.$$

Zde obdržíme 3 dvojice čísel spřízněných

$$M = 2^3 . 383 . 1907 = 5843048,$$
$$N = 2^3 . 11 . 23 . 2543 = 5147032;$$
$$M = 2^3 . 467 . 1151 = 4300136,$$
$$N = 2^3 . 11 . 23 . 1871 = 3786904;$$
$$M = 2^3 . 647 . 719 = 3721544,$$
$$N = 2^3 . 11 . 23 . 1619 = 3276856.$$

Pohodlnější způsob řešení jest tento:

Z předešlého víme, že

$$gh = ff \text{ a } e = bf - (b - c)\, gh \text{ čili } e = bf - (b - c)\, ff.$$

Učiňme

$$R = b^2 ff + be(f - 1) \text{ a } PQ = R\, ff;$$

pak bude

$$p = \frac{P + bff}{e} - 1,$$
$$q = \frac{Q + bff}{e} - 1,$$
$$r = \frac{R + b(P + Q) + b^2 ff}{e^2} - 1.$$

Čísla P a Q musí býti tak utvořena, aby p, q a r byla čísla celistvá a kmenná.

3. Budiž

$$a = 2^4, \text{ tedy } b = 16, \quad c = 1.$$

α) Budiž

$$f = 17, \text{ tu } \int f = 18, \quad e = 2, \quad R = 5120, \quad PQ = 92160.$$

Učiňme

$$P = 2m, \quad Q = 2n,$$

takže

$$mn = 23040;$$

potom bude

$$p = m + 143,$$
$$q = n + 143,$$
$$r = 8(m + n) + 2431.$$

Položíme-li

$$m = 24, \quad n = 960,$$

obdržíme čísla spřízněná

$$M = 2^4 . 167 . 1103 = 2947216,$$
$$N = 2^4 . 17 . 10303 = 2802416$$

aneb položíme-li

$$m = 96, \quad n = 240,$$

budou čísla spřízněná

$$M = 2^4 . 383 . 239 = 1464592,$$
$$N = 2^4 . 17 . 5119 = 1392368.$$

β) Budiž

$$f = 47, \quad \int f = 48, \quad e = 32, \quad R = 1024 . 5 . 7, \quad PQ = 2^{14} . 3 . 5 . 7.$$

Učiňme

$$P = 32m, \quad Q = 32n,$$

takže bude

$$mn = 2^4 . 3 . 5 . 7$$

a

$$p = m + 23, \quad q = n + 23, \quad r = \frac{m + n}{2} + 46.$$

Dosazením $m = 30$, $n = 56$ dostaneme čísla spřízněná

$$M = 2^4 . 53 . 79 = 66992,$$
$$N = 2^4 . 47 . 89 = 66928.$$

γ) Budiž

$$f = 17 \,.\, 167, \quad \int f = 18 \,.\, 168 = 3024, \quad e = 64, \quad R = 2048 \,.\, 1797,$$
$$PQ = 2^{15} \,.\, 3^4 \,.\, 7 \,.\, 599.$$

Učiňme

$$P = 64m, \quad Q = 64n;$$

bude

$$mn = 2^3 \,.\, 3^4 \,.\, 7 \,.\, 599$$

a

$$p = m + 755,$$
$$q = n + 755,$$
$$r = \frac{m+n}{4} + \frac{2173}{2}.$$

Dosaďme

$$m = 54, \quad n = 12579.$$

Čísla spřízněná budou

$$M = 2^4 \,.\, 809 \,.\, 51071 = 661063024,$$
$$N = 2^4 \,.\, 17 \,.\, 167 \,.\, 13679 = 621354896.$$

D. *Čtvrtá forma.*

$$M = a \,.\, g \,.\, p \,.\, q, \quad N = a \,.\, h \,.\, r,$$

při čemž g a h mohou, ale nemusí býti prvočísla.

Dle vlastnosti čísel spřízněných bude

$$\int a \int g \int p \int q = \int a \int h \int r$$

aneb

$$(p+1)(q+1) \int q = (r+1) \int h.$$

Učiňme

$$\frac{\int g}{\int h} = \frac{m}{n}$$

a bude

$$r + 1 = \frac{m}{n}(p+1)(q+1).$$

Druhá vlastnost čísel spřízněných nám dává rovnici

$$\int a \int h \int r = agpq + ahr,$$

aneb poněvadž

$$\frac{\int a}{a} = \frac{2b-c}{b},$$

jest

$$(r+1)(2b-c) \int h = b(gpq + hr);$$

a dosadíme-li za r a $r+1$ příslušné hodnoty, obdržíme

$$m(p+1)(q+1)(2b-c)\int h = b[ngpq + mh(p+1)(q+1) - nh].$$

Učiňme

$$x = p+1, \quad y = q+1,$$

a bude

$$m(2b-c)\,xy\int h = b\,(mhxy + ngpq - nh).$$

Položme $b\,(mh+ng) - (2b-c)\,m\int h = e$, a upravme rovnici; bude základní rovnice čísel spřízněných tato:

