Ocenění prací P. Václava Šimerky.[1])

Napsal *Václav Petržílka.*

P. Václav Šimerka [2]) zabýval se matematikou hlavně po 8 let, jakožto suplent na gymnasiu budějovickém, věnuje větší část prázdného času této své oblíbené vědě, jak sám praví, ale pokračoval ve svém badání, i když se stal farářem ve Slatině u Žamberka a později v Jenšovicích u Vysokého Mýta. Za předmět svých úvah volil si skoro vždy problémy z oboru číselné teorie a ukládal je v pojednáních, jež možno rozděliti ve dvě skupiny. Jsou to jednak menší práce Šimerkovy, řešící jednoduché úkoly číselné teorie, jednak čtyři delší pojednání, z nichž tři obsahují výhradně úvahy z oboru kvadratických forem číselných.

Z prací první skupiny sluší nejprve uvésti německou práci »Lösung zweier Arten von Gleichungen«, vydanou v »Sitzungsberichte der mathem.-naturwissenschaftlichen Klasse der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Wien«, sv. 33, r. 1858 a v témž jazyku psanou práci »Die rationalen Dreiecke«, publikovanou v Grunertově: »Archiv der Mathematik und Physik«, sv. 51, r. 1870. Ostatní práce této skupiny psal v mateřském jazyku a uveřejňoval je již v době svého působení na faře v Jenšovicích u Vysokého Mýta v »Časopise pro pěstování matematiky a fysiky«, vydávaném Jednotou českých matematiků a fysiků. Následují seřazeny v chronologické posloupnosti takto: »Součty celých v lomené arithmetické posloupnosti« (roč. V.); »Řetězové pravidlo u shod« (roč. VI.); »Jednočlenná perioda zbytků z mocnin bez předchozích členů, t. j. řešení shody $C^2 \equiv C$ (mod. M)« (roč. XIII.); Jednočlenná perioda zbytků z mocnin s předcházejícími členy« (roč. XIII.) a »Zbytky z arithmetické posloupnosti« (roč. XIV.).

K těmto kratším pracím připojují se čtyři obsáhlejší. Jsou to: *»Beiträge zur Theorie der Zahlen«*, nejdelší práce Šimerkova vůbec (260 str.), která však zůstala v rukopise, *»Die Perioden der kvadratischen Zahlformen bei negativer Determinante«*, první tištěná práce Šimerkova, kterou uveřejnil v Sitzungsberichte vídeňské Akademie, sv. 31, r. 1858, *»Die trinären Zahlformen und Zahlwerte«*, pojednání uveřejněné rovněž vídeňskou Akademií v Sitzungsberichte, sv. 38,

---

[1]) Výtah z práce »Rozbor a ocenění prací P. Václava Šimerky z oboru číselné teorie«, poctěné cenou Vaňausovou.

[2]) Životopisná data jsou obsažena v článcích Aug. Pánka, uveřejněných v tomto Časopise: »Život a působení P. Václava Šimerky« (roč. XVII., str. 253) a »Svěcení pomníku P. Václava Šimerky v Praskačce« (roč. XIX., str. 273).

r. 1859, které vyšlo ještě zvláště jakožto samostatná kniha, a konečně práce čtvrtá, vydaná r. 1862 Král. českou společností nauk pod názvem »*Příspěvky k neurčité analytice*«. Část V., sv. XII.

Hlavní výsledky badání Šimerkova v číselné teorii, zvláště v oboru kvadratických forem číselných, jsou obsaženy právě ve třech posledních pracích této skupiny. Pokud se týče prací první skupiny, netřeba se o nich podrobně zmiňovati, jelikož se zabývají nesložitými problémy číselné teorie, a jsou v nich obsaženy vybrané části z první rukopisné práce Šimerkovy, »Beiträge zur Theorie der Zahlen«, která byla sice určena k tisku, jak o tom předmluva svědčí, a byla dokončena r. 1850, tedy ještě za kaplanování Šimerkova ve Žlunicích u Jičína. Po krátkém úvodě, v němž osvětluje Šimerka pojem binomických koeficientů a řad, přechází k vlastnímu tematu, totiž k teorii zbytku. Pojednává obšírně o periodách mocninných zbytků, které rozděluje ve tři hlavní skupiny: jednočlenné periody, dvoučlenné periody a vícečlenné periody mocninných zbytků, k nimž připojuje periody zlomků desetinných. Na základě získaných výsledků řeší některé neurčité rovnice a v poslední kapitole udává metody pro rozklad čísel ve faktory. K řešení tohoto úkolu, který Šimerku vůbec nejvíce zajímal, směřují i úvahy předcházejících kapitol této práce, jejichž látku se Šimerka snažil zpracovati systematicky. Jsou v nich proto shromážděny poznatky dosud známé, které Šimerka rozšířil a po mnohé stránce doplnil, neboť tato kniha měla započíti řadu prací, věnovaných studiu kvadratických forem číselných a jejich period.

