Karel Rychlík

O grupě řádu 360

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 4, 360--379

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121979

O grupě řádu 360.

Napsal **K. Rychlík.**

§ 1.

Když se ukázalo, že obecné rovnice stupně vyššího než čtvrtého nejsou řešitelny odmocninami a že vůbec odmocninami lze řešiti rovnice velmi speciálního rázu, byl přirozeně hledán jiný způsob řešení. Jeden z takových pokusů pochází od Kleina (7, 9, 16, 18). Klein zevšeobecnil Galoisovu theorii algebraických rovnic tím, že vzal v úvahu místo grup substitucí permutačních konečné grupy lineárních homogenních n-árních substitucí (resp. lineárních nehomogenních substitucí o $n-1$ proměnných) a zavedl pojem „problému forem" (resp. „systému rovnic"). Mezi problémy forem o isomorfních grupách pokládá pak ten za „normální", jehož substituce mají nejmenší počet proměnných. Řešení odmocninami jeví se pak jako problém forem unární.

Tak nabyl zájmu úkol, stanoviti pro daný počet proměnných všechny možné grupy substitucí lineárních. Klein sám provedl jej pro substituce binární (7, 17, 18) a ukázal zároveň, že obecná rovnice stupně pátého, jejíž obor racionality tvořen jest koefficienty a druhou odmocninou z diskriminantu, dá se převésti na problém forem binární (její kořeny dají se vyjádřiti „irracionalitou ikosaedrickou"; ovšem převod ten nelze provésti racionálně, avšak akcessorická irracionalita, která se při něm vyskytuje, jest jednoduchého rázu: jest to druhá odmocnina z výrazu z oboru racionality).

Dalším případem, $n = 3$, zabýval se nejprve Jordan (6). Zde vyskytly se při klassifikaci velmi četné obtíže, tak že Jordanovi ušly právě dva nejzajímavější typy. A mezi nimi jest grupa, objevená Valentinerem (15), řádu 360 jako grupa kollineací v rovině*).

Ježto grupa tato jest isomorfní s alternující grupou o 6 písmenech, má podobnou důležitost pro řešení obecné rovnice stupně šestého jako grupa ikosaedrická pro rovnici stupně pá-

*) Klassifikace ternárních grup kollineací a substitucí provedena definitivně Blichfeldtem: On the order of linear homogeneous groups. Proceedings of the Amer. Math. Soc. sv. 4. a 5. The Finite, Discontinuous, Primitive Groups of Collineations in Three Variables, Mathem. Annalen 63.

tého (8, 10). Útvar v rovině, použijeme-li naň kollineací grupy Valentinerovy, přejde obecně do 360 různých poloh. Důležitost mají body a přímky, které přecházejí do menšího počtu poloh. Ty nazývají se (16) póly a osy vícečetné.

Tak máme (3, 4, 17):

Soustavu 36 desítičetných sdružených pólů a os a soustavu 72 pětičetných sdružených pólů a os, které jsou body, resp. přímkami dvojnými kollineací řádu 5.

Dvě soustavy po 60 sdružených šestičetných pólech a osách, které pocházejí od dvojných bodů, resp. přímek kollineací řádu 3.

Soustavu 45 pólů a 45 os sdružených osmičetných a soustavu 90 pólů a 90 os sdružených čtyřčetných, které jsou body, resp. přímkami dvojnými kollineací řádu 4. Póly a osy osmičetné jsou nad to středy, resp. osami kollineací řádu 2., což jsou harmonické perspektivity.

Nekonečně mnoho soustav o 180 sdružených $\left\{\begin{array}{l}\text{pólech}\\ \text{osách}\end{array}\right\}$ které obdržíme, použijeme-li na $\left\{\begin{array}{l}\text{libovolný bod ležící na ně-}\\ \text{libovolnou přímku jdoucí ně-}\end{array}\right.$
$\left.\begin{array}{l}\text{které ose osmičetné různý od polů}\\ \text{kterým pólem osmičetným různou od os}\end{array}\right\}$ desítičetných, šestičetných, osmičetných a čtyřčetných kollineací grupy.

Konfigurací danou těmito body a přímkami zabýval se ještě před objevením grupy té Gerbaldi (2) u příležitosti systému šesti kuželoseček „v involuci", čímž míní takový systém, že oba simultanní invarianty libovolných dvou kuželoseček ze systému jsou rovny nulle. A. Wiman (17) právě ukázal, že grupa Valentinerova má tu vlastnost, že zmíněných 6 kuželoseček se při ní permutuje dle alternující grupy o 6 písmenech a tak isomorfismus obou grup dokázal.

K Valentinerově grupě příslušná grupa lineárních homogenních substitucí ternárních má, jak nejprve Wiman (17) ukázal, nejméně 3 . 360 = 1080 substitucí.

V následujícím užiji znázornění grupy Valentinerovy udaného Maschkem (14). Lze ji vytvořiti kollineacemi E_1, E_2, E_3, E_4, mezi nimiž jsou relace

$$E_1^3 = (E_1E_2)^3 = (E_2E_3)^3 = (E_3E_4)^3 = 1,$$
$$E_2^2 = E_3^2 = E_4^2 = (E_1E_3)^2 = (E_1E_4)^2 = (E_2E_4)^2 = 1,$$

a které jsou, píšeme-li jen příslušné matice, upravené tak, že determinant jest vesměs $= 1$.

$$E_1 = \begin{Vmatrix} 0, 1, 0 \\ 0, 0, 1 \\ 1, 0, 0 \end{Vmatrix} \qquad E_2 = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \end{Vmatrix} \qquad E_3 = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -1, & \mu_2, & \mu_1 \\ \mu_2, & \mu_1, & -1 \\ \mu_1, & -1, & \mu_2 \end{Vmatrix}$$

$$E_4 = \begin{Vmatrix} -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -\varepsilon \\ 0, & -\varepsilon^2, & 0 \end{Vmatrix}$$

kdež

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}),$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}).$$

V isomorfismu grupy Valentinerovy s grupou alternující o 6 písmenech (1, 2, 3, 4, 5, 6), lze provésti přiřazení na př.

$$E_1 = (123)$$
$$E_2 = (12)(34)$$
$$E_3 = (12)(45)$$
$$E_4 = (12)(56).$$

Příslušná grupa substitucí bude vytvořena substitucemi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, příslušnými k svrchu napsaným maticím, a substitucí ε

$$\varepsilon = \begin{Vmatrix} \varepsilon, & 0, & 0 \\ 0, & \varepsilon, & 0 \\ 0, & 0, & \varepsilon \end{Vmatrix} {}^{*)}$$

*) Při tomto vytvoření jest grupa psána v Hermiteově tvaru normálním (18), což znamená, že jest při ní invariantní Hermiteova forma $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3$, značí-li $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ hodnoty komplexní sdružené k x_1, x_2, x_3. Z toho plyne, že proměnné kontragredientní k x_1, x_2, x_3 jsou $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$.

