Miloš Neubauer

O spojitých funkcích, nabývajících každé své hodnoty k-krát nebo l-krát

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 62 (1933), No. 2, 8--11

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121947

O spojitých funkcích, nabývajících každé své hodnoty k-krát nebo l-krát.

Miloš Neubauer.

(Došlo dne 5. května 1932.)

1. Pro daná dvě přirozená čísla k a l, $k < l$, nazvu (k, l)-*funkcí* každou funkci[1]) definovanou a spojitou v uzavřeném intervalu, která každé své hodnoty nabývá buď k-krát[2]) nebo l-krát, aspoň jedné k-krát a aspoň jedné l-krát. Obsahem tohoto článku je důkaz této věty:

K tomu, aby existovala (k, l)-funkce, je nutno a stačí, aby bylo

$$l \geqq 2k - 1. \tag{1}$$

2. K důkazu nutnosti podmínky (1) stačí zřejmě dokázat toto:

Věta 1. *Buď $f(x)$ funkce definovaná a spojitá v intervalu $I = [a, b,]$[3]), která každé své hodnoty nabývá konečněkrát. Buď M resp. m její maximum resp. minimum. Nechť při daném y, $m \leqq y \leqq M$, značí $p(y)$ počet všech řešení v x rovnice $y = f(x)$. Buďte k, l přirozená čísla a buď*

$$k \leqq p(y) \leqq l \text{ pro } m \leqq y \leqq M. \tag{2}$$

Pak platí (1).

Zřejmě jest

$$m < M. \tag{3}$$

Dokáži napřed toto:

Pomocná věta. *Nabývá-li f maxima aspoň h-krát, $h > 1$, a z toho mezi a, b aspoň $(h - 1)$-krát, pak s vhodným y jest $p(y) \geqq 2h - 1$.*

Důkaz. Značí-li $\underset{(x,y)}{E}(V)$ množství všech bodů (x, y) (kartézské roviny), majících vlastnost V, označím při $\varepsilon > 0$ znakem $U_\varepsilon(x_0)$

[1]) Jednám o funkcích reálních jedné reální proměnné.
[2]) T. j. přesně k-krát; jinak budu říkat „aspoň k-krát".
[3]) T. j. množství všech x, pro něž $a \leqq x \leqq b$.

množství všech bodů (x, y), které jsou jak v $\underset{(x,y)}{E}(x \text{ v } I,\, y = \mathrm{f}(x))$ tak v $\underset{(x,y)}{E}(x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon)$.

Nechť *za prvé* f nabývá maxima pro $x = \xi$. Protože f je spojitá a nabývá každé své hodnoty konečněkrát, snadno se vidí, že ke každému $\varepsilon > 0$ lze nalézt takové $y_0 = y(\xi, \varepsilon) < M$, že při $y_0 < \eta < M$ přímka $y = \eta$ protíná $U_\varepsilon(\xi)$ aspoň jednou nebo aspoň dvakrát podle toho, je-li ξ koncovým bodem intervalu I nebo ne.

Nechť *za druhé* f nabývá maxima pro $x = \xi_1, \ldots, \xi_h$; $\xi_1 < \ldots < \xi_h$. Zvolím $\varepsilon > 0$ tak, aby množství $U_\varepsilon(\xi_1), \ldots, U_\varepsilon(\xi_h)$ byla mezi sebou bez společných bodů, a dále $\eta < M$ tak, že $\eta > y(\xi_1, \varepsilon), \ldots, y(\xi_h, \varepsilon)$. Pak zřejmě přímka $y = \eta$ protíná $\underset{(x,y)}{E}(x \text{ v } I,\, y = \mathrm{f}(x))$ aspoň $(2h - 1)$-krát, když aspoň $h - 1$ z čísel $\xi_1, \ldots, \xi_h$ je mezi a, b.

Nyní dokáži větu 1. Zřejmě mohu předpokládat $k > 1$. Podle (2) je jak $p(m) \geqq k$ tak $p(M) \geqq k$. Nabývá-li f jednoho extrému jak pro $x = a$, tak pro $x = b$, nabývá podle (3) druhého aspoň k-krát mezi a, b. Zřejmě mohu tedy předpokládat, že f nabývá maxima aspoň $(k - 1)$-krát mezi a, b. Podle pomocné věty je $p(y) \geqq 2k - 1$ s vhodným y a tedy podle (2) platí (1).