$$(ex - nbg)\,(ey - nbg) = mnb^2g^2 + nb\,(h-g)\,e = \mathrm{PQ}.$$

Process s touto rovnicí je týž jako s předešlými základními rovnicemi, totiž aby byla prvočísla

$$p = \frac{\mathrm{P} + nbg}{e} - 1,$$

$$q = \frac{\mathrm{Q} + nbg}{e} - 1,$$

$$r = \frac{m}{n}\,\frac{(\mathrm{P} + nbg)(\mathrm{Q} + nbg)}{e^2} - 1.$$

Jsou-li g a h kmenná, bude

$$\frac{m}{n} = \frac{g+1}{h+1}.$$

Pišme $\quad g = km - 1, \quad h = kn - 1;$

bude $\quad \int g = km, \quad \int h = kn,$

a $\quad e = b\,(2kmn - m - n) - (2b-c)\,kmn$

aneb $\quad e = ckmn - b\,(m+n),$

$$\mathrm{PQ} = [ex - bn\,(km-1)]\,[ey - bn\,(km-1)].$$

Volme příklady.

1. Budiž $\quad m = 3, \quad n = 1, \quad a = 2.5;$

tedy $\quad b = 5, \quad c = 1;$

bude pak $\quad e = 3k - 20.$

Učiníme-li $k = 8$, bude $e = 4$ a základní rovnice

$$(4x - 115)\,(4y - 115) = 5.29.89.$$

Čísla spřízněná pak jsou

$$M = 2 \,.\, 5 \,.\, 23 \,.\, 29 \,.\, 673 = 4488910,$$
$$N = 2 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 60659 = 4246130.$$

2. Budiž jako dříve

$m = 3, \quad n = 1, \quad$ ale $\quad a = 3^3 \,.\, 5; \quad$ tedy $\quad b = 9, \quad c = 2;$

bude pak $\qquad e = 6k - 36.$

Učiníme-li opět $k = 8$, jest $e = 12$, základní rovnice

$$(4x - 69)(4y - 69) = 3 \,.\, 1523$$

a čísla spřízněná

$$M = 3^3 \,.\, 5 \,.\, 23 \,.\, 17 \,.\, 397 = 20955645,$$
$$N = 3^3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 21491 = 20308995.$$

E. *Pátá forma.*

$$M = z \,.\, a \,.\, p, \qquad N = z \,.\, b \,.\, q.$$

Faktory a, b jsou dány, p a q jsou čísla kmenná a společný faktor z nutno jest nalézti, kdežto při předešlých formách byl vždy dán.

Aby M a N byla čísla spřízněná, musí

$$\int z \int a \int p = \int z \int b \int q$$

aneb
$$\int a\,(p + 1) = \int b\,(q + 1).$$

Pišme $\dfrac{\int a}{\int b} = \dfrac{m}{n}$ a tu jest

$$m\,(p + 1) = n\,(q + 1).$$

Položíme-li

$$p + 1 = nx, \qquad q + 1 = mx,$$

budou čísla spřízněná

$$M = za\,(nx - 1),$$
$$N = zb\,(mx - 1).$$

Součet dělitelů čísla M jest $\int M = nx \int a \int z$

a součet „ „ N „ $\int N = mx \int b \int z.$

Poněvadž $\qquad \int M = M + N,$

bude $\qquad nx \int a \int z = z\,[(na + mb)\,x - a - b]$

aneb $$\frac{z}{\int z} = \frac{nx \int a}{(na + mb)\,x - a - b}.$$

Zkrátíme-li pravou stranu této rovnice, obdržíme hodnotu

$$\frac{r}{s}, \text{ takže } \frac{z}{\int z} = \frac{r}{s}.$$

Zřejmo jest nyní, že $z = kr$, $(k = 1, 2, 3, \ldots, l)$

aneb $$\int z = \int kr \text{ t. j. } \int z = ks.$$

Dle toho $\int kr = ks$.

Zřejmo jest též, že $\int k > k$.

Znásobme celou nerovnost číslem $\int r$ a bude

$$\int k \int r > k \int r \text{ aneb } \int kr > k \int r \text{ čili } ks > k \int r, \text{ t. j. } s > \int r.$$

Obraťme poměr $\frac{z}{\int z}$; tu bude

$$\frac{\int z}{z} = \frac{na + mb}{n \int a} - \frac{a + b}{nx \int a} = \frac{a}{\int a} + \frac{b}{\int b} - \frac{a + b}{nx \int a}.$$

Poněvadž $\frac{a}{\int a} < 1$ i $\frac{b}{\int b} < 1$, bude

$$\frac{\int z}{z} < 2 - \frac{a + b}{nx \int a};$$

obrátíme-li

$$\frac{z}{\int z} > \frac{1}{2} \text{ aneb } \frac{r}{s} > \frac{1}{2} \text{ čili } s < 2r.$$

Poněvadž však $s > \int r$, musí tím spíše $\int r < 2r$.

Jest tedy nutno k vyhledání čísel spřízněných, aby byla splněna podmínka $\int r < 2r$, aneb, což stejné jest $\int z < 2z$.

Uvedeme na vzor jen jediný příklad.