Obě grupy, grupa kollineací a substitucí, jsou isomorfní a to tak, že identické kollineaci odpovídají substituce 1, ε, ε^2.

Při Valentinerově grupě kollineací, psané v tomto tvaru, jest trojúhelníkem souřadnic trojúhelník tvořený třemi póly a třemi osami osmičetnými.

Zavedeme však novou soustavu souřadnic, tak aby trojúhelníkem základním byl trojúhelník bodů a přímek dvojných kollineace řádu 5.

$$R = E_1 E_2 E_3 = (12543),$$

$$R = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} -\mu_1, & -1, & -\mu_2 \\ 1, & \mu_2, & -\mu_1 \\ -\mu_2, & \mu_1, & 1 \end{matrix} \right\| .$$

Substituci danou toutéž maticí označíme ϱ.

Dvojné body kollineace R mají souřadnice

$$(\mu_1,\ 0,\ 1),\quad (1,\ i\omega_2,\ -\mu_1),\quad (1,\ -i\omega_2,\ -\mu_1),$$

a přímky dvojné mají rovnice, označíme-li proměnné x_1, x_2, x_3

$$\mu_1 x_1 + x_3 = 0,\quad x_1 - i\omega_2 x_2 - \mu_1 x_3 = 0,\quad x_1 + i\omega_2 x_2 - \mu_1 x_3 = 0,$$

kdež

$$\omega_1 = +\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}},\qquad \omega_2 = +\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

$$\omega_1 = +\sqrt{2-\mu_2},\qquad \omega_2 = +\sqrt{2-\mu_1}.$$

I položíme

$$\begin{aligned} \mu A_0 &= -\mu_1 x_1 - x_3 & \nu x_1 &= -2\mu_1 A_0 + A_1 + A_2 \\ \mu A_1 &= x_1 + i\omega_2 x_2 - \mu_1 x_3 & \nu x_2 &= -i\omega_2 A_1 + i\omega_2 A_2 \\ \mu A_2 &= x_1 - i\omega_2 x_2 - \mu_1 x_3 & \nu x_3 &= -2A_0 - \mu_1 (A_1 + A_2). \end{aligned}$$

Nebudu vypisovati vytvořující kollineace v souřadnicích A. Poukazuji pouze na tu okolnost, že subgrupa ikosaedrická, vytvořená kollineacemi E_1, E_2, E_3 a kterou lze také vytvořiti kollineacemi R a E_2, jest totožná s grupou ikosaedrickou, jak jí užívá Klein (7, str. 213). Vznikne z ní totiž na základě kontragredientního isomorfismu (7, str. 232), což plyne z toho, že obdržíme Kleinovy vytvořující kollineace S, T, klademe-li

$$\begin{aligned} S &= R^2 \\ T &= E_2 U \\ U &= E_1 E_2 E_1^2 = (13)\,(24). \end{aligned}$$

Nyní však není grupa v Hermitově tvaru normálním. zůstalo v Hermiteově tvaru normálním. Aby pak bylo ε_1, ε_2 a ε_3 v Hermiteově tvaru normálním, stačí zavésti nové proměnné

$$\begin{aligned} A_0 &= p z_1 \\ A_1 &= z_2 \\ A_2 &= z_3 \end{aligned}$$

a zvoliti p tak, aby $\left|\frac{1}{p}\right| = 2|p|$, t. j. $|p| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

U ε_4 docílíme pak Hermiteova tvaru normálního, položíme-li na př. $p = \frac{\nu_2}{2}$, kdež

$$\nu_1 = \frac{-\sqrt{3} + i\sqrt{5}}{2},$$

$$\nu_2 = \frac{-\sqrt{3} - i\sqrt{5}}{2}.$$

Tak nabudou vytvořující kollineace grupy Valentinerovy tvaru (při tom kladeno $\eta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$)

E_1	E_2
$\frac{1}{\sqrt{5}}\left\Vert\begin{matrix} 1, & \nu_1\eta^2, & \nu_1\eta^3 \\ \nu_2\eta^4, & \mu_2\eta, & \mu_1\eta^2 \\ \nu_2\eta, & \mu_1\eta^3, & \mu_2\eta^4 \end{matrix}\right\Vert$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}\left\vert\begin{matrix} 1, & \nu_1, & \nu_1 \\ \nu_2, & \mu_1, & \mu_2 \\ \nu_2, & \mu_2, & \mu_1 \end{matrix}\right\vert$

E_3

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\left\Vert\begin{matrix} 1, & \nu_1\eta, & \nu_1\eta^4 \\ \nu_2\eta^4, & \mu_1, & \mu_2\eta^3 \\ \nu_2\eta, & \mu_2\eta^2, & \mu_1 \end{matrix}\right\Vert$$

E_4

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left\Vert\begin{matrix} -\mu_1, & \frac{\mu_2\sqrt{3}+\omega_2}{2}\eta, & \frac{\mu_2\sqrt{3}-\omega_2}{2}\eta^4 \\ \frac{\mu_2\sqrt{3}+\omega_2}{2}\eta^4, & \frac{\mu_2-\omega_2\sqrt{3}}{2}, & \eta^3 \\ \frac{\mu_2\sqrt{3}-\omega_2}{2}\eta, & \eta^2, & \frac{\mu_2+\omega_2\sqrt{3}}{2} \end{matrix}\right\Vert$$

Uveďme ještě kollineace

$$R \qquad\qquad U$$

$$\begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \eta^2, & 0 \\ 0, & 0, & \eta^3 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \\ 0, & -1, & 0 \end{Vmatrix}$$

a kollineaci řádu čtvrtého

$$E_2 E_1^2 E_4 = (1234)\,(56)$$

$$\frac{1}{i\sqrt{5}} \begin{Vmatrix} \sqrt{3}, & 1, & 1 \\ 1, & \nu_1, & \nu_2 \\ 1, & \nu_2, & \nu_1 \end{Vmatrix}$$

Příslušná grupa substitucí bude vytvořena substitucemi ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, danými maticemi právě napsanými a substitucí ε, která bude téhož tvaru jako dříve.