Poznámky. I. Z věty 1 plyne, že pro žádné přirozené číslo $h > 1$ neexistuje funkce definovaná a spojitá v *uzavřeném*[4]) intervalu, která *každé* své hodnoty nabývá h-krát, neboť $h \geqq 2h - 1$ praví totéž co $1 \geqq h$.

II. Z pomocné věty plyne, že (k, l)-funkce nemůže nabývat jak maxima tak minima l-krát. Podobně se dokáže, že (k, l)-funkce s $l > 2$ nemůže žádného z extrémů nabývat l-krát, t. j. nabývá každého z nich k-krát.

3. Postačitelnost podmínky (1) dokáži, když ke každým dvěma přirozeným číslům k a l, $k < l$, $l \geqq 2k - 1$, sestrojím (k, l)-funkci. Především $(1, 2)$-funkce je dána na př. lomenou čarou spojující body $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$. Mohu tedy předpokládat $l > 2$.

Zavedu si pět typů jednoduchých funkcí, v jichž definicích značí a, b, m, M daná čísla, $a < b$; $m < M$, a h dané kladné číslo liché.

$$x_n = a + \frac{n}{3}(b - a) \quad (n = 0, 1, 2, 3);$$

$$\mathrm{f}(a, b; m, M; x) \begin{cases} = M \text{ pro } x = x_0,\ x = x_2; \\ = m \text{ pro } x = x_1,\ x = x_3; \\ \text{lineární v } [x_n, x_{n+1}]\ (n < 3). \end{cases} \tag{4}$$

[4]) Předpoklad *uzavřenosti* intervalu je podstatný. Příklad: $\mathrm{f}(x) = \chi_3(x)$ pro $0 < x < 1$ (viz definici (8)).

$$x_n = a + \frac{n}{h}(b - a) \quad (n = 0, 1, \ldots, h);$$

$$\mathrm{f}_h(a, b; m, M; x) \begin{cases} = m \text{ pro } x = x_n,\ n \text{ sudé}; \\ = M \text{ pro } x = x_n,\ n \text{ liché}; \\ \text{lineární v } [x_n, x_{n+1}]\ (n < h). \end{cases} \tag{5}$$

$$x_n = b - \frac{1}{n}(b - a),\ y_n = m + \frac{1}{n}(M - m) \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

$$\varphi(a, b; m, M; x) = \begin{cases} \mathrm{f}(x_n, x_{n+1}; y_{n+1}, y_n; x) \text{ v } [x_n, x_{n+1}], \\ m \text{ pro } x = b. \end{cases} \tag{6}$$

$$x_n = a + \frac{1}{n}(b - a),\ y_n = M - \frac{1}{n}(M - m) \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

$$\psi(a, b; m, M; x) = \begin{cases} \mathrm{f}(x_{n+1}, x_n; y_n, y_{n+1}; x) \text{ v } [x_{n+1}, x_n], \\ M \text{ pro } x = a. \end{cases} \tag{7}$$

$$z'_n = \frac{1}{n},\ z''_n = 1 - \frac{1}{n} \quad (n = 2, 3, \ldots);$$

$$\chi_h(x) = \begin{cases} \mathrm{f}_h(z'_{n+1}, z'_n; z'_{n+1}, z'_n; x) \text{ v } [z'_{n+1}, z'_n]; \\ \mathrm{f}_h(z''_n, z''_{n+1}; z''_n, z''_{n+1}; x) \text{ v } [z''_n, z''_{n+1}]; \\ 0 \text{ pro } x = 0;\ 1 \text{ pro } x = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Nyní sestrojím pomocí funkcí (4) — (8) ve všech případech (s $l > 2$) (k, l)-funkci $\mathrm{f}(x)$:

$$k = 1,\ l \text{ liché: } \mathrm{f}(x) = \chi_l(x). \tag{9}$$

$$k > 1,\ l \text{ liché: } \mathrm{f}(x) = \begin{cases} \chi_{l-(2k-2)}(x) \text{ v } [0, 1], \\ \mathrm{f}_{2k-1}(0, 2k - 1; 0, 1; x) \text{ v } [1, 2k - 1]. \end{cases} \tag{10}$$

