Ota Setzer

Problém jehly v obecném čtyřúhelníku

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 62 (1933), No. 2, 1--4

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121944

Problém jehly v obecném čtyřúhelníku.

Ota Setzer.

(Došlo 14. dubna 1931.)

Problémem jehly v obecném čtyřúhelníku rozumíme tuto úlohu z geometrických pravděpodobností:

„Na rovinu pokrytou sítí shodných obecných čtyřúhelníků házíme tenkou jehlu dané délky. Jaká jest pravděpodobnost, že jehla neprotne stranu čtyřúhelníků sítě?"

Při řešení činíme některé předpoklady:

a) Místa středů vržené jehly jsou pro všechny body roviny stejně pravděpodobná.

b) Všechny úhly, jež svírá vržená jehla s určitým daným směrem, jsou stejně pravděpodobné.

c) Délka jehly l budiž menší než kterákoli vzdálenost vrcholu čtyřúhelníku od protější strany.

Přistupme k řešení problému. Zvolme v síti čtyřúhelník $ABCD$; vrcholem A veďme rovnoběžky se stranami c, d, b, jež svírají se stranou a postupně úhly

$$\lambda_1 = \pi - (\beta + \gamma), \; \lambda_2 = \alpha, \; \lambda_3 = \pi - \beta. \tag{I}$$

Úhel $\varkappa$ vržené jehly se stranou a nechť leží postupně v intervalu

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & 0 = \lambda_0 < \varkappa_1 < \lambda_1 \\ 2. & \lambda_1 < \varkappa_2 < \lambda_2 \\ 3. & \lambda_2 < \varkappa_3 < \lambda_3 \\ 4. & \lambda_3 < \varkappa_4 < \lambda_4 = \pi \end{array}\right\} \tag{II}$$

Pravděpodobnost, že úhel $\varkappa$ leží v mezích $(\varkappa_i, \varkappa_i + d\varkappa_i)$, jest rovna podle předpokladu b)

$$Q_i = \frac{d\varkappa_i}{\pi}; \tag{III}$$

pravděpodobnost, že při tomto směru má střed jehly příznivou polohu, jest podle předpokladu a)

$$R_i = \frac{T_i}{T}; \tag{IV}$$

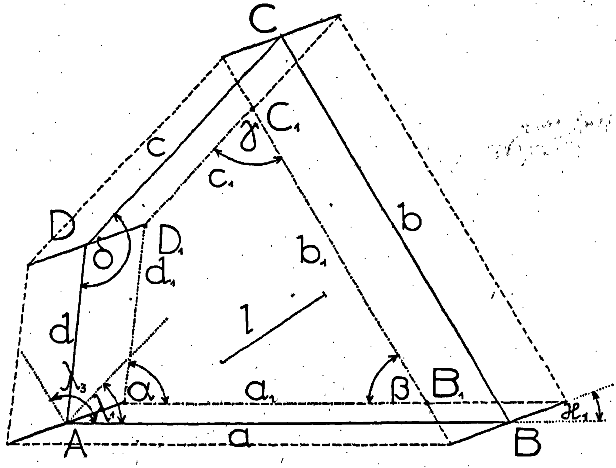
kde T jest plocha daného čtyřúhelníku, T_i plocha čtyřúhelníku, jehož konstrukce plyne z obrazce.

Složená pravděpodobnost P_i, že jehla svírajíc se stranou a úhel v i-tém intervalu neprotne žádnou stranu, jest

$$P_i = \int\limits_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} Q_i \,.\, R_i = \frac{1}{\pi \,.\, T} \cdot \int\limits_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} T_i \,.\, d\varkappa_i. \tag{V}$$

Hledanou pravděpodobnost pak nalezneme jako součet

$$P = \sum_1^4 {}^i P_i. \tag{VI}$$



Zbývá jenom vypočísti hodnoty T, T_i. Z obrazce (úhel $\varkappa$ volen v 1. intervalu) plyne.

$$T = \tfrac{1}{2} \,.\, (ad \sin\alpha + bc \sin\gamma) = \tfrac{1}{2}\, (ab \sin\beta + cd \sin\delta), \tag{VII}$$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \tfrac{1}{2}(a_1 b_1 \sin\beta + c_1 d_1 \sin\delta) \\ a_1 &= a - \frac{l \sin(\beta + \varkappa_1)}{\sin\beta};\quad \mathrm{b}_1 = b - \frac{l \sin\varkappa_1}{\sin\beta} - \\ &\frac{l \,.\, \sin(\beta + \gamma + \varkappa_1)}{\sin\gamma};\quad c_1 = c - \frac{l \,.\, \sin(\beta + \varkappa_1)}{\sin\gamma};\quad d_1 = d. \end{aligned}\right\} \tag{VIIa}$$