Z uvedených kollineací snadno ustanovíme souřadnice
jednoho z pólů desetičetných $(1 : 0 : 0)$,
„ „ pětičetných $(0 : 1 : 0)$,
„ „ osmičetných $(0 : 1 : -1)$,
„ „ čtyřčetných $((\sqrt{3} + \sqrt{5}) : 1 : 1)$,

místo kterýchž hodnot budeme užívati

$$\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{1+i}{2}\sqrt{15}\,(\sqrt{3}+\sqrt{5})}} : \frac{1}{\sqrt{\frac{1+i}{2}\sqrt{15}\,(\sqrt{3}+\sqrt{5})}} : \right.$$

$$\left. : \frac{1}{\sqrt{\frac{1+i}{2}\sqrt{15}\,(\sqrt{3}+\sqrt{5})}}\right).$$

§ 2.

Jak Wiman (17) dokázal, jest tvořen úplný systém Valentinerovy grupy substitucí jistou základní formou stupně šestého, jejím Hessianem (stupně 12), Hessianem vroubeným derivacemi Hessianu (stupně 30) a funkcionálním determinantem těchto tří forem (stupně 45). Tato forma stupně 45 rozpadá se na faktory lineární: jest to součin 45 os osmičetných. Mezi těmito formami jest syzygie; čtverec formy stupně 45 lze totiž vyjádřiti jako racionálnou celistvou funkci ostatních forem. Formy ty jsou vesměs absolutně invariantní. Systémem tím, zvoliv jinak základní formy invariantní, zabývá se Gerbaldi (3, 4) a methodou symbolickou pojednává o něm Gordan (5).

Abychom určili základní formu invariantní (stupně 6), vyjdeme od invariantních forem stupně 6. při subgrupě ikosaedrické, vytvořené substitucemi ε_1, ε_2, ε_3, jejíž souvislost s grupou ikosaedrickou, jak jí užívá Klein, jsme již vytkli.

Užijeme-li tedy na okamžik Kleinem (7. pag. 213 a násl.) užívaného označení invariantních forem při subgrupě ikosaedrické, bude forma stupně 6. míti tvar

$$\lambda B + \mu A^3,$$

aby pak byla invariantní vzhledem k ε_4, stačí klásti

$$\lambda = \frac{9 - 3i\sqrt{15}}{2} \qquad \mu = \frac{11 + 3i\sqrt{15}}{2}.$$

Forma ta bude invariantní absolutně vzhledem k ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 i ε. Zaveďme pak souřadnice (z) a označme A tak vzniklou základní formu invariantní stupně 6. Pak

$$A = z_1^6 - 15z_1^4 z_2 z_3 - 15z_1^2 z_2^2 z_3^2 + 3\sqrt{3}\, z_1 (z_2^5 + z_3^5) + 10 z_2^3 z_3^3.$$

Klaďme dále

$$H = \frac{1}{2 \,.\, 3^3 \,.\, 5^3} \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & A_{13} \\ A_{21}, & A_{22}, & A_{23} \\ A_{31}, & A_{32}, & A_{33} \end{vmatrix},$$

kdež

$$A_{ik} = \frac{\partial^2 A}{\partial z_i \partial z_k}.$$

I bude invariantní forma stupně 12.

$$H = z_1^{12} + 18 z_1^{10} z_2 z_3 + 15 z_1^8 z_2^2 z_3^2 - 40 z_1^6 z_2^3 z_3^3 + 375 z_1^4 z_2^4 z_3^4 - 156 z_1^2 z_2^5 z_3^5 - 38 z_2^6 z_3^6 + \sqrt{3}\, z_1 (z_2^5 + z_3^5)(36 z_1^6 - 12 z_1^4 z_2 z_3 + 12 z_1^2 z_2^2 z_3^2 + 30 z_2^3 z_3^3) + (z_2^{10} + z_3^{10})(-3 z_1^2 + 6 z_2 z_3).$$

Označme

$$H_i = \frac{\partial H}{\partial z_i}$$

a klaďme

$$B = \frac{1}{2^2 \,.\, 3^4 \,.\, 5^2} \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & A_{13}, & H_1 \\ A_{21}, & A_{22}, & A_{23}, & H_2 \\ A_{31}, & A_{32}, & A_{33}, & H_3 \\ H_1, & H_2, & H_3, & 0 \end{vmatrix}.$$

I jest invariantní forma stupně 30

$$B = (z_2^5 + z_3^5)^6 + 1540\,(z_2^5 + z_3^5)^4 z_2^5 z_3^5 + 8000\,(z_2^5 + z_3^5)^2 z_2^{10} z_3^{10}$$
$$- 50.000 z_2^{15} z_3^{15} + \ldots + z_1^{25} \,.\, 1412\sqrt{3}\,(z_2^5 + z_2^5) + 76 z_1^{26} z_2^2 z_3^2$$
$$+ 20 z_1^{28} z_2 z_3 + 4 z_1^{30}.$$

Dále zaveďme označení

$$T = \frac{1}{2^2 \,.\, 3^4 \,.\, 5 \,.\, \sqrt{3}} \begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3 \\ H_1, & H_2, & H_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \end{vmatrix},$$

kdež kladeno, obdobně jako dříve

$$A_i = \frac{\partial A}{\partial z_i}, \quad B_i = \frac{\partial B}{\partial z_i}$$

$$T = 1024 z_1^{40} (z_2^5 - z_3^5) + \ldots + (z_2^5 - z_3^5)\,(z_2^5 + z_3^5)^4 \,[-(z_2^5 + z_3^5)^4$$
$$+ 500\,(z_2^5 + z_3^5)^2 z_2^5 z_3^5 + 50.000 z_2^{10} z_3^{10}].$$

Zvolíme však za formy úplného systemu místo forem H a B formy vhodně „normalisované“.