Budiž

$$a = 5,\ b = 1, \text{ z toho } \int a = b,\ \int b = 1, \text{ aneb } m = 6,\ n = 1.$$

Čísla spřízněná budou

$$M = 5\,(x - 1)\,z,$$
$$N = 6\,(x - 1)\,z$$

a poměr $$\frac{z}{\int z} = \frac{6x}{11x - 6}.$$

Nyní nutno vyhledati x tak, aby $\int z < 2z$.

Položme $x = 3p$, pak bude $\frac{z}{\int z} = \frac{6p}{11p - 2}$.

Učiňme dále $p = 3q + 1$ a bude

$$\frac{z}{\int z} = \frac{2(3q+1)}{11q+3}, \quad x = 9q + 3.$$

Aby $x - 1$ a $6x - 1$ mohla býti prvočísla, musí q býti číslo liché, t. j. míti tvar $q = 2t - 1$.

Tu bude $\quad x - 1 = 18t - 7,$

$$6x - 1 = 108t - 37$$

a

$$\frac{z}{\int z} = \frac{2(3t-1)}{11t-4}.$$

Učiníme-li nyní $\quad t = 8,$

bude

$$x - 1 = 137,$$
$$6x - 1 = 827$$

a

$$\frac{z}{\int z} = \frac{23}{2 \cdot 3 \cdot 7}.$$

Nyní zbývá ještě určiti z.

Položme $\quad z = 23P,$

jest

$$\int z = 24 \int P$$

a

$$\frac{P}{\int P} = \frac{24}{23} \cdot \frac{z}{\int z} = \frac{4}{7}.$$

Poněvadž $7 = \int 4$ jest $P = 4$ a $z = 4 \cdot 23$.
Čísla spřízněná pak jsou

$$M = 2^2 \cdot 23 \cdot 5 \cdot 137 = 63020,$$
$$N = 2^2 \cdot 23 \cdot 827 = 76084.$$

Podobným způsobem lze vyvoditi ještě na př.:

$$M = 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 53 \cdot 11 \cdot 211 = 19041305283,$$
$$N = 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 53 \cdot 2543 = 20862576189;$$

a

$$M = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 179 = 26138475,$$
$$N = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 359 = 26090325.$$

F. *Jiné formy.*

Poněkud jiného útvaru jsou tyto dvě dvojice čísel spřízněných:

$$M = 2^3 . 19 . 41 = 6232,$$
$$N = 2^5 . 199 = 6368;$$
$$M = 2^3 . 41 . 467 = 153176,$$
$$N = 2^5 . 19 . 233 = 141664.$$

Z forem zde uvedených bylo odvozeno dosud, pokud jsme mohli shledati, 65 dvojic čísel spřízněných. Jsou to:

1. $M = 2^2 . 5 . 11 = 220,$
   $N = 2^2 . 71 = 284;$
2. $M = 2^2 . 5 . 131 = 2620,$
   $N = 2^2 . 17 . 43 = 2924;$
3. $M = 2^2 . 5 . 251 = 5020,$
   $N = 2^2 . 13 . 107 = 5564;$
4. $M = 2^3 . 19 . 41 = 6232,$
   $N = 2^5 . 199 = 6368;$
5. $M = 2^3 . 17 . 79 = 10744,$
   $N = 2^3 . 23 . 59 = 10856;$
6. $M = 2^4 . 23 . 47 = 17296,$
   $N = 2^4 . 1151 = = 18416;$
7. $M = 2^2 . 23 . 5 . 137 = 63020,$
   $N = 2^2 . 23 . 827 = 76084;$
8. $M = 2^4 . 47 . 89 = 66928,$
   $N = 2^4 . 53 . 79 = 66992;$
9. $M = 3^3 . 5 . 7 . 71 = 67095,$
   $N = 3^3 . 5 . 17 . 31 = 71145;$
10. $M = 3^2 . 7 . 13 . 5 . 17 = 69615,$
    $N = 3^2 . 7 . 13 . 107 = 87633;$
11. $M = 3^2 . 5 . 7 . 11 . 29 = 100485,$
    $N = 3^2 . 5 . 31 . 89 = 124155;$
12. $M = 3^2 . 5 . 13 . 11 . 19 = 122265,$
    $N = 3^2 . 5 . 13 . 239 = 139815;$
13. $M = 2^5 . 19 . 233 = 141664,$
    $N = 2^3 . 49 . 467 = 153176;$
14. $M = 2 . 5 . 7 . 19 . 107 = 142310,$
    $N = 2 . 5 . 47 . 359 = 168730;$