Z analogických obrazců vypočteme

$$\left.\begin{aligned} T_2 &= \tfrac{1}{2}(a_2 b_2 \sin\beta + c_2 d_2 \sin\delta) \\ a_2 &= a - \frac{l \sin(\beta + \varkappa_2)}{\sin\beta};\quad b_2 = b - \frac{l \sin\varkappa_2}{\sin\beta}; \\ c_2 &= c - \frac{l \sin(\alpha - \varkappa_2)}{\sin\delta};\quad d_2 = d - \frac{l \sin(\alpha + \delta - \varkappa_2)}{\sin\delta}; \end{aligned}\right\} \tag{VIIb}$$

$$\left.\begin{aligned} T_3 &= \tfrac{1}{2}(a_3 d_3 \sin\alpha + b_3 c_3 \sin\gamma);\\ a_3 &= a - \frac{l\sin(\varkappa_3-\alpha)}{\sin\alpha} - \frac{l\sin(\beta+\varkappa_3)}{\sin\beta};\\ b_3 &= b - \frac{l\sin\varkappa_3}{\sin\beta};\; c_3 = c,\; d_3 = d - \frac{l\sin\varkappa_3}{\sin\alpha};\end{aligned}\right\} \quad \text{(VII}c\text{)}$$

$$\left.\begin{aligned} T_4 &= \tfrac{1}{2}(a_4 d_4 \sin\alpha + b_4 c_4 \sin\gamma);\\ a_4 &= a - \frac{l\sin(\varkappa_4-\alpha)}{\sin\alpha};\; b_4 = b - \frac{l\sin(\alpha+\delta-\varkappa_4)}{\sin\gamma};\\ c_4 &= c + \frac{l\sin(\beta+\varkappa_4)}{\sin\gamma};\; d_4 = d - \frac{l\sin\varkappa_4}{\sin\alpha}.\end{aligned}\right\} \quad \text{(VII}d\text{)}$$

Dosadíme-li hodnoty T_i do vzorce (V) pro P_i, integrujeme-li v daných mezích, sečteme-li podle (VI), dostaneme po vhodné úpravě výsledný vzorec:

$$P = 1 - \frac{o\,.\,l}{\pi\,.\,T} + \frac{l^2}{\pi\,.\,T} + \frac{l^2}{4\,.\,\pi T}\cdot \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}^{\omega} (\pi-\omega)\,.\,\mathrm{cotg}\,\omega, \quad \text{(VIII)}$$

kde o jest obvod čtyřúhelníku a úhly v míře obloukové.

Uvažujme nyní některé specielní případy:

1. Nechť přejde úhel δ v přímý; pak přechází čtyřúhelník v trojúhelník, jehož strany jsou při obvyklém značení

$$\left.\begin{aligned} a' &= b,\; b' = c + d,\; c' = a\\ \text{obvod a plocha}\quad 2s &= o,\; \Delta = T.\end{aligned}\right\} \quad \text{(IX)}$$

Užitím pravidla *l'Hospitalova* počítejme

$$\lim_{\delta\to\pi}(\pi-\delta)\,\mathrm{cotg}\,\delta = \lim_{\delta\to\pi}\frac{\pi-\delta}{\mathrm{tg}\,\delta} = \lim_{\delta\to\pi}\frac{-1}{\sec^2\delta} = -1;$$

protože v trojúhelníku platí dále

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{cotg}\,\alpha &= \frac{1}{4\Delta}\cdot(b^2+c^2-a^2);\; \mathrm{cotg}\,\beta = \frac{1}{4\Delta}(a^2+c^2-b^2),\\ \mathrm{cotg}\,\gamma &= \frac{1}{4\Delta}(a^2+b^2-c^2),\; \alpha+\beta+\gamma = \pi,\end{aligned}\right\} \quad \text{(IX}a\text{)}$$

jest

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma}^{\omega}(\pi-\omega)\,.\,\mathrm{cotg}\,\omega = \frac{1}{2\Delta}(\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2) \quad \text{(X)}$$

a vzorec (VIII) se změní v

$$P' = 1 - \frac{2ls}{\pi\Delta} + \frac{3l^2}{4\pi\Delta} + \frac{l^2}{8\pi\Delta^2}(\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2), \quad \text{(XI)}$$

uváděný v *Markovově* knize „Wahrscheinlichkeitsrechnung".

2. Hledejme pravděpodobnost pro síť obdélníků:

$$o = 2(a + b),\ T = ab,\ \omega = \frac{\pi}{2},\ \cotg \omega = 0, \tag{XII}$$

$$P'' = 1 - \frac{2(a+b) \cdot l}{\pi ab} + \frac{l^2}{\pi ab}. \tag{XIII}$$

Nechme strany b vzrůstati do ∞, t. j. síť obdélníků nahraďme sítí rovnoběžek vzdálených od sebe a:

$$\overline{P} = \lim_{b \to \infty} P'' = 1 - \frac{2l}{\pi a}; \tag{XIV}$$

$\overline{P}$ je pravděpodobnost neprotnutí; pravděpodobnost Q, že jehla protne některou rovnoběžku, jest dána výrazem

$$Q = 1 - \overline{P} = \frac{2l}{\pi a}. \tag{XV}$$

Vzorec (XV) jest známý výsledek úlohy *Buffonovy*.

*

Le problème de l'aiguille dans un quadrangle.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur résout le problème suivant:

Un plan est recouvert par un réseau de quadrangles congruents. On y jette une aiguille. Quelle est la probabilité que l'aiguille ne coupe aucun des côtés du réseau?

L'aiguille jetée peut avoir une direction arbitraire; son centre doit occuper, en même temps, une position favorable.

La probabilité concernant la direction est donnée par l'expression (III), la probabilité de la position favorable du centre par (IV). La probabilité composée P est leur produit.

Le résultat (VIII) résout notre problème et contient les résultats de M. M. *Markoff* (réseau de triangles) et *Buffon* (filet des parallèles) comme cas particuliers.