Invariantních křivek stupně 12. jest celý svazek

$$\lambda H + \mu A^2 = 0.$$

Zvolíme z nich tu, která jde póly desetičetnými, z nichž jeden má souřadnice: (1, 0, 0). To nastane, klademe-li $\lambda = 1$, $\mu = -1$.

Položme pak

$$C = \frac{H - A^2}{6}$$

a nahraďme v úplném systému formu H formou C.

I bude

$$C = 8 z_1^{10} z_2 z_3 - 30 z_1^8 z_2^2 z_3^2 - 85 z_1^6 z_2^3 z_3^3 + 75 z_1^4 z_2^4 z_3^4 + 15 z_1^2 z_2^5 z_3^5$$
$$- 23 z_2^6 z_3^6 + \sqrt{3}\, z_1 (z_2^5 + z_3^5)\,(5 z_1^6 + 13 z_1^4 z_2 z_3 + 35 z_1^2 z_2^2 z_3^2$$
$$- 5 z_2^3 z_3^3) + (z_2^{10} + z_3^{10})\,(-5 z_1^2 + z_2 z_3).$$

Křivka $C = 0$ nejen že póly desítičetnými prochází, ale má v nich body dvojné s různými tečnami (jsou to osy pětičetné).

Invariantní formy stupně 30. zahrnuty jsou ve vzorci

$$\lambda B + \mu AC^2 + \nu A^3 C + \varrho A^5.$$

Zvolíme číselné konstanty λ, μ, ν, ϱ tak, aby příslušná křivka měla v pólech desítičetných body co možná nejvyšší singularity. To nastane pro

$$\lambda = \frac{1}{3}, \quad \mu = -\frac{109}{3}, \quad \nu = -\frac{40}{3}, \quad \varrho = -\frac{4}{3}.$$

Kladťme

$$\varDelta = \frac{1}{3}(B - 109AC - 40A^3C - 4A^5).$$

$$\begin{aligned} \varDelta = & -384\sqrt{3}\, z_1^{25}(z_2^5 + z_3^5) + \dots \\ & + (z_2^5 + z_3^5)^6 + 150(z_2^5 + z_3^5)^4 z_2^5 z_3^5 + 7500(z_2^5 + z_3^5)^2 z_2^{10} z_3^{10} \\ & - 43750 z_2^{15} z_3^{15}. \end{aligned}$$

Křivka $\varDelta = 0$ bude míti v pólech desítičetných body pětinásobné, s různými tečnami.

Jedná se nyní o výpočet syzygie.

Ta bude tvaru:

$$\begin{aligned} \underset{(80)}{T^2} = & \underset{(75)}{a_0 \varDelta^3} + (\underset{(76)}{a_1 C^2} + \underset{(78)}{a_2 C A^2} + \underset{(80)}{a_3 A^4})\, \varDelta^2 A \\ & + (\underset{(75)}{a_4 C^5} + \underset{(77)}{a_5 C^4 A^2} + \underset{(79)}{a_6 C^3 A^4} + \underset{(81)}{a_7 C^2 A^6} + \underset{(83)}{a_8 C A^8} + \underset{(85)}{a_9 A^{10}})\, \varDelta \\ & + (\underset{(76)}{a_{10} C^7} + \underset{(78)}{a_{11} C^6 A^2} + \underset{(80)}{a_{12} C^5 A^4} + \underset{(82)}{a_{13} C^4 A^6} + \underset{(84)}{a_{14} C^3 A^8} \\ & + \underset{(86)}{a_{15} C^2 A^{10}} + \underset{(88)}{a_{16} C A^{12}} + \underset{(90)}{a_{17} A^{14}})\, A, \end{aligned}$$

kdež $a_0, a_1, \dots a_{17}$ jsou číselné koefficienty a podepsaná čísla značí stupeň nejvyšší mocnosti v z_1.

Všimněme si, že v T^2 jest nejvyšší mocnina u z_1, z_1^{80} a že vyšší mocniny vyskytují se na pravé straně jen jednou.

Z toho plyne, že

$$a_7 = a_8 = a_9 = a_{13} = a_{14} = a_{15} = a_{16} = a_{17} = 0.$$

Abychom vypočetli ostatní koefficienty, položme

$$z_1 = 0,\ z_2 z_3 = 5^{-\frac{1}{3}},\ (z_2^5 + z_3^5)^2 = 5^{-\frac{1}{3}}(t+1).$$

Pak bude

$$A = 2$$
$$C = t$$
$$\Delta = 5t^3 + 45t^2 + 135t + 81$$

a uvážíme-li, že

$$(z_2^5 - z_3^5)^2 = (z_2^5 + z_3^5)^2 - 4 z_2^5 z_3^5 = 5^{-\frac{5}{3}}(25t + 21),$$

bude

$$T^2 = 5(25t + 21)(t+1)^4 (t^2 - 18t - 99)^2.$$

I musí býti identicky:

$$\begin{aligned} & 5(25t+21)(t+1)^4(t^2-18t-99)^2 \\ & = (5t^3+45t^2+135t+81)^3 a_0 \\ & + (5t^3+45t^2+135t+81)^2 (2t^2 a_1 + 2^3 t a_2 + 2^5 a_3) \\ & + (5t^3+45t^2+135t+81)(t^5 a_4 + 2^2 t^4 a_5 + 2^4 t^3 a_6) \\ & + (2t^7 a_{10} + 2^3 t^6 a_{11} + 2^5 t^5 a_{12}). \end{aligned}$$

I vidíme přímo, že $a_0 = 1$ a srovnáme-li koefficienty u t^0, t^1, t^2, dostaneme 3 lineární rovnice pro a_1, a_2, a_3, srovnáním koefficientů u t^8 dostaneme a_4, srovnáním koefficientů u t^3, t^4 dostaneme a_5 a a_6 a konečně srovnáním koefficientů u t^5, t^6, t^7 obdržíme a_{10}, a_{11}, a_{12}.