15. $M = 2^4 . 23 . 467 = 171856$,
$N = 2^4 . 103 . 107 = 176336$;
16. $M = 2^4 . 23 . 479 = 176272$,
$N = 2^4 . 89 . 127 = 180848$;
17. $M = 2^2 . 11 . 17 . 263 = 196724$,
$N = 2^2 . 11 . 43 . 107 = 202444$;
18. $M = 2^2 . 5 . 13 . 1187 = 308620$,
$N = 2^2 . 43 . 2267 = 389924$;
19. $M = 2^4 . 19 . 1439 = 437456$,
$N = 2^4 . 149 . 191 = 455344$;
20. $M = 2^4 . 23 . 1367 = 503056$,
$N = 2^4 . 53 . 607 = 514736$;
21. $M = 3^2 . 5 . 13 . 19 . 47 = 522405$,
$N = 3^2 . 5 . 13 . 29 . 31 = 525915$;
22. $M = 2^3 . 11 . 29 . 239 = 609928$,
$N = 2^3 . 191 . 449 = 686072$;
23. $M = 2^3 . 29 . 47 . 59 = 643336$,
$N = 2^3 . 17 . 4799 = 652664$;
24. $M = 2^3 . 11 . 59 . 173 = 898216$,
$N = 2^3 . 57 . 2609 = 1189704$;
25. $M = 3^2 . 7^2 . 13 . 5 . 41 = 1175265$,
$N = 3^2 . 7^2 . 13 . 251 = 1438983$;
29. $M = 3^2 . 5 . 13 . 11 . 199 = 1280565$,
$N = 3^2 . 5 . 13 . 29 . 79 = 1340235$;
27. $M = 3^2 . 5 . 19 . 7 . 227 = 1358595$,
$N = 3^2 . 5 . 19 . 37 . 47 = 1486845$;
28. $M = 2^4 . 17 . 5119 = 1392368$,
$N = 2^4 . 239 . 383 = 1464592$;
29. $M = 2^5 . 59 . 1103 = 2082464$,
$N = 2^5 . 79 . 827 = 2090656$;
30. $M = 2^3 . 11 . 163 . 191 = 2739704$,
$N = 2^3 . 31 . 11807 = 2928136$
31. $M = 2^4 . 17 . 10303 = 2802416$,
$N = 2^4 . 167 . 1103 = 2947216$;
32. $M = 2^3 . 11 . 23 . 1619 = 3276856$,
$N = 2^3 . 719 . 647 = 3721544$;
33. $M = 2^3 . 11 . 23 . 1871 = 3786904$,
$N = 2^3 . 467 . 1151 = 4300136$;

34. $M = 2 . 5 . 23 . 29 . 673 = 4488910,$
$N = 2 . 5 . 7 . 60659 = 4246130;$
35. $M = 2^3 . 11 . 23 . 2543 = 5147032,$
$N = 2^3 . 383 . 1907 = 5843048;$
36. $M = 2^6 . 139 . 863 = 7677248,$
$N = 2^6 . 719 . 167 = 7684672;$
37. $M = 2^7 . 191 . 383 = 9363584,$
$N = 2^7 . 73727 = 9437056;$
38. $M = 3^4 . 5 . 11 . 29 . 89 = 11498355,$
$N = 3^4 . 5 . 11 . 2699 = 12024045;$
39. $M = 2^5 . 37 . 12671 = 15002464,$
$N = 2^5 . 227 . 2111 = 15334304;$
40. $M = 2^5 . 53 . 10559 = 17908064,$
$N = 2^5 . 79 . 7127 = 18017056;$
41. $M = 3^3 . 5 . 17 . 23 . 397 = 20955645,$
$N = 3^3 . 5 . 7 . 21491 = 20308995;$
42. $M = 3^2 . 5^2 . 17 . 19 . 359 = 26090325,$
$N = 3^2 . 5^2 . 11 . 59 . 179 = 26138475;$
43. $M = 3^2 . 5 . 7 . 53 . 1889 = 31536855,$
$N = 3^2 . 5 . 7 . 102059 = 32148585;$
44. $M = 2^6 . 79 . 11087 = 56055872,$
$N = 2^6 . 383 . 2309 = 56598208;$
45. $M = 3^2 . 7 . 13 . 5 . 17 . 1187 = 82633005,$
$N = 3^2 . 7 . 13 . 131 . 971 = 104177619;$
46. $M = 2^4 . 67 . 37 . 2411 = 95629904,$
$N = 2^4 . 67 . 227 . 401 = 97580944;$
47. $M = 2^4 . 23 . 47 . 9767 = 168930032,$
$N = 2^4 . 1583 . 7103 = 179904784;$
48. $M = 2^2 . 13 . 17 . 389 . 509 = 175032884,$
$N = 2^2 . 13 . 17 . 198899 = 175826716;$
49. $M = 3^2 . 5 . 13 . 19 . 29 . 569 = 183408615,$
$N = 3^2 . 5 . 13 . 19 . 17099 = 190055385;$
50. $M = 3^2 . 5 . 19 . 37 . 7 . 887 = 196421715,$
$N = 3^2 . 5 . 19 . 37 . 7103 = 224703405;$
51. $M = 3^3 . 5 . 23 . 11 . 19 . 367 = 238162815,$
$N = 3^3 . 5 . 23 . 79 . 1103 = 270560385;$
52. $M = 3^2 . 7^2 . 13 . 97 . 5 . 193 = 536637465,$
$N = 3^2 . 7^2 . 13 . 97 . 1163 = 646745463;$