Z nich první byla práce »Die Perioden der kvadratischen Zahlformen bei negativer Determinante«, která obsahuje důkaz existence formulových period kvadratických forem číselných negativního determinantu,[3]) který Šimerka provádí na základě komposice forem a určitelnosti forem, kterou sám nově zavádí a definuje. Prvním důležitým výsledkem tohoto pojednání jest zjednodušení a upravení Legendreovy metody pro součin dvou forem do té míry, že dospěl při násobení (komposici) dvou kvadratických forem číselných k jednoznačnosti výsledku tím, že zavedl v počet veličinu i rovnou $+1$ neb -1. Její hodnotu určuje pak Šimerka postupem počtu z daných podmínek. Legendreova metoda (T. d. N. § 353)[4]) vykazuje, ježto Legendre byl při svém postupu nucen uvažovati v základních rovnicích znaménko kladné i záporné při středním koeficientu jedné z obou daných forem, dvojznačnost výsledku, která však jest jen zdánlivá, neboť

---

[3]) Tyto periody jsou v úzkém vztahu s Gaussovými periodami tříd hlavního rodu (jak se o tom v dalším podrobněji zmíním) a souhlasné s periodami původních tříd prvého druhu, jak je zavedl později do číselné teorie Dirichlet (»Vorlesungen über Zahlentheorie«, § 146).

[4]) Legendreovo dílo »Essai sur la théorie des nombres« (II. vyd.) označuji prostě T. d. N. a Gaussovo dílo »Disquisitiones arithmeticae« písmenami D. A.

Legendre v daných formách nebere zřetel ke znaménku středního členu. Na př. uvádí Legendre, že při součinu forem $p = 14x^2 + 10xy + 21y^2$ a $p' = 9x'^2 + 2x'y' + 30y'^2$ obdržíme tyto dva výsledky: $f_1 = 126X^2 + 38XY + 5Y^2$ a $f_2 = 126X^2 + 74XY + 13Y^2$, při čemž však prvý náleží součinu forem $p = 14x^2 + 10xy + 21y^2$ a $p' = 9x'^2 + 2x'y' + 30y'^2$, druhý součinu forem $p_1 = 14x^2 - 10xy + 21y^2$, $p' = 9x'^2 + 2x'y' + 30y'^2$. Zároveň však uvádí příklad, kdy oba výsledky se sobě rovnají. Formu $p = x^2 + xy + 41y^2$ násobí formou $p' = x'^2 + x'y' + 41y'^2$ a dostává výsledek jediný $X^2 + XY + 41Y^2$, který nás nikterak nepřekvapuje. Neboť, jak Šimerka ukazuje, netřeba při formách tohoto typu, které Šimerka nazývá koncovými[5]) (ježto vždy uzavírají formulovou periodu) a při formách středních[6]) (které tvoří střed sudé periody) hleděti ke znaménku středního členu a mimo to platí věta: Kvadrát koncové formy dává za výsledek formu koncovou. (Důkaz této věty následuje v dalším.)

Právě jednoznačnost výsledku při násobení dvou forem to byla, která umožnila Šimerkovi pomocí násobení forem dokázati existenci formulových period.