I bude syzygie vypočtena:

$$\begin{aligned} T^2 = \Delta^3 &+ \left(85C^2 + \frac{80}{3}CA^2 + \frac{64}{27}A^4\right)\Delta^2 A \\ &+ \left(-2304C^5 - \frac{2375}{3}C^4A^2 - \frac{2000}{27}C^3A^4\right)\Delta \\ &- 3840C^7A - \frac{36755}{27}C^6A^3 - 128C^5A^5. \end{aligned}$$

Ke kontrole mohou sloužiti hodnoty, jichž nabývají formy invariantní pro speciální hodnoty (z).

Uveďme hodnoty následující, kterýchž později budeme potřebovati:

Pól	A	C	Δ	T
desítičetný	1	0	0	0
pětičetný	0	0	1	1
osmičetný	— 10	— 25	43750	0
čtyřčetný	0	$\frac{5^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{5}{2}}}\,i$	0	0

(Hodnoty (z) pro jednotlivé póly zvoleny, jak uvedeno dříve.

§ 3.

V grupě alternující o šesti písmenech jsou dvě třídy po 6 spolu sdružených subgrupách ikosaedrických (17, 4). Budou tedy ve Valentinerově grupě substitucí dvě třídy po 6 spolu sdružených subgrupách, z nichž každá jest isomorfní s grupou ikosaedrickou a vznikne z ryzí ternární grupy ikosaedrické připojením substituce ε. Přijdeme tedy k resolventě stupně 6, vyjdeme-li od invariantní formy některé z těchto subgrup, kteráž nabývá různých hodnot, užijeme-li substitucí grupy Valentinerovy.

Speciální případy ($A = 0$) takové resolventy uvádí Fricke (1) a Lachtin (11, 12), obecnou (při jiné volbě kořenů než v následujícím) Gerbaldi (3, 4) a Gordan (5).

Nejjednodušší formou invariantní ryzí subgrupy ikosaedrické, vytvořené substitucemi ε_1, ε_2, ε_3, jest forma kvadratická, kterou vypočteme na základě toho, co řečeno dříve, užijeme-li výsledků Kleinových.

Označme ji f_6.

$$f_6 = z_1^2 + \nu_1^2 z_2 z_3.$$

Za kořen resolventy stupně 6. zvolme pak formu

$$Z_6 = \left(\frac{i\sqrt{15}}{3} f_6\right)^3 + \left(\frac{3 + i\sqrt{15}}{6}\right)^3 A,$$

kteráž jest invariantní při subgrupě řádu 3 . 60

$$J = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon)$$

a má tu vlastnost, že křivka $Z_6 = 0$ prochází 30 z pólů desítičetných.

Ostatní kořeny obdržíme, uvážíme-li, že lze grupu Valentinerovu dle J takto rozložiti

$$J + J\varepsilon_4 + J\varepsilon_4\varrho + J\varepsilon_4\varrho^2 + J\varepsilon_4\varrho^3 + J\varepsilon_4\varrho^4.$$

Tak nalezneme

$$f_5 = \varepsilon_4(f_6) = \frac{-5 + i\sqrt{15}}{10} z_1^2 + \sqrt{3}\,\frac{-5 - i\sqrt{15}}{10} z_1(z_2 + z_3)$$
$$+ \frac{i\sqrt{15}}{5} z_2^2 + \frac{-5 - i\sqrt{15}}{10} z_2 z_3 + \frac{i\sqrt{15}}{5} z_3^2$$

$$f_4 = \varrho(f_5), \quad f_3 = \varrho^2(f_5), \quad f_1 = \varrho^3(f_5), \quad f_2 = \varrho^4(f_5).$$

Uveďme ještě členy nejvyššího stupně v z_1 ve výrazech

$$Z_6 = \frac{-1 - i\sqrt{15}}{2} z_1^6 - 5z_1^4 z_2 z_3 + \dots$$
$$Z_5 = (\sqrt{3} + i\sqrt{5})\, z_1^5 (z_2 + z_3) + \dots$$
$$Z_4 = (\sqrt{3} + i\sqrt{5})\, z_1^5 (z_2\eta^2 + z_3\eta^3) + \dots$$

. . . .

Pro další výpočet upotřebíme hodnot na pólech. Ty jsou sestaveny přehledně.

Pol	f_6 Z_6	f_5 Z_5	f_4 Z_4	f_3 Z_3	f_1 Z_1	f_2 Z_2
desítičetný	1 $\frac{-1-i\sqrt{15}}{2}$	$\frac{-5+i\sqrt{15}}{10}$ 0	$\frac{-5+i\sqrt{15}}{10}$ 0	$\frac{-5+i\sqrt{15}}{10}$ 0	$\frac{-5+i\sqrt{15}}{10}$ 0	$\frac{-5+i\sqrt{15}}{10}$ 0
pětičetný	0 0	$\frac{i\sqrt{15}}{5}$ -1	$\frac{i\sqrt{15}}{5}\eta^2$ $-\eta$	$\frac{i\sqrt{15}}{5}\eta^4$ $-\eta^2$	$\frac{i\sqrt{15}}{5}\eta$ $-\eta^3$	$\frac{i\sqrt{15}}{5}\eta^3$ $-\eta^4$
osmičetný	$\frac{1+i\sqrt{15}}{2}$ $5\,\frac{-3+i\sqrt{15}}{2}$	$\frac{1+i\sqrt{15}}{2}$ $5\,\frac{-3+i\sqrt{15}}{2}$	$-\varepsilon^2$ 5	$-\varepsilon$ 5	$-\varepsilon$ 5	$-\varepsilon^2$ 5
čtyřčetný	$\frac{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}{2}$ $\left(\frac{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}{2}\right)^3$	$-\frac{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}{2}$ $-\left(\frac{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}{2}\right)^3$	$-\varepsilon^2$ -1	ε 1	ε 1	$-\varepsilon^2$ -1