$$k = 1,\ l \text{ sudé: } \mathrm{f}(x) = \begin{cases} \psi(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}; \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}; x) \text{ v } [-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}], \\ \varphi(-\tfrac{1}{4}, \quad 0; 0, \tfrac{1}{4}; x) \text{ v } [-\tfrac{1}{4}, \quad 0], \\ \chi_{l-3}(x) \text{ v } [0, 1], \\ \psi(1, \tfrac{3}{2}; \tfrac{1}{2}, 1; x) \text{ v } [1, \tfrac{3}{2}]. \end{cases} \tag{11}$$

$$k > 1,\ l \text{ sudé: } \mathrm{f}(x) = \begin{cases} \chi_{l-(2k-1)}(x) \text{ v } [0, 1], \\ \varphi(1, 2; 0, 1; x) \text{ v } [1, 2], \\ f_{2k-3}(2, 2k - 1; 0, 1; x) \text{ v } [2, 2k - 2] \text{ pro } k > 2. \end{cases} \tag{12}$$

Pomíjím důkaz, že funkce (9) — (12) jsou (k, l)-funkce, jež nabývají obou extrémů k-krát a každé jiné své hodnoty l-krát.

Poznámky. III. Že (k, l)-funkce s $l > 2$ musí každého z extrémů nabýt k-krát, bylo řečeno v poznámce II. Není však pravda, že by taková (k, l)-funkce nemohla nabýt hodnoty od extrémů různé k-krát. Dá se na př. bez potíží sestrojit (1, 3)-funkce, která nabývá jednou právě každé hodnoty z libovolně předepsaného uzavřeného číselného množství F, které, značí-li M resp. m

maximum resp. minimum té (1, 3)-funkce, splňuje podmínky: $[m, M] \neq F \subset [m, M]$, m v F, M v F.

IV. Naopak neexistuje (1, 2)-funkce, která nabývá každého z extrémů jednou a každé jiné své hodnoty dvakrát.

*

Sur les fonctions continues qui prennent chaque leur valeur k-fois ou l-fois.

(Extrait de l'article précédent.)

Étant donné deux nombres naturels k et l, $k < l$, j'appelle *(k, l)-fonction* toute fonction (réelle), définie et continue dans un intervalle fermé, qui prend chaque sa valeur k-fois[1]) ou l-fois, au moins une k-fois et au moins une l-fois. L'objet de l'article précédent est la démonstration du théorème suivant:

Si et seulement si

$$l \geqq 2k - 1, \tag{1}$$

il existe des (k, l)-fonctions.

Pour démontrer que la condition (1) est nécessaire, on s'appuie (l'inégalité (1) étant triviale pour $k = 1$) sur le lemme suivant:

Soit $f(x)$ une fonction définie et continue dans l'intervalle $[a, b]$[2]) qui prend chaque sa valeur un nombre fini de fois. Si $f(x)$ prend son maximum h-fois ($h > 1$), mais au moins $(h-1)$-fois entre a et b, alors $f(x)$ prend au moins une de ses valeurs au moins $(2h-1)$-fois.

Pour démontrer que la condition (1) est suffisante, je construis une (k, l)-fonction correspondante. Or le cas $k = 1$, $l = 2$ étant banal (puisque les deux segments joignant les points [du plan cartésien] (0,0), (1, 1) et (1,1), (2,0) définissent déjà une (1,2)-fonction), on peut supposer $l > 2$. Les formules (9) — (12) du texte tchèque définissent des (k, l)-fonctions dans tous les autres cas. Les fonctions auxiliaires qui figurent dans les seconds membres des formules de définition (9) — (12) sont données par les formules (4) — (8), dans lesquelles a, b, m, M désignent des nombres donnés, $a < b$, $m < M$, et h — un nombre impair positif donné. Je prie le lecteur de vouloir substituer, dans les formules (4) — (12), les mots tchèques par les mots français correspondants au moyen du vocabulaire suivant: liché = impair, lineární = linéaire, pro = pour, sudé = pair, v = dans.

---

[1]) C'est à dire précisément k-fois; autrement je dis „au moins k-fois".

[2]) C'est à dire l'ensemble de tous les x pour lesquelles $a \leqq x \leqq b$.