Při numerickém výpočtu period přejímá nejdůležitější úkol zase určitelnost forem (Bestimmbarkeit der Formen), spočívající v representaci formy racionálním číslem, které nazývá Šimerka určující veličinou U. Definici určitelnosti forem zakládá Šimerka na větě: Každé prvočíslo jest obsaženo v jediné kvadratické formě (a, b, c) daného determinantu D, ať je kladný nebo záporný. (Legendre T. d. N. § *232*, § *242*). Převede vhodnou substitucí formu, v níž jest číslo P (kterého chceme užíti k určování formy) obsaženo pro určité hodnoty x a y, ve formu jí ekvivalentní, v níž jest P prvním koeficientem, a rozděluje pak definici určitelnosti forem na tři případy:

Je-li P prvočíslem p, klademe formu rovnou p, po případě jeho převrácené hodnotě $\frac{1}{p}$, podle toho, je-li zbytek středního koeficientu b (v absolutní hodnotě nejmenší) podle modulu $2p$ kladný či záporný.[7])

Je-li P mocninou prvočísla p^m, klademe danou formu rovnou p^m, po případě jeho převrácené hodnotě $\frac{1}{p^m}$, podle toho, je-li zbytek

---

[5]) Tyto formy nazývají se však obyčejně hlavními formami (forma principalis, Hauptform, Gauss D. A. § 231, 250).

[6]) Formy tohoto druhu slují dvoustranné (forma anceps, ambige Form, Gauss D. A. § 163; zweiseitige Form, Dirichlet, Zahlentheorie § 58; diviseurs quadratiques bifides Legendre T. d. N., § 241).

[7]) Šimerka definuje tento první případ poněkud jinak: klade formu rovnou prvočíslu p tehdy, je-li střední koeficient dané formy kladný, jeho převrácené hodnotě, je-li záporný. Poněvadž však z třetího případu jest okamžitě patrno, že Šimerka měl na mysli definici tohoto případu v tom znění, jak jsem ji uvedl, učinil jsem tak, zvláště také z toho důvodu, že v důsledku toho všechny tři případy jsou souhlasné.

středního koeficientu b (v absol. hodn. nejmenší) podle modulu $2p$ kladný či záporný.

Je-li P číslem složeným z n nesoudělných faktorů $a_1, a_2, \ldots, a_n$ které jsou prvočísly nebo mocninami prvočísel, pak definuje Šimerka určující veličinu jakožto zlomek, kde jednotlivé faktory $a_1, a_2, \ldots a_n$ klademe do čitatele neb jmenovatele podle toho, je-li zbytek b (co do abs. hodn. nejmenší) podle modulů: $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_n$ po řadě kladný či záporný.

Na př.: formy (15, 13, 37), (15, 16, 37), (15, 11, 37), (15, 19, 37), mají po řadě určující veličiny $3 \cdot 5, \frac{1}{3 \cdot 5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{5}$, ježto platí kongruence $13 \equiv 3$ (mod. 10), $13 \equiv 1$ (mod. 6), $16 \equiv -4$ (mod. 10), $16 \equiv -2$ (mod. 6), $11 \equiv 1$ (mod. 10), $11 \equiv -1$ (mod. 6), $19 \equiv -1$ (mod. 10), $19 \equiv +1$ (mod. 6). Určitelnosti forem užívá pak Šimerka s výhodou k numerickému výpočtu period zvláště při velikých determinantech. Zavedení tohoto nového pojmu do číselné teorie jest největší zásluhou, kterou si Šimerka v tomto oboru získal, neboť pozoruhodný tento výkon Šimerkův, kdyby byl více propracován, mohl by se snad státi užitečnou pomůckou pro počítání kvadratickými formami vůbec.

Tak dají se na př. užitím určitelnosti forem způsobem jednodušším dokázati věty, k nimž Šimerka ve svých úvahách dospěl, známé již z kapitoly o komposici tříd Gaussova díla D. A. § 249, kde jest užito k důkazu zavedeného pojmu tříd, který se v úvahách Šimerkových nevyskytuje.

K v a d r á t s t ř e d n í n e b k o n c o v é f o r m y j e s t v ž d y f o r m a k o n c o v á. Užijeme-li pro střední a koncové formy obecného výrazu $ax^2 + abxy + cy^2$, pak vzhledem k tomu, že při formách tohoto druhu není třeba bráti zřetel ke znaménku středního členu, možno užíti jakožto určující veličiny právě tak čísla U, jako jeho reciproké hodnoty $\frac{1}{U}$. Jest tedy určující veličinou kvadrátu formy $ax^2 + abxy + cy^2$ jednotka, která charakterisuje formu koncovou. Platí však také obrácená věta:

O d m o c n i n a z f o r m y k o n c o v é j e s t b u ď z a s e f o r m a k o n c o v á a n e b o f o r m a s t ř e d n í. První část této věty jest ihned patrna, druhou dokážeme, klademe-li určující veličinu koncové formy rovnou součinu $U \frac{1}{U}$. Ježto zde neběží o formy protivné, jest oběma faktory určena táž střední forma (neboť při formách středních není třeba hleděti ke znaménku středního členu). Stejným způsobem možno dokázati větu:

S o u č i n f o r m y d a n é a f o r m y k o n c o v é d á v á z a v ý s l e d e k f o r m u d a n o u. Je-li U určující veličinou formy dané a uvážíme-li, že formu koncovou určuje jednotka, jest určující veličinou formy vzniklé součinem obou daných zase U. Tyto výsledky se přenášejí beze změny na třídy forem, předpokládáme-li, že třídy jsou representovány uvažovanými formami, a proto možno dokázati tímto způsobem také větu, kterou připojuje Gauss a která zní:

Jsou-li K, K' a L, L' třídy protivné, pak budou také třídy T, vzniklá komposicí K a L, a T', vzniklá komposicí K' a L', protivné. Neboť, jsou-li určujícími veličinami forem, representujících třídy K a L, po řadě U a U', jsou určujícími veličinami tříd K' a L' výrazy $\frac{1}{U}$ a $\frac{1}{U'}$. Budou tedy určujícími veličinami tříd T a T' po řadě součiny UU' a $\frac{1}{UU'}$, a tím jest tvrzení dokázáno. Chtěl jsem tím jen poukázati na užitečnost použití určitelnosti forem nejen k numerickému výpočtu period, ale i k řešení jiných úkolů.

V otázce konstrukce period opíral se Šimerka hlavně o výsledky Legendreovy a neznal asi zevrubně komposice forem, tříd, řádů a rodů tak, jak ji zavedl do číselné teorie Gauss, jehož základní dílo ve své knihovně jistě měl, jak o tom svědčí četné citáty. (Jeho matematická knihovna, jak sám si stěžuje, obsahovala pouze třináct svazků.) Tuto domněnku by podporovala také věta v úvodu k pojednání »Die trinären Zahlformen und Zahlwerte«, kde Šimerka mluví o tom, že objevil periodičnost kvadratických forem číselných. (»Der Gegenstand dieser Abhandlung hat, als eine interessante Partie der Zahlentheorie, bald die Aufmerksamkeit der Mathematiker, wie Fermat, Gauss und Legendre erregt. Auch ich befasse mich schon eine geraume Zeit mit demselben, und fand ich, nach dem in die Periodicität der quadratischen Zahlformen entdeckt hatte, zwischen beiden Theorien einen wichtigen Zusammenhang etc.«. Avšak právě v tomto směru jest Gauss jeho předchůdcem, neboť obdobné periody jako u Šimerky vyskytují se již v díle D. A. § 305, s tím rozdílem pouze, že Gauss užívá k důkazu jejich existence zavedeného pojmu rodu, který i pro konstrukci period o seskupení tříd kvadratických forem číselných jest vhodnou pomůckou. Věta Gaussova zní: Označíme-li K hlavní třídu forem daného determinantu D, C jinou třídu hlavního rodu forem téhož determinantu, a jsou-li konečně $2C, 3C, 4C, \ldots .$, třídy vzniklé duplikací atd. třídy C (§ 249), pak, pokračujeme-li v řadě $C, 2C, 3C, \ldots$ dosti daleko, dospějeme k třídě identické s K, a předpokládáme-li, že mC jest první třída s K identická, a že počet všech tříd obsažených v hlavním rodu je roven n, pak buď $m = n$, nebo m jest dělitelem n. Jak jest vidno z této věty, podává Gauss pouze rozklad tříd hlavního rodu v periody a jsou tudíž Šimerkovy periody obecně dvakráte delší než Gaussovy. Neboť volí-li Šimerka za základní formu $f_1 = p$, která nepatří k hlavnímu rodu, patří teprve její kvadrát $f_1 . f_1 = f^2_1 = f_2$ hlavnímu rodu, ježto v součinu obě formy náleží témuž rodu a determinantu. Forma $f_2 . f_1 = f^3_1 = f_3$ přináleží zase k témuž rodu jako f_1, ježto f_2 jest formou hlavního rodu, forma f_1 nikoliv. (D. A., § 247.)