Koefficienty resolventy

$$Z^6 + A_1 Z^5 + A_2 Z^4 + A_3 Z^3 + A_4 Z^2 + A_5 Z + A_6 = 0$$

budou invarianty stupně resp.

$$6, \quad 12, \quad 18, \quad 24, \quad 30, \quad 36$$

stupně v proměnné z_1 nejvýše resp.

$$6, \quad 11, \quad 16, \quad 21, \quad 26, \quad 31.$$

Z toho plyne, že

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha A, \\ A_2 &= \beta C, \\ A_3 &= \gamma AC, \\ A_4 &= \delta C^2, \\ A_5 &= \zeta AC^2 + \varepsilon \Delta, \\ A_6 &= \vartheta C^3 + \varkappa A \Delta, \end{aligned}$$

kdež $\alpha, \beta, \ldots \varkappa$ jsou číselné koefficienty.

(Na př. A_6 jest invariant stupně 36 s nejvyšší mocninou v z_1 31. Lineárně neodvislé invarianty stupně 36 jsou

$$A^6, \quad A^4 C, \quad A^2 C^2, \quad C^3, \quad A\Delta$$

s mocninami z_1 resp.

$$36, \quad 34, \quad 32, \quad 30, \quad 31,$$

z čehož plyne přímo $A_6 = \vartheta C^3 + \varkappa A\Delta$.)

Abychom určili číselné konstanty $\alpha \ldots \varkappa$, budeme dosazovati speciální hodnoty do vztahu

$$\begin{aligned} (Z - Z_6)(Z - Z_5)(Z - Z_4)(Z - Z_3)(Z - Z_1)(Z - Z_2) \\ = Z^6 + \alpha A Z^5 + \beta C Z^4 + \gamma A C Z^3 + \delta C^2 Z^2 \\ + (\zeta A C^2 + \varepsilon \Delta) Z + (\vartheta C^3 + \varkappa A \Delta). \end{aligned}$$

Pomocí hodnot na pólech desítičetných nalezneme

$$\alpha = \frac{1 + i\sqrt{15}}{2},$$

na pólech pětičetných

$$\varepsilon = 1,$$

na pólech čtyřčetných

$$\beta = 5\,\frac{3 - i\sqrt{15}}{2}, \; \delta = -5(4 + i\sqrt{15}), \; \vartheta = \left(\frac{-15 + i\sqrt{15}}{6}\right)^3$$

a pomocí hodnot na pólech osmičetných obdržíme znovu α, β, δ, dále

$$\gamma = 10$$

a užijeme-li pak nalezené hodnoty pro ε a ϑ, nalezneme

$$\zeta = 5\,\frac{1 - i\sqrt{15}}{2}, \quad \varkappa = -\left(\frac{3 + i\sqrt{15}}{6}\right)^3.$$

I bude resolventa

$$Z^6 + \frac{1 + i\sqrt{15}}{2} A Z^5 + 5\,\frac{3 - i\sqrt{15}}{2} C Z^4 + 10\, A C Z^3$$
$$- 5\,(4 + i\sqrt{15})\, C^2 Z^2 + \left(\varDelta + 5\,\frac{1 - i\sqrt{15}}{2} A C^2\right) Z$$
$$+ \left(\frac{-15 + i\sqrt{15}}{6}\right)^3 C^3 + \left(\frac{-3 - i\sqrt{15}}{6}\right)^3 \varDelta A = 0.$$

Uveďme ještě, že analogicky tvořená resolventa, příslušná k druhé třídě spolu sdružených subgrup ikosaedrických by se lišila jen tím, že by měla za koefficienty hodnoty komplexní sdružené *).

§ 4.

V grupě alternující o 6 písmenech jest subgrupa řádu 36. Jí odpovídá ve Valentinerově grupě substitucí subgrupa řádu $108 = 3 \,.\, 36$, která vede k resolventě stupně 10. Systém jejích invariantů jest totožný se systémem invariantních forem harmonické křivky stupně třetího (Maschke 13). Za kořen resolventy 10. stupně zvolíme invariantní formu stupně 9, rozpadávající se v 9 lineárních faktorů. Tyto lineární faktory jsou osy 9 kollineací 2. řádu (perspektivit), obsažených v příslušné grupě kollineací (řádu 36). Pro grupu substitucí (řádu 108) jest ona forma 9. stupně invariantem absolutním.

Zvolme tedy subgrupu řádu $3 \,.\, 36$ vytvořenou substitucemi

$$\varepsilon_2 \varepsilon_1^2 \varepsilon_4 = (1234)(56),$$
$$\varrho^2 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varrho^3 = (24)(35),$$

*) Ježto ve tvaru, kterého užíváme, jsou invarianty vesměs reálné, a substituce grupy Valentinerovy udávají řešení příslušného problému forem, musí se v grupě té vyskytovati s každou substitucí komplexní zároveň substituce komplexní sdružená. Ona druhá třída sdružených spolu subgrup ikosaedrických vznikne z třídy uvedené právě přechodem k hodnotám komplexně sdruženým.

kdež

$$\varrho^2\varepsilon_1^2\varepsilon_2\varepsilon_1\varrho^3 = \begin{cases} z'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(z_1 + \nu_1\eta^4 z_2 + \nu_1\eta z_3), \\ z'_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\nu_2\eta z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_1\eta^2 z_3), \\ z'_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\nu_2\eta^4 z_1 + \mu_1\eta^3 z_2 + \mu_2 z_3). \end{cases}$$