53. $M = 2^4 . 17 . 167 . 13679 = 621354896$,
$N = 2^4 . 809 . 51071 = 661063024$;
54. $M = 3^2 . 5 . 13 . 19 . 37 . 1583 = 651016665$,
$N = 3^2 . 5 . 13 . 19 . 227 . 263 = 663576615$;
55. $M = 2^8 . 383 . 9203 = 902335744$,
$N = 2^8 . 1151 . 3067 = 903709952$;
56. $M = 3^2 . 7^2 . 11 . 13 . 41 . 461 = 1191953763$,
$N = 3^2 . 7^2 . 11 . 13 . 19403 = 1223611389$;
57. $M = 3^2 . 7 . 13 . 23 . 11 . 19 . 367 = 1444854411$,
$N = 3^2 . 7 . 13 . 23 . 79 . 1103 = 1641399669$;
58. $M = 3^5 . 7^2 . 13 . 53 . 11 . 211 = 19041305283$;
$N = 3^5 . 7^2 . 13 . 53 . 2543 = 20862576189$;
59. $M = 3^2 . 7 . 13 . 41 . 163 . 5 . 977 = 26747216645$,
$N = 3^2 . 7 . 13 . 41 . 163 . 5867 = 32124036859$;
60. $M = 3^2 . 7^2 . 13 . 19 . 11 . 220499 = 264201240303$,
$N = 3^2 . 7^2 . 13 . 19 . 89 . 29399 = 285008693697$;
61. $M = 3^2 . 7^2 . 13 . 19 . 23 . 162 . 287 = 401423269127$,
$N = 3^2 . 7^2 . 13 . 19 . 23 . 83 . 1931 = 401535312633$;
62. $M = 3^4 . 7 . 11^2 . 19 . 47 . 7019 = 430026411969$,
$N = 3^4 . 7 . 11^2 . 19 . 389 . 863 = 437605152851$;
63. $M = 3^4 . 7 . 11^2 . 19 . 53 . 6959 = 480778165791$,
$N = 3^4 . 7 . 11^2 . 19 . 179 . 2087 = 486964733409$;
64. $M = 3^5 . 7^2 . 13 . 19 . 47 . 7019 = 970224879897$,
$N = 3^5 . 7^2 . 13 . 19 . 389 . 863 = 987324022503$;
65. $M = 3^5 . 7^2 . 13 . 19 . 53 . 6959 = 1084730902983$,
$N = 3^5 . 7^2 . 13 . 19 . 179 . 2087 = 1098688926617$.

II. **Čísla dokonalá.**

Podmínkou pro čísla spřízněná bylo, aby

$$\int N - N = M, \qquad \int M - M = N.$$

U čísel dokonalých redukuje se podmínka tato na

$$\int N - N = N \quad \text{aneb} \quad \int N = 2N.$$

Čísla dokonalá odvodíme si z podobných forem jako čísla spřízněná. Hlavní formy jsou asi tyto:

1. $N = p^\pi$, 2. $N = r . p^\pi$, 3. $N = r^\varrho . p^\pi$, 4. $N = p . c$.

A. *První forma.*

$$N = p^\pi.$$

Součet dělitelů $\int N = \frac{p^{\pi+1} - 1}{p - 1}.$

Poněvadž $\int N = 2N,$

jest $\frac{p^{\pi+1} - 1}{p - 1} = 2p^\pi$

aneb $p^\pi (2 - p) = 1.$

Rovnici této vyhovuje $p = 1$.

Dle toho bylo by číslem dokonalým číslo 1, což však není možno, neboť nevyhovuje podmínce $\int N = 2N$.

B. *Druhá forma.*

$$N = r \, . \, p^\pi,$$

kde r a p jsou čísla kmenná.

Součet dělitelů $\int N = (r + 1) \frac{p^{\pi+1} - 1}{p - 1}.$

Poněvadž $\int N = 2N,$

bude $(r + 1) \frac{p^{\pi+1} - 1}{p - 1} = 2rp^\pi,$

z čehož $p^\pi = \frac{r + 1}{r(2 - p) + p}.$

Dosaďme za $p = 2 + k$

a bude $(2 + k)^\pi = \frac{r + 1}{k(1 - r) + 2}.$

Poněvadž $(2 + k)^\pi > 0$ a $r + 1 > 0,$

bude též $k(1 - r) + 2 > 0.$

To však je jen tehdy možno, když $k = 0$;

tu $r = 2^{\pi+1} - 1, \quad p = 2.$

Dle toho bude číslo dokonalé $N = (2^{\pi+1} - 1)2^\pi$, s tou ovšem podmínkou, že $r = 2^{\pi+1} - 1$ jest prvočíslo.

C. *Třetí forma.*

$$N = p^\pi . r^\varrho .$$

$$\int N = \frac{p^{\pi+1} - 1}{p - 1} . \frac{r^{\varrho+1} - 1}{r - 1} = 2 p^\pi r^\varrho ,$$

z čehož $$p^\pi = \frac{r^{\varrho+1} - 1}{r^{\varrho+1}(2 - p) - 2r^\varrho(1 - p) - p} ;$$

p^π musí býti číslo celistvé a proto jest nutno, aby

$$2 - p = 0 \quad \text{aneb} \quad p = 2.$$

Tím bude $$2^\pi = \frac{r^{\varrho+1} - 1}{2r^\varrho - 2}$$

aneb $$2^{\pi+1} = \frac{r^{\varrho+1} - 1}{r^\varrho - 1} = r + \frac{r - 1}{r^\varrho - 1} .$$

Poněvadž $\frac{r - 1}{r^\varrho - 1}$ musí býti opět číslo celistvé, nutno jest, aby $\varrho = 1$.