Vypíšeme-li tedy obě periody, je Šimerkova perioda řadou členů:

$$f_1,\ f_2 = f^2_1,\ f_3 = f^3_1,\ f_4 = f^4_1,\ f_5 = f^5_1, \ldots .\ f_{m-1} = f_1^{m-1}, f_m = f_1^m = 1,$$

Gaussova perioda má obecně tvar:

$$f_2,\ f_4,\ f_6, \ldots ,\ f_m = 1.$$

Skládá se tedy Šimerkova perioda z Gaussovy a ještě z forem tvaru f_1, $f_1 . f_2$, $f_1 . f_4, \ldots$, $f_1 . f_{2k}$. Na př. při záporném determinantu $D = 161$ existuje osmičlenná perioda (3, 2, 54), (9, 2, 18), (6, —2, 27), (2, 2, 81), (6, 2, 27), (9, —2, 18), (3, —2, 54), (1, 0, 161), ve které formy (9, 2, 18), (2, 2, 81), (9, —2, 18), (1, 0, 161) jsou formami hlavního rodu a tvoří periodu Gaussovu.

Šimerka ukázal dále, stejně jako Gauss, že existují determinanty, k nimž přísluší více než jediná perioda, a souhrn jejich nazývá systémem period. Gauss nazývá pak determinanty, jejichž celý hlavní rod jest obsažen v jediné periodě, regulárními, determinanty o více periodách irregulárními. Obecného pravidla, podle kterého by bylo možno rozhodnouti předem, do které z obou skupin jest zařaditi určitý determinant, neuvádí však ani Gauss ani Šimerka. Ježto Šimerka neužívá pojmů tříd, řádů a rodů tak, jak je zavedl Gauss, nenabývá takové přehlednosti získaných výsledků jako Gauss při rozkladu tříd v rody a hlavního rodu v periody.

Jakožto důležitou aplikaci těchto úvah uvádí Šimerka použití středních forem k rozkladu v součin dvou faktorů daného čísla, které položí rovno determinantu.

Všechny tyto úvahy možno rozšířiti na formy kladného determinantu, což Šimerka připomíná již na konci tohoto pojednání. Mimo to však mají positivní determinanty některé své zvláštní vlastnosti a o těch pojednává Šimerka v třetí kapitole pojednání »P ř í s p ě v k y k n e u r č i t é a n a l y t i c e«, které je věnováno výhradně ř e t ě z o v ý m p e r i o d á m k l a d n ý c h d e t e r m i n a n t ů, které jsou rovněž známy již z Gaussova díla D. A. § 186 pod názvem periody kladných determinantů. Šimerka dospěl k periodám kladného determinantu, právě tak, jako k formulovým periodám, jinou cestou než Gauss. Provádí zde důkaz existence period užitím postupné transformace formy ve formu a ukazuje, jak možno vhodně užíti při vyhledávání koeficientů substituce řetězových zlomků. Toto pravidlo dochází důležitého upotřebení při řešení rovnice $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ a rovnice $x^2 - Dy^2 = \pm p$. Kdežto v metodě, kterou uvádí k řešení druhé rovnice Legendre ve svém díle (T. d. N. § 33 a násl.), jest vytčen požadavek $p < \sqrt{D}$, jest možno řešiti Šimerkovou metodou i rovnice, kde $p > \sqrt{D}$, ale zároveň $p < \sqrt{D} + l^{(k)} 2\sqrt{D}$, kde $l^{(k)}$ jest střední člen formy $(K^{(k)}, 2l^{(k)}, K^{(k-1)})$, příslušné řetězovému členu, jehož jmenovatelem jest právě p. Tak jest na př.: řešitelna rovnice $x^2 - 58y^2 = -9$ hodnotami $x = 7$, $y = 1$ a rovnice $x^2 - 58y^2 = +9$ hodnotami $x = 61$, $y = 8$, ačkoliv jest $9 > \sqrt{58}$.

Šimerka ukazuje také dále, jak možno vhodným způsobem použíti právě řetězcové periody ke konstrukci formulové periody daného determinantu (ovšem jen positivního).