Příslušná invarianta stupně 9. pak bude

$$\begin{aligned} Y = {} & i\sqrt{3}\,\varepsilon^2(z_2 - z_3)(-\nu_2\mu_2 z_1 + \eta z_2 + \eta^4 z_3)(-\nu_2\mu_2 z_1 \\ & + \eta^4 z_2 + \eta z_3)\,.\,(-\nu_1\mu_1 z_1 + \eta^2 z_2 + \eta^3 z_3)(-\nu_1\mu_1 z_1 + \eta^3 z_2 \\ & + \eta^2 z_3)\left(-\mu_2 z_1 + \frac{\mu_2\sqrt{3}+\omega_2}{2}\eta^3 z_2 + \frac{\mu_2\sqrt{3}-\omega_2}{2}\eta^2 z_3\right) \\ & .\left(-\mu_2 z_1 + \frac{\mu_2\sqrt{3}-\omega_2}{2}\eta^2 z_2 + \frac{\mu_2\sqrt{3}+\omega_2}{2}\eta^3 z_3\right)\left(-\mu_1 z_1\right. \\ & \left.+ \frac{\mu_1\sqrt{3}+\omega_1}{2}\eta^4 z_2 + \frac{\mu_1\sqrt{3}-\omega_1}{2}\eta z_3\right).\left(-\mu_1 z_1\right. \\ & \left.+ \frac{\mu_1\sqrt{3}-\omega_1}{2}\eta z_2 + \frac{\mu_1\sqrt{3}+\omega_1}{2}\eta^4 z_3\right). \end{aligned}$$

Označme uvažovanou subgrupu na okamžik H.

Pak lze Valentinerovu grupu substitucí takto rozložiti:

$$H + H\varrho + H\varrho^2 + H\varrho^3 + H\varrho^4 + H\varepsilon_2 + H\varepsilon_2\varrho + H\varepsilon_2\varrho^2 + H\varepsilon_2\varrho^3 + H\varepsilon_2\varrho^4.$$

Pak shledáme, že $\varepsilon_2(Y)$ jest hodnota komplexní sdružená k Y.

Na pólech 10tičetných (na př. 1, 0, 0) mizejí všechny kořeny, a to každý jednou. Označíme-li tedy A_ν koefficient u mocniny $Y^{0-\nu}$ $(A_0 = 1)$, mizí na pólech desítičetných A_ν ν-krát.

Na polech 8četných (na př. 0, 1, — 1) mizí 8 kořenů, kdežto zbývající dva nabývají hodnot protivně označených. Mizí tedy na nich každý koefficient, kromě druhého, a to sudý $(\nu - 2)$krát, lichý $(\nu - 1)$krát.

Koefficienty A_ν budou pak invarianty Valentinerovy grupy substitucí a to

A_1 stupně devátého; poněvadž takový invariant neexistuje, bude

$$A_1 = 0.$$

A_2 stupně 18tého, na pólech desítičetných mizí dvakrát, takový existuje jediný AC.

A_3 stupně 27tého; takový neexistuje, tedy

$$A_3 = 0.$$

A_4 stupně 36tého, na pólech desítičetných mizí čtyřikráte a takové jsou lineárně neodvislé.

$$A\Delta, \quad (AC)^2 \quad \text{a} \quad C^3.$$

Stejnými úvahami dokážeme, že koefficienty následující jsou složeny lineárně (s číselnými koefficienty):

A_5, stupně 45, z T,

A_6, „ 54, z A^3C^3, AC^4, ΔA^2C, ΔC^2,

A_7, „ 63, $= 0$, ježto $= T$-krát invariant stupně 18., který má mizeti na pólech 10četných i osmičetných, což jest nemožno.

A_8, stupně 72, složen lineárně z

$$A^4C^4,\ A^2C^5,\ C^6,\ \Delta A^3C^2,\ \Delta AC^3,\ \Delta^2A^2,\ \Delta^2C.$$

A_9, stupně 81, $= T$-krát invariant stupně 36, složený lineárně z

$$A\Delta,\ A^2C^2,\ C^3.$$

$A_{10} = 3^5T^2$.

Pro další výpočet učiníme tutéž substituci, kterou jsme provedli při výpočtu syzygie

$$z_1 = 0,\ z_2z_3 = 5^{-\frac{1}{3}},\ (z_2^5 + z_3^5)^2 = 5^{-\frac{1}{3}}(t+1),\ z_2^5 - z_3^5 = 5^{-\frac{1}{3}}r,$$

při čemž

$$r = \sqrt{5t + \frac{21}{5}}.$$

Pak

$$A = 2,\quad C = t,\quad \Delta = 5t^3 + 45t^2 + 135t + 81,$$
$$T = -5r(t+1)^2(t^2 - 18t - 99).$$

Levá strana resolventy bude pak rozložitelna na dva činitele racionální v oboru tvořeném t a r (nepřihlížíme-li k irracionalitám číselným), z kterýchž činitelů bude první obsahovati kořeny

$$Y,\ \varrho(Y),\ \varrho^2(Y),\ \varrho^3(Y),\ \varrho^4(Y),$$

druhý kořeny

$$\varepsilon_2(Y),\ \varepsilon_2\varrho(Y),\ \varepsilon_2\varrho^2(Y),\ \varepsilon_2\varrho^3(Y),\ \varepsilon_2\varrho^4(Y),$$

a bude tedy s prvním sdružen.

Pišme první činitel ve tvaru

$$\varphi(Y) = Y^5 + a_1 Y^4 + a_2 Y^3 + a_3 Y^2 + a_4 Y + a_5.$$

Pro $z_2 = z_3$ nabývá jeden z kořenů Y hodnoty 0, kdežto ostatní čtyři dají dva páry kořenů o hodnotách protivných. Jelikož $\varphi(Y)$ jest invariantní vůči substituci ϱ, musí býti faktor mizící pro $z_2 = z_3$ v a_1, a_3, a_5 roven $z_2^5 - z_3^5 = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} r$. Pro $z_2 = -z_3$ mizejí čtyři kořeny, tedy mizí koefficient a_2, a_3, a_4, a_5, a to a_2, a_3 dvakrát, a_4, a_5 čtyřikrát, tak že obsahují jako faktor $(z_2^5 + z_3^5)^2 = t + 1$.