Tak povstane rovnice

$$2^{\pi+1} = \frac{r^2 - 1}{r - 1} = r + 1$$

a z toho $$r = 2^{\pi+1} - 1 .$$

Číslo dokonalé jest totéž jako dříve, totiž $N = (2^{\pi+1} - 1) 2^\pi$ s touž podmínkou.

D. *Čtvrtá forma.*

$$N = c . p ,$$

kde p jest číslo kmenné a c číslo složené.

$$\int N = (p + 1) \int c = 2pc$$

aneb, píšeme-li $\int c = C$,

$$\frac{2c}{C} = \frac{p + 1}{p} .$$

Aby tato rovnice platila, musí $2c$ a C míti společného nějakého dělitele, aby $\frac{2c}{C}$ mohlo se zkrátiti na $\frac{p+1}{p}$. To však jest jen tehdy možno, když $c = 2^{\alpha}$.

Tu pak $C = 2^{\alpha+1} - 1$

a $$\frac{2^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1} - 1} = \frac{p+1}{p} \quad \text{aneb} \quad p = 2^{\alpha+1} - 1.$$

Zde dojdeme k témuž výsledku jako u forem předešlých.

Platí tedy všeobecně, že $N = 2^{\alpha}(2^{\alpha+1} - 1)$ jest číslo dokonalé, když $2^{\alpha+1} - 1$ jest prvočíslo.

Podmínce této vyhovuje však jen několik málo čísel, takže počet čísel dokonalých jest velmi nepatrný. Dosud známa jsou jen tato:

1. $N = (2^2 - 1)\,2 = 6$,
2. $N = (2^3 - 1)\,2^2 = 28$,
3. $N = (2^5 - 1)\,2^4 = 496$,
4. $N = (2^7 - 1)\,2^6 = 8128$,
5. $N = (2^{13} - 1)\,2^{12} =$ 33,550.336,
6. $N = (2^{17} - 1)\,2^{16} =$ 8589,869.056,
7. $N = (2^{19} - 1)\,2^{18} =$ 137.438,691.328,
8. $N = (2^{31} - 1)\,2^{30} =$ 2,,,305.843,,008.139,952.128,
9. $N = (2^{61} - 1)2^{60}$

= 2;,,,,,658.455,,,,,991.569,,,,831.744,,,654.692,,615.953,842.176.

Z hlavních vlastností čísel dokonalých jsou důležity tyto:

1. Každé číslo dokonalé končí buď číslicí 6 aneb číslem 28, a sice čísla dokonalá formy $2^{4p}(2^{4p+1} - 1)$ končí se 6, čísla dokonalá formy $2^{4p+2}(2^{4p+3} - 1)$ končí se 28.

2. Všechna čísla dokonalá, vyjma 6, dělená 9 dávají za zbytek 1.

3. Čísla dokonalá končící 6, dělená 15, dávají za zbytek 1.

4. Čísla dokonalá končící 8, dělená 15, dávají za zbytek — 2.

Důkazy pro tyto věty jsou poněkud obtížnější, proto jich zde pominuto.

Dodatek redakce k článku předcházejícímu.

Doufáme zavděčiti se čtenářům těchto listů, podáme-li k zajímavému článku páně Bezdíčkovu některé poznámky historické o číslech dokonalých a spřízněných.*)

Jak již v úvodu k řečenému článku pověděno, původ těchto čísel jest hledati ve škole Pythagorovců. O číslech dokonalých mluví též *Plato* i *Aristoteles*, ale v jiném smyslu; tomuto jest 10 číslem dokonalým. Povšimnutí hodno, že *Plato* již zabýval se úlohou, ustanoviti všechny dělitele čísla daného; tak zejména ustanovil dělitele čísla 5040, jichž jest mimo číslo samo 59.

První však, kdo čísla dokonalá zevrubně vyšetřoval a vznik jejich správně vyložil, jest slavný „otec geometrie“ *Euklid.* Mezi výměry položenými v čele VII. knihy jeho „Základů“ čteme 22. definici tuto: „Číslo dokonalé jest to, které rovná se všem svým dílům dohromady“. Kterak taková čísla jest hledati, k tomu návod podává v knize IX., která končí 36. větou: „Máme-li několik čísel od jedné počínajících a stále zdvojnásobených, jichž součet jest prvočíslo, jest součin z tohoto součtu a čísla posledního číslem dokonalým“. Objev této věty i důkaz její svědčí o arithmetickém důmyslu velkého geometra řeckého. Našimi znaky bychom ji vyjádřili takto:

Je-li součet

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}$$

prvočíslem, jest

$$(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) \, . \, 2^{n-1}$$

čili

$$(2^n - 1) \, . \, 2^{n-1}$$

číslem dokonalým. Důkaz Euklidův, vyjádřený našimi znaky algebraickými, lze krátce podati takto:

Budiž

$$p = 2^n - 1$$

*) Číslo dokonalé = numerus perfectus, nombre parfait, vollkommene Zahl; čísla spřízněná = numeri amicabiles, nombres amicaux, befreundete Zahlen.

prvočíslo, potom má číslo

$$N = (2^n - 1)2^{n-1}$$

tyto dělitele:

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3, \ldots, 2^{n-1}$$
$$p,\ 2p,\ 2^2p,\ 2^3p, \ldots, 2^{n-1}p,$$

jichž součet, mimo číslo N samo, jest

$$S = (1 + p)(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) - 2^{n-1}p.$$

Avšak

$$S = (1 + p)(2^n - 1) - 2^{n-1}p = 2^np - 2^{n-1}p = 2^{n-1}p,$$

tudíž

$$N = S.$$

Euklid uvádí k tomu tento číselný příklad:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2^5 - 1 = 31 \quad \text{(prvočíslo)},$$
$$N = (2^5 - 1) . 2^4 = 31 . 16 = 496.$$

Z pozdějších mathematiků řeckých *Nikomachos* v I. stol. po Kr. podal ve své arithmetice přehled Pythagorovské nauky o číslech vůbec a zvláště vývody Euklidovy o číslech dokonalých. *Theon ze Smyrny* (ve II. století po Kr.) učil rozeznávati různé zvláštní druhy čísel; on též roztřídil čísla na dokonalá, nadbytková a nedostatková.*) *Jamblichos* (v III. stol. po Kr.) také jednal o číslech dokonalých; udává, že v každém desítkovém řádu čísel jest jen jedno dokonalé, totiž (dle našeho označení)

$$0 < 6 < 10 < 28 < 10^2 < 496 < 10^3 < 8128 < 10^4.$$

Nevěděl ovšem, že není dokonalého čísla již následujících řádů 4., 5. a 6.

Od Řeků přešly mathematické vědomosti k Indům, kteří v arithmetice i nad své učitele vynikli. Jest proto dosti nápadno, že v nauce o číslech dokonalých a spřízněných žádného

---

*) Číslo nadbytkové = numerus abondans, nombre parfait, überschiessende Zahl; číslo nedostatkové = numerus deficiens, nombre défectueux, mangelhafte Zahl.

pokroku neučinili; ten pozorujeme teprve u Arabů, z nichž *Tabit ibn Kurra* († 901.) učil takto stanoviti čísla spřízněná: Jsou-li

$$r = 3 \, . \, 2^n - 1, \quad q = 3 \, . \, 2^{n-1} - 1, \quad r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$$

prvočísla, jsou

$$M = 2^n . pq, \quad N = 2^n . r$$

čísla spřízněná.

Při $n = 2$ jest

$$p = 11, \quad q = 5, \quad r = 7,$$

z čehož plynou čísla spřízněná

$$M = 220, \quad N = 284$$

známá již Pythagorovi.

Že počtáři středověcí čísly dokonalými a přátelskými se zabývali, lze při zajímavosti těchto čísel bezpečně očekávati. Tak italský mnich *Luca Paccioli*, přítel slavného malíře Lionarda de Vinci, ve svém díle „Summa de arithmetica" (1494) podává návod k vyhledání čísel dokonalých a připojuje zajímavou poznámku, že čísla dokonalá končí vždy číslicí 6 neb 8, dodávaje, že „dobří a dokonalí šetří ve všem řádu předepsaného". Také ze sporu o vynález řešení rovnic 3. stupně známí sokové *Cardano* a *Tartaglia*, první v díle „De numerorum proprietatibus" (1539) učí dokonalým číslům dle Euklida, druhý ve spise „General Trattato di numeri e misura" (1556—60) uvádí, že každé dokonalé číslo větší než 6 jest tvaru $9n + 1$. Německý počtář *Stifel* (Arithmetica integra, 1553), užívaje řady

$$4, \ 8 \mid 16, \ 32 \mid 64, \ 128 \mid 256, \ 512 \mid \ldots$$

praví, že z každé zde označené dvojice obdržíme číslo dokonalé, když menší znásobíme větším o 1 zmenšeným. To se shoduje s výsledkem správným při

$$4 \, . \, 7 = 28, \quad 16 \, . \, 31 = 496, \quad 64 \, . \, 127 = 8128,$$

ale ne již při $256 \, . \, 511$; domníval se asi Stifel, že $2^{2n+1} - 1$ jest vždy prvočíslem, avšak již