Vlastní úvahy Šimerkovy obsahuje teprve část šestá tohoto pojednání, kde zavádí Šimerka nový pojem, tak zv. l o k a c i, které užívá jako označení vzdálenosti jednotlivých členů v řetězcové periodě, a definuje ji takto: Je-li obsaženo určité číslo m v dané formě (a, b, c) hodnotami $x = \varphi$, $y = \psi$, pak, jak známo z řešení této rovnice, možno φ a ψ učiniti dostatečně velikými (ovšem ve všech členech periody stejným způsobem) a Šimerka pak klade lokaci rovnou $\log \psi$. Vyšetřuje vlastnosti této veličiny a užívá jí k tomu, aby nalezl v periodě koncové formy $(1, 2k, -, r)$, je-li liché délky, pokud možno rychle formu tvaru $(K, 2l, -K)$. Neboť forma tato podává rozklad determinantu $D = l^2 + K^2$ v součet dvou čtverců. Na tuto okolnost poukázal již také Stern ve své práci »Řetězové zlomky«, uveřejněné v Crellově Journale sv. 10 a 11 (z r. 1834), avšak použití řetězových zlomků při transformaci forem neuvádí.

Toto pojednání, »Příspěvky k neurčité analytice«, uzavírá pak návod, jak možno daný determinant D rozložiti v součin dvou faktorů. Stačí k tomu obyčejně udati řetězcovou periodu koncové formy $(1, 2k, -r)$, konstruovati pomocí získaných výsledků periodu formulovou, po případě systém period, odkud pak jest ihned patrno (podle pravidla uvedeného v předchozím pojednání), je-li možno provésti rozklad daného determinantu v součin dvou faktorů. Ježto při rozpočtu řetězcové periody vyplývá jedna forma z druhé snadnějším způsobem, než když užíváme ke konstrukci formulové periody komposice forem, poskytuje tato metoda v mnohých případech značné výhody.

Kapitolou o rozkladu dvou čísel v součin dvou faktorů zakončuje Šimerka i čtvrtou práci této skupiny »D i e t r i n ä r e n Z a h l f o r m e n u n d Z a h l w e r t e,[8]) která jest ve svých prvých dvou částech rozšířením, prohloubením a zdokonalením třetí části Legendreova díla »Théorie des Nombres«, pojednávající o trinárních formách, t. j. o formách tvaru

$$(mx + ny)^2 + (m'x + n'y)^2 + (m''x + n''y)^2 = px^2 + 2qxy + ry^2.$$

Třetí část Šimerkova pojednání zavádí pak do číselné teorie nový pojem, tak zv. p ř e c h o d m e z i t r o j i c e m i t r i n á r n í c h h o d n o t (Überschreitung der trinären Arten), t. j. mezi trojicemi čísel α, α', α'', které souvisí s koeficienty dané formy vztahy

$$\alpha = m'n'' - m''n', \; \alpha' = mn'' - m''n, \; \alpha'' = mn' - m'n,$$

---

[8]) Názvy, které se vyskytují v tomto pojednání, jsou všeobecně užívány, ovšem až na pojmy nově definované.

a která splňují podmínku

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = D = pr - q^2.$$

Mezi nejdůležitější výsledky, které přináší toto třetí pojednání, sluší uvésti především zdokonalení Legendreovy metody pro výpočet trinárních koeficientů m, m', m'', n, n', n'' z daných trinárních hodnot a, a', a''. Mimo to uvádí Šimerka ještě několik jiných metod pro řešení tohoto úkolu a ukazuje, že vlastně všechny jsou obsaženy v jediné, obecné. Základem, zvláště pokud se týká první metody, byla věta, kterou Šimerka jasně a přesně dokázal, že totiž ke každé trojici trinárních hodnot existuje jediná trinární forma; existuje-li jich více, jsou vlastně ekvivalentní.