Lze tedy psáti

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha r, \\ a_2 &= \beta(t+1), \\ a_3 &= r(t+1)(\gamma_1 t + \gamma_2), \\ a_4 &= (t+1)^2(\delta_1 t + \delta_2), \\ a_5 &= r(t+1)^2(\varepsilon_1 t^2 + \varepsilon_2 t + \varepsilon_3). \end{aligned}$$

Z hodnot pro $z_2 = z_3$ možno pak přímo určiti

$$\begin{aligned} a_1 &= -5i\sqrt{3}r, \\ a_2 &= -45(4+\varepsilon)(t+1), \\ a_5 &= 45i\sqrt{3}\varepsilon r(t+1)^2(t^2 - 18t - 99). \end{aligned}$$

Uvažujme nyní součin obou sdružených faktorů

$$\varphi(Y)\overline{\varphi}(Y),$$

což jest levá strana resolventy.

Vypočteme-li po řadě koefficienty

$$A_3,\ A_9,\ A_5,\ A_7,\ A_4,$$

a uvážíme-li, jaký bude jejich výraz v t a r dle toho, co řečeno dříve.

$(A_3 = 0$

$A_9 = T$ lin. výraz $(A\Delta,\ A^2C^2,\ C^3) = T$ lin. výraz $(5t^3 + 45t^2 + 135t + 81,\ t^2,\ t^3)$

. . . .)

bude nám možno určiti zbývající koefficienty a_3 a a_4.

Tak nalezneme

$$a_3 = 15i\sqrt{3}\,r\,(t+1)(-2t+18+15\varepsilon),$$
$$a_4 = -135\,(t+1)^2\,((8-2\varepsilon)\,t-24-42\varepsilon).$$

Tím nalezeny pak všechny koefficienty A

$$A_1 = 0,$$
$$A_2 = 30AC,$$
$$A_3 = 0,$$
$$A_4 = 45\,(A\varDelta + 16A^2C^2 + 36C^3),$$
$$A_5 = 27T,$$
$$A_6 = 225\,(4A^2C\varDelta + 15C^2\varDelta + 89AC^4 + 24A^3C^3),$$
$$A_7 = 0,$$
$$A_8 = 270\,(2A^2\varDelta^2 + 3C\varDelta^2 - 10A^3C^2\varDelta - 110AC^3\varDelta + 120A^4C^4 + 1387A^2C^5 + 4608C^6),$$
$$A_9 = -540T\,(-A\varDelta + 9A^2C^2 + 64C^3),$$
$$A_{10} = 3^5T^2.$$

Literatura.

1. **R. Fricke**: Über eine einfache Gruppe von 360 Operationen. Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1896. Výtah: Jahresbericht d. deutsch. Math.-Vereinigung 5., 1896.

2. **F. Gerbaldi**: Sui Gruppi di sei Coniche in Involuzione. Atti della Real. Accademia delle Scienze di Torino. Vol. 17. Cl. di Sc. Fis. e Mat. 1881.

3. **F. Gerbaldi**: Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane. Math. Ann. 50. neb Verhandlungen des ersten internationalen Mathematikerkongresses in Zürich.

4. **F. Gerbaldi**: Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo XII (1898), XIII (1899) XIV (1900), XVI (1902).

5. **Paul Gordan**: Die partiellen Differentialgleichungen des Valentinerproblems (Ein Beitrag zur Auflösung der Gleichung 6*ten* Grades). Math. Ann. 61.

6. **C. Jordan**: Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique. Journal für die reine u. angewandte Mathematik 84.

7. **F. Klein**: Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung von Gleichungen vom fünften Grade.

8. **F. Klein**: Sulla risoluzione delle equazioni di sesto grado. Rendiconti dell'Accademia dei Lincei. Vol. VIII, 1° sem.

9. **F. Klein**: The Evanston Colloquium. Lectures on Mathematics Lecture IX. Překl. franc. od Ziweta.

10. **F. Klein**: Über die Auflösung der allgemeinen Gleichungen 5. u. 6. Grades. Journal für die reine u. angewandte Mathematik 129. Mathem. Annalen 61.

11. **L. K. Lachtin**: Differencialnaja rezolventa někotorago vida uravněnij 6toj stepeni. Matematičeskij sbornik 20.

12. **L. K. Lachtin**: Die Differentialresolvente einer algebraischen Gleichung 6ten Grades mit einer Gruppe 360ter Ordnung. Math. Annalen 51.

13. **H. Maschke**: Aufstellung des vollen Formensystems eines quaternären Gruppe von 51840 Substitutionen. Math. Annalen 33.

14. **H. Maschke**: Bestimmung aller ternären und quaternären Collineationsgruppen, welche mit symmetrischen und alternierenden Buchstabenvertauschungsgruppen holoedrisch isomorph sind. Mathem. Annalen 51.

15. **H. Valentiner**: De endelige Transformations-Gruppers Theorie (Avec un résumé en français.) Det kongelige danske Videnskabernes. Selskabs Skrifter VI. Raeke 5. Bind. Köbenhavn 1889.

16. **H. Weber**: Lehrbuch der Algebra. II. Aufl.

17. **A. Wiman**: Über eine einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen. Math. Annalen 47.

18. **A. Wiman**: Endliche Gruppen von linearen Substitutionen. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, I. 1.

Skládání konečných současných rotací pevného tělesa.

Podává Dr. **Ladislav Stjepanek**, prof. reálného gymnasia a soukr. docent na universitě v Záhřebě.

Skládání úhlových rychlostí a nekonečně malých rotací, jest již dávno známo. Naskýtá se však dále maně otázka, jak řešiti úlohu *skládání konečných současných rotací.* Tato úloha jest zde obecně tak dalece řešena, že jsou odvozeny differenciální rovnice pro pohyb libovolného bodu pevného tělesa, jež se má vlivem libovolných rotací pohybovati. Při applikaci těchto differenciálních rovnic na zvláštní případy objeví se ovšem též některé známé věty, o nichž zde pojednáno jen pro úplnost.

I. Rovnice pohybové.

K řešení naší úlohy, najíti *výsledek konečných současných rotací* pevného tělesa, stačí nejprve nalézti pohybové rovnice libovolného bodu $M(x_0, y_0, z_0)$ tělesa, jež kol dané osy rotuje.