$$2^9 - 1 = 511 = 7 \,.\, 73,$$

a tedy nesplněna podmínka Euklidem požadovaná. Také o číslech spřízněných 220 a 284 se Stifel zmiňuje, ale domnívá se, že algebrou více takových čísel najíti nelze. Názor ten vyvrátil Holland'an *van Schooten* (Exercitationes mathematicae, 1657), který poprvé užil názvu numeri amicabiles a ustanovil nové dva páry čísel takových, totiž 18416 a 17296, 9437056 a 9363584. Také genialní arithmetik francouzský *Fermat* († 1665) zabýval se čísly dokonalými, ale výsledky jeho nejsou známy. V souvislosti s výzkumy těmi jest bezpochyby vyšetřování prvočísel, z něhož empiricky vzešlo nesprávné pravidlo, že $2^{2^n} + 1$ jest prvočíslem. Slavný vrstevník Fermatův *Descartes* († 1649) v listech svých k počtáři *Mersenneovi* jedná též o číslech dokonalých. Vyslovuje domněnku, že mohou existovati též dokonalá čísla lichá a sice tvaru $mn^2p^2q^2 \ldots$, kdež m, n, p, q jsou prvočísla. Uvádí též čísla 30240, 32760, 403031236608, z nichž každé rovná se $^1/_3$ součtu svých dělitelů a číslo 14182439040 rovné $^1/_4$ takového součtu. Schootenovi Descartes sdělil k stanovení čísel spřízněných pravidlo souhlasící zcela s návodem Tabitovým shora vypsaným.

Z tvaru Euklidova $(2^n - 1) \,.\, 2^{n-1}$ vyvozena během času čísla dokonalá na str. 224. uvedená totiž

$$(2^2 - 1) \,.\, 2 = 3 \,.\, 2, \quad (2^3 - 1) \,.\, 2^2 = 7 \,.\, 4, \quad (2^5 - 1) \,.\, 2^4 = 31 \,.\, 16,$$
$$(2^7 - 1) \,.\, 2^6 = 127 \,.\, 64, \quad (2^{13} - 1) \,.\, 2^{12} = 8191 \,.\, 4096,$$
$$(2^{17} - 1) \,.\, 2^{16} = 131071 \,.\, 65536,$$
$$(2^{19} - 1) \,.\, 2^{18} = 524287 \,.\, 262144,$$
$$(2^{31} - 1) \,.\, 2^{30} = 2147483647 \,.\, 1073741824.$$

Při rostoucím n stává se vyšetření takových čísel proto obtížným, že o velkých číslech tvaru $2^n - 1$ nesnadno bývá rozhodnouti, jsou-li prvočísly čili nic. O čísle $2^{31} - 1$ dokázal to slavný *Euler* († 1783). Vrstevník jeho *Krafft* ve spisech akademie Petrohradské (Comm. Petrop. T. VII.) uvádí též čísla plynoucí z hořejšího tvaru pro $n = 41$ a 47, avšak při bližším ohledání neosvědčila se čísla $2^{41} - 1$ a $2^{47} - 1$ býti prvočísly. Také domněnka Mersenneova, že při $n = 67$, 127, 257 vyjdou čísla dokonalá, dosud nikým nestvrzena. Při ostatních menších hodnotách $n = 9, 11, 23, 29, \ldots$ zjištěno, že nevedou k číslům dokonalým, ježto $2^n - 1$ není pro tyto případy prvočíslem.

Jmenovaný *Krafft* (Nov. Comm. Petrop. T. II.) pojednal též o číslech spřízněných, o nichž také *Euler* uveřejnil obšírnou stať ve svých Opuscula, (1750). Obsah pojednání jeho, v němž na 61 párů čísel spřízněných uvedeno, čtenáři naši znají z článku páně Bezdíčkova. Také *Klügel* ve svém mathematickém slovníku (I. Band 1803. Článek: Befreundete Zahlen) uvádí methodu k vyhledání čísel takových.

Zbývá nám dodati ještě, jakým způsobem novější doba účastnila se výzkumu o číslech dokonalých a spřízněných. Arithmetické tyto kuriosity, zvláště první z nich, upoutaly pozornost i nynějších mathematiků; svědčí o tom různé práce, s nimiž čtenáře našeho Časopisu seznámil *prof. Strnad* (ročníku XVI. str. 167 a ročníku XVIII. str. 81) a z nichž pro úplnost dovolujeme si tuto připomenouti jen věci nejvýznačnější. K osmi dříve uvedeným číslům dokonalým *Seelhoff* (Schömilch, Zeitschrift, 1886) rozkladem velkých čísel se zabývající, připojil číslo deváté, totiž

$$(2^{61} - 1) . 2^{60} = 2305843009213693951 . 1152921504606846976,$$

dokázav, že $2^{61} - 1$ jest prvočíslem.

Francouzský badatel *Ed. Lucas* (a dříve již Euler) podal důkaz, že každé dokonalé číslo sudé nutně musí býti tvaru Euklidem stanoveného. Hlavně však zabývají se nyní arithmetikové otázkou, může-li býti též liché číslo dokonalým. Číslo takové dosud známo není, ale není též dokázána nemožnost jeho. Proslulý anglický mathematik *Sylvester* (Comptes Rendus 1888) podal důkaz, že není lichého čísla dokonalého, obsahujícího méně než 6 různých prvočinitelů; Belgičan *Catalan* (Mathesis, t. XVII., VIII.) vyslovil věty: Součet převratných hodnot všech dělitelů dokonalého čísla, číslo samo v to čítaje, rovná se 2. Je-li dokonalé liché číslo nesoudělné s číslem 105, má nejméně 26 různých prvočinitelů a nejméně 45 číslic. Takovéto zvláštní vlastnosti připravují žádané řešení obecné otázky, může-li vůbec existovati dokonalé číslo liché.