Druhá část tohoto pojednání přináší rozšíření pojmu reciprocity dvou kvadratických forem (Legendre T. d. N. § 283) v tom směru, že Šimerka přenesl pojem reciprocity dvou kvadratických forem samých na čísla, v nich obsažená pro určité hodnoty x a y. Vztah reciprocity dvou kvadratických forem vtělil pak Šimerka ve fundamentální rovnici $\alpha A + \alpha' A' + \alpha'' A'' = 0$, jsou-li $< \alpha, \alpha', \alpha'' >$ a $< A, A', A'' >$ trinární trojice příslušné trinárním formám. Právě při užití zákona reciprocity k rozvedení dané kvadratické formy v její trinární tvar vysvitne význam rozšíření pojmu reciprocity kvadratických forem číselných. Neboť Šimerka provedl rozklad daného determinantu D v součet čtverců jeho trinárních hodnot na základě zákona reciprocity pomocí menšího čísla p, k danému D reciprokého, které snadněji rozložíme v součet tří čtverců. Ježto Šimerka chtěl, aby toto pojednání bylo pokud možno úplné, uvádí také důkaz věty: každá kvadratická forma obsahuje nekonečně mnoho prvočísel a podotýká, že stejným způsobem možno rozšířiti platnost tohoto tvrzení i pro formy lineární. Provedení tohoto důkazu není však úplné a jeho význam klesá také tím, že důkaz této věty podal klasickým způsobem P. G. Lejeune Dirichlet (Untersuchungen über die Theorie der komplexen Zahlen. Abhandl. Berl. Ak., r. 1841; Monatsbericht Berl. Ak. r. 1840; Comptes Rendus roku 1849, sv. 10, p. 285). V třetí části podává Šimerka způsob, jak možno z jedné trojice trinárních hodnot odvoditi všechny ostatní pomocí veličiny p, kterou nazývá přechodníkem (Schreiter), celou metodu pak přechodem (Ueberschreitung). Přechod umožňuje především úplné řešení rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = D$ čísly celými (čili nalezení všech trojic trinárních hodnot daného determinantu), jest ve zvláštním vztahu k formulovým periodám a dochází dokonce použití při rozkladu determinantu v součin dvou faktorů.

Ostatně obsahují všechny tyto čtyři práce ke konci metody pro rozklad daného čísla v součin dvou faktorů. Již v prvé z nich jest uvedeno ke konci několik metod pro rozklad čísel ve faktory. Druhé pojednání obsahuje tento návod v kapitole nadepsané: Bemerkungen über die Determinanten in Hinsicht ihrer Teilbarkeit. V pojednání »Příspěvky k neurčité analytice« užívá Šimerka řetězcové periody koncové formy k rozkladu determinantu v součin dvou faktorů. O obou metodách však Šimerka sám dokládá, že nevyhovují požadavku, aby byla rozkládána rychle a s jistotou velká čísla v součin dvou faktorů. Podmínky tyto splňovalo by pravidlo třetí, kdybychom znali snadný způsob, jak rozváděti kvadratické formy ve tvar trinární. Tomuto požadavku vyhovuje dosti dobře metoda uvedená v témž pojednání, o které jsem se již zmínil, která však vyžaduje řešení rovnice $ax^2 + 2bxy + cy^2 = D$, někdy dosti obtížné. Jak uvádí sám Šimerka v »Příspěvcích k neurčité analytice« (§ 70), bylo vlastním účelem badání, které ve svých pojednáních uložil, nalezení obecného pravidla dělitelnosti, jehož by se snadno dalo užíti. Doznává však také sám, že cíle, k němuž směřovaly všechny jeho úvahy, nedosáhl tak, jak by si byl přál, těší se však vědomím, že výsledky jeho badání v tomto směru budou jistě aspoň příspěvkem k úplnému řešení tohoto problému, je-li vůbec možné.

*

L'appréciation des travaux de P. V. Šimerka.

(Extrait de l'article précédent.)

Les principaux résultats des recherches du prêtre-mathématicien V. Šimerka sont contenus dans les travaux suivants: »Die Perioden der quadratischen Zahlformen bei negativer Determinante« (Sitzungsber. d. Wiener Akad., t. 31., 1858), »Příspěvky k neurčité analytice« (Contribution à l'analyse indéterminée; comptes rendus de la Société royale des sciences de Bohême, t. XII, 1862), »Die trinären Zahlformen und Zahlwerte« (Sitzungsberichte d. Wiener Akademie, t. 38, 1859). Ces travaux concernent la théorie des nombres, surtout les représentations des nombres par les formes quadratiques. Le premier traité apporte la définition d'une notion nouvelle, celle de la déterminabilité des formules; l'auteur en fait usage pour l'énumération des périodes des formes quadratiques. Le deuxième traité est consacré à l'étude des formes de déterminant positif et dont les formes réduites des différentes classes sont rangées en des périodes, conduisant aux expressions bien connues par les fractions continues. A l'aide de ces périodes l'auteur construit la période des formes qui donne un critère de la divisibilité d'un déterminant donné. Šimerka s'occupe de la résolution de ce problème encore dans le troisième traité cité ci-dessus.

Le but essentiel des trois travaux de Šimerka était celui de résoudre d'une manière générale la question de la divisibilité d'un déterminant. L'auteur n' a pas atteint ce but complètement, mais il a fait un progrès considérable dans la voie menant à